特　集

数学科教育法と数学科教材研究の講義実践報告

井　沼　　学

1．はじめに

本稿は，2017年度に著者が担当した城西大学理学部数学科（紀尾井町キャンパス）３年次の講義「数学科教育法　I」「数学科教育法　II」「数学科教材研究　I」「数学科教材研究　II」の実践報告と反省である（「数学科教育法　I」「数学科教材研究　I」は前期15回開講で受講者は23名，「数学科教育法　II」「数学科教材研究　II」は後期15回開講で受講者は15名であった）。毎回，ある数学の題材を１つ取り上げて，関連する問題を学生に与え，学生が一人で考える時間とお互いに議論する時間を適度に混ぜながら講義を進めた。与えた問題は，著者の経験から，中学生や高校生でも理解できるもの（一部は教科書では扱われない内容も含む）の中から，あえて，学生がとくに苦手としている数学的思考を用いるものを選んだ。

以下では，第２章でこの講義の狙いを述べ，第３章で，とくに学生の学習態度・能力に改善が見られた事例（場合の数・論理）と改善が見られなかった事例（不等式）について，講義中の学生の様子や試験の結果を振り返りながらその原因を考察する。最後に，第４章で，著者自身の反省を述べる。

2．講義の狙い

次期中学校学習指導要領（平成29年３月告示）と高等学校学習指導要領（平成30年３月告示）では，（教員は）生徒が自在に数学的な「見方・考え方」を働かせることができるよう（授業を工夫し），生徒の数学的に考える資質・能力を育成することが目標の１つとして挙げられている。その目標の達成のためには，まずは教員が，あるいは教員を目指す学生が，問題の本質や問題の背後にある様々な数学的背景について深く考える力を身につけなければならない。そこで講義では，学生が積極的に問題に取り組み主体的に考える機会を増やすよう心がけた。とくに，次の（１）から（３）に述べる学習態度で臨むよう何度も注意した。

（１）問題に対して，単純に答えを出すことのみを目指すのではなく，その問題が何を言わんとしているのか，問題の背景にどのような面白さが隠れているのかについて考えること。

（２）他者の説明（考え方）をそのまま鵜呑みするのではなく，自分自身の言葉で捉え直して何度も検証すること。

（３）間違えることを恐れないこと。間違えたと感じた場合は，闇雲に修正を試みるのではなく，なぜ間違いなのかについて考えて納得した上で別な考えに進むこと。

3．講義の振り返り

「数学科教育法　I」と「数学科教材研究　I」は前期開講で履修年次は３年次，受講者は23名，おもに高等学校の学習内容を課題として扱った。「数学科教育法　II」と「数学科教材研究　II」は後期開講で履修年次は３年次，受講者は15名，

おもに中学校の学習内容を課題として扱った。

３．１　改善が見られた事例（場合の数・論理）

「数学科教材研究　II」のある回では，場合の数を数える離散的思考力や論理力を養うため，次のゲームについて考えた。

準備　白い帽子が２個，赤い帽子が３個あり，参加者A，B，Cの３人はそのことを知っている。

STEP１　　A，B，Cが互いに向かい合うように座り，３人に１つずつ帽子を被せる。ただし，他の２人の帽子の色は見えるが，自分の帽子の色は見えないように被せる。

STEP２　　A，B，Cの順に自分の帽子の色を言い当てていく。ただし，確実に言い当てられない時は「わからない」と答えるものとする。

講義では，実際に５回ほどゲームを行なった。それぞれの回で３人の学生に前に出てきてもらい，３人は自分から見える他の２人の帽子の色と他の人の答えをヒントにして自分が被っている帽子の色を当てる。

実は，このゲームは１順目で必ず誰かが自分の帽子の色を当てることができる。例えば，（A，B，C）がそれぞれ（赤，赤，赤）ならば，Aは，自分の帽子が白である可能性も赤である可能性もあるため「わからない」と答える。Bは，Aが「わからない」と答えたので，（B，C）が（白，白）ではないことはわかるが，（白，赤）または（赤，赤）の可能性があり，「わからない」と答える。Cは，もし自分が白ならば，Bは自分が白ではないとわかるはずなので（Bが白ならば，Aは自分が赤だと当てられるので），Bが「わからない」と答えたことからC自身が赤であることがわかる。このように「わからない」という答えも推理に必要な情報となることに注意して丁寧に論理を展開すれば，他の場合についても証明できるが，全ての場合について証明を完成させることは決して容易ではない。

実験の３回目では，ほとんどの学生が，１順目で誰かが言い当てられることに気づいたようであった。４回目以降の実験では，誰もがA，B，CのCの役を担当したがった。それは，すぐには当てられない帽子の被せ方の場合，Cが最も論理力を働かせなければならないためであり，逆に言えば，このゲームで自分の帽子の色を当てられる達成感を一番感じられるのがCだからである。講義では，学生がこの問題の面白さを十分に感じ取った段階で実験を終了し，正確な証明については一切説明しなかった。その後は，より一般にゲームの参加人数がn人になった場合（帽子の色は白がn－１個，赤がn個）を考える方向に発展させた。そして，期末試験で次の問題を出題した。

問題　（上の３人のゲームで）１巡目で必ず誰かが正解できることについて説明せよ(証明せよ)。

その結果，15名中８名が正しく証明でき，４名が「３人とも赤」の場合の証明が不十分であるなど１つの場合を除いて証明ができており，３名は簡単な場合の証明しかできなかった。１つの場合だけ証明が不十分だった場合を，ほぼ証明ができたと評価すれば，12名がほぼ証明ができたという結果になる。

完答できた学生の１人に，なぜ，この問題は証明ができたのかを聞いたところ，「高等学校までに習ったことのない内容なので，実際に体験したことを思い出しながら１つずつの場合を具体的に丁寧に考えるしかなかった」と答えた。学生は初めてこのゲームを体験して，「知り得る情報から自分の帽子の色を当てよう」と考えたこと，そうやって考えたことがそのまま証明の流れになって

いること，さらに著者が講義中に学生に対して一切詳しい証明を求めず，説明もしなかったことから，試験で唐突に説明（証明）を求められて，自分の体験をそのまま説明（証明）するしかなかった，ということである。

３．２　改善が見られなかった事例（不等式）

「数学科教育法　I」の講義では，数回ほど「不等式」を題材として扱った。ある回の時間の最初に次の証明問題を出題した。

問題　実数a，b，c，dは$a \geq b$かつ$c \geq d$を満たす。
このとき，次の不等式を示せ。

$$ac+bd \geq ad+bc$$

また，上の不等式で等号が成り立つための必要十分条件を考えよ。

この問題について全くヒント無しに，できるだけ一人で10分ほど考えた後で，前半部分だけでも証明を完成させることができた学生に挙手させたところ，証明ができた学生は23名中５名ほどであったと記憶している。

挙手した学生の１人が前に出て説明したところ，皆がその証明方法は理解したようであったが，その後，この４個の実数に対する問題を６個，８個，一般に２n個に拡張した場合にどのような不等式が成立するのかを考えた際には，すべての学生が苦戦していた。

上述の４個の実数に対する不等式は，次のように，示すべき不等式を変形し因数分解を用いることで容易に証明できる。

証明

$$ac+bd-(ad+bc) \geq 0$$

を証明すれば良い。

$$\begin{aligned} &ac+bd-(ad+bc)\\ &=a(c-d)-b(c-d)\\ &=(a-b)(c-d) \geq 0 \end{aligned}$$

最後の不等号は$a \geq b$と$c \geq d$より従う。等号成立の条件は$a=b$または$c=d$である。

これは高等学校２年生の初期に学習する初歩的な不等式であるが，大学３年生の段階で４分の３以上の学生が証明できなかったという事実に著者はあまり驚かなかった。なぜなら，学生の多くが，数学の問題を解く際に，ほとんどの場合，単純な等式の変形を繰り返して答えに近づこうとするということを知っていたからである。等式の場合，多少論理が曖昧でも一見して２つの数式が等しいということがわかり，何も考えなくても正しく計算を進められる場合が多い。しかし，不等式の場合は，２つの数式の大小（順序）関係が一見しただけではわかりにくいことが多く，大小（順序）関係が成立するかどうか論理的に理解しながら，計算を進めなければならない。単純な等式変形で安易に答えを導くことに慣れてしまった学生には，そのことが大変困難となる。

他に不等式に関する回では，２次不等式や２元１次不等式，不等式が表す領域の問題などを扱った。学生が自主的に考えたり，互いに相談したりしながら，ある程度理解を深めることができたように思えた。

しかしながら，期末試験で出題した次の不等式の証明問題（10点満点）では，23名中１名が10点，１名が８点（等号が成立する条件の記載が不十分），21名が０点（全くでたらめな証明あるいは白紙）という結果であった。

問題　実数a，b，cに対して

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

を証明せよ。等号が成立するのはどのようなときか。

講義中にこの問題そのものは扱わなかったが，証明に用いる平方完成については，２次不等式を

考えた講義の回で再三確認したことや，この問題も高等学校の基本的な内容であることを考えると，少しも証明が進まないほど難しい問題ではない。

では，なぜ，ほとんどの学生が全く証明できなかったのか。前章の改善が見られた事例と比較して考えると，その失敗の原因は，講義の最初から文字式として不等式を与えてしまったからであろうと考える。つまり，文字で表した不等式をそのまま与えてしまうと，学生はその面白さを見出せずに，どうしてもその証明方法を覚えようとしてしまう。試験で出題されても，その問題の面白さを思い出すことはなく（面白いと思った経験がないので），覚えた証明方法を使おうとしてしまい，前章の論理の問題のように最初から丁寧に考えようとする態度になれないのではないかと考える。

４．おわりに

本稿では，2017年度の城西大学理学部数学科（紀尾井町キャンパス）の数学科教育法と数学科教材研究の講義を振り返って，学生の学習態度・能力に改善が見られた事例と見られなかった事例とを比較しそれぞれの原因を考察した。

これらの考察から，学生に最初に問題を提示する際に，抽象的な表現で（文字や記号を使った表現で）問題を与えてしまうと，多くの学生はその中身を丁寧に考えることなく安易に解法を見つけよう（覚えよう）とする態度に陥ってしまうことがわかった。第２章の（１）から（３）で述べた学習態度で臨むよう何度も繰り返し注意し，学生自身それを十分に意識したとしても，その癖を改善することは難しいことがわかった。

著者自身，このことを反省し，今後の講義において，学生に（最初に）問題を与える際には，安易に抽象的な表現に頼ることなく，できるだけ学生が主体的に興味を持って考えられる問題に変えて提供する工夫が必要であると考えている。

文部科学省（2017)『中学校学習指導要領（平成29年３月告示)』
文部科学省（2018)『高等学校学習指導要領（平成30年３月告示)』