EEにおける利息計算

野沢孝之助

1

Engineering Economy（以下 EE という）では，投資計画計算において，収入または支出を必ずしも年末あるいは年首の一時点とせず，年間連続的に発生するものとの仮定が用いられることがある。Grant は，年末仮定を end-of-year convention といい，連続仮定を uniform-flow convention と呼んでいる(1)。また，その計算用数表が発表されているものもある。確かに収支の種別によっては，連続的の仮定はより実状に近いものと考えられる。

従来から商業数学においても，年金において周知のように連続年金を考え，利率についても瞬間切替の利力 δ を論じている。しかし，計算用数表については，実用上あまりその必要を認めなかったものか殆んど備わっていないようである。

わが国に紹介されている EE における利息計算には，連続支払と利率瞬間切替との両概念が混乱しているにあらずやと思われる点がすこぶる多い。しかし，これは外書にも誤りがあるものがあり，これを無批判に紹介せられるによることも多いようである(2)。

以下，EE におけるこの利息計算において

（1） 連続支払の仮定とその計算用数表

（2） 連続支払の近似計算

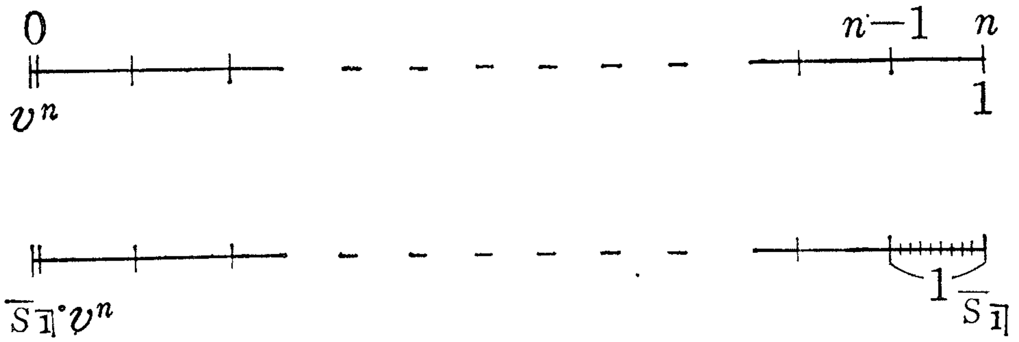
について，従来の商業数学と比較しながら考察しよう。

2

将来収支される金銭の現価は，従来1をn年末に収支する場合について，利率iなればv^n，利率δなれば$e^{-n\delta}$としている。

いま，この収支をn年首からn年末にわたって連続的に発生するものと仮定した現価を考える（第2-1図参照）と，

$$v^{n-1}\,\bar{a}_{\overline{1|}}\ \text{at}\ i=v^{n-1}\,\bar{s}_{\overline{1|}}\,a_{\overline{1|}}=\bar{s}_{\overline{1|}}\,v^{n} \qquad [301]$$



（第2-1図）

また，これをδによって評価すれば，

$$e^{-(n-1)\delta}\,\bar{a}_{\overline{1|}}\ \text{at}\ \delta=e^{-(n-1)\delta}\cdot\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-n\delta} \qquad [401]$$

となる。

〔301〕式は Grant,〔401〕式は Reul, Dean などによって導入された概念かと思われるが[3]，しかし，$n-1|\bar{a}_{\overline{1|}}$と考えれば，据置連続年金現価の応用である。

3

複利現価・年金現価・賦金（償還）の公式一覧表を示すと，第3-1表のようである。

周知のように，v^n, $a_{\overline{n|}}$, $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$, $\bar{a}_{\overline{n|}}$ などの記号は，従来から商業数学・保険数学において用いられているが，EE ではこれら記号を用いず，直接に計算式を示すのが例である。たとえば，$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$ は $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$ とし，その名称も資本回収係数（Capital recovery factor）と呼んでいるごときである[4]。

	期末払		連続払	
	i	δ	i	δ
複利現価 v^n	$(1+i)^{-n}$ 〔101〕	$e^{-n\delta}$ 〔201〕	$\bar{s}_{\overline{1}\rceil}v^n$ 〔301〕	$\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-n\delta}$ 〔401〕
年金現価 $a_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{1-v^n}{i}$ 〔102〕	$\frac{1-e^{-n\delta}}{e^{\delta}-1}$ 〔202〕	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil}=\bar{s}_{\overline{1}\rceil}a_{\overline{n}\rceil}$ 〔302〕	$\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}$ 〔402〕
賦金 $\frac{1}{a_{\overline{n}\rceil}}$	$\frac{i}{1-v^n}$ 〔103〕	$\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-n\delta}}$ 〔203〕	$\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n}\rceil}}=\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}\rceil}}\cdot\frac{1}{a_{\overline{n}\rceil}}$ 〔303〕	$\frac{\delta}{1-e^{-n\delta}}$ 〔403〕

(第 3-1 表)

〔201〕~〔203〕式は，周知のように，〔101〕~〔103〕式において

$$1+i=e^{\delta}$$

を置き換えれば求められる。

〔301〕~〔303〕式は，〔101〕~〔103〕式に，

$$\bar{s}_{\overline{1}\rceil} \text{ at } i=\frac{i}{\delta}$$

を乗ずればよく，また，〔401〕~〔403〕式は，〔201〕~〔203〕式に，

$$\bar{s}_{\overline{1}\rceil} \text{ at } \delta=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}$$

を乗ずれば求めることができることは，商業数学書において明らかであろう。

なお，〔301〕式と〔302〕式の関係は，〔101〕式と〔102〕式の関係に等しい。

$$\bar{s}_{\overline{1}\rceil}v+\bar{s}_{\overline{1}\rceil}v^2+\cdots\cdots+\bar{s}_{\overline{1}\rceil}v^n=\bar{s}_{\overline{1}\rceil}(v+v^2+\cdots\cdots+v^n)=\bar{s}_{\overline{1}\rceil}a_{\overline{n}\rceil}$$

同様に，〔401〕式と〔402〕式の関係も，

$$\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-\delta}+\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-2\delta}+\cdots\cdots+\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-n\delta}$$

$$=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}(e^{-\delta}+e^{-2\delta}+\cdots\cdots+e^{-n\delta})$$

$$=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-\delta}\cdot\frac{1-e^{-n\delta}}{1-e^{-\delta}}$$

$$=\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}$$

である。

4

商業数学書においては，〔101〕～〔103〕式について，数表を与えていることはいうまでもない。EE 書においても，これを掲げるのが例である。ただ，商業数学では財務数学の性質上，精密値を要することが多いので桁数を多く与えるが，利率は精々 20% (場合によっては 8%) 程度にとどめることが多い。ところが EE では利率に当るものは利益率と考えられることもあり高利率まで必要

種別	数表名	利率 % (刻み)	期間 (刻み)	桁数 (小数)
v^n 〔101〕	Gushee	20 (1) 25 (5) 100	1 (1) 60 1 (1) 10	10
	Merrett	21 (1) 50	1 (1) 50	6
	Bracken	55 (5) 80 (10) 100	1 (1) 50	有効 5
	Taylor	110 (10) 150	1 (1) 15	5
$a_{\overline{n}\mid}$ 〔102〕	Gushee	20 (1) 25 (5) 100	1 (1) 60 1 (1) 10	10
	Merrett	21 (1) 50	1 (1) 50	4
	Bracken	26 (1) 30 (2) 50 55 (5) 80 (10) 100	1 (1) 50	有効 5
	Taylor	110 (10) 150	1 (1) 15	5
$\frac{1}{a_{\overline{n}\mid}}$ 〔103〕	Gushee	20 (1) 25 (5) 100	1 (1) 60 1 (1) 10	10
	Bracken	26 (1) 30 (2) 50 55 (5) 80 (10) 100	1 (1) 50	有効 5
	Taylor	110 (10) 150	1 (1) 15	4

(第 4-1 表)

なるべく重複しないように掲げた。なお，たとえば，利率 20 (1) 25 (5) 100 は，20 %～25% (1% 刻み) 25%～100% (5% 刻み) を示す。

Gushee, C. H.: Financial Compound Interest and Annuity tables 3/e '61

Merrett, A. J. & Sykes, A.: The Finance and Analysis of Capital Projects '65

Bracken, J. & Christenson, C. J.: Tables for use in Analyzing Business Decisions '65

Taylor, G. A.: Managerial and Engineering Economy—Economic Decision-Making '64

とするが，それほど精密値を必要としないので桁数を商業数学書ほどには与えないのが例である[5]。

参考に 20% 以上の高利率の v^n, $a_{\overline{n}|}$, $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$ の諸表を掲げる（第4-1表）。

種　　別	数 表 名	利　率 %（刻 み）	期　間（刻 み）	桁 数（小 数）
v^n at δ　〔201〕	Bierman	e^{-x}　$x=0.00\ (0.01)\ 4.99$		6
	Thuesen	2 (1) 10	1 (1) 30 (5) 60 70 (10) 100	5
	Dean　C	1 (1) 100	1 (1) 5 (5) 50	4
$a_{\overline{n}|}$ at δ　〔202〕	Thuesen	2 (1) 10	1 (1) 30 (5) 60 70 (10) 100	5
$\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$ at δ　〔203〕	〃	〃	〃	〃
$\bar{s}_{\overline{1}|}v^n$ at i　〔301〕	Grant	1 (1) 10, 12 15 (5) 50	1 (1) 50	4
$\bar{a}_{\overline{n}|}$ at i　〔302〕	Bracken	1 (1) 30 (2) 50 55 (5) 80 (10) 100	1 (1) 50	有効 5
	Taylor	1 (1) 10 (5) 50 60 (10) 150	1 (1) 35 (5) 100 その他	5〜4
$\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$ at i　〔303〕	Bracken	1 (1) 30 (2) 50 55 (5) 80 (10) 100	1 (1) 50	有効 5
	Taylor [9]	1 (1) 10 (5) 50 60 (10) 150	1 (1) 35 (5) 100 その他	5
$\bar{s}_{\overline{1}|}$ at δ	Thuesen [10]	1 (1) 40	—	6
$\dfrac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-n\delta}$〔401〕	Dean　D	1 (1) 100	1 (1) 15	4
$\bar{a}_{\overline{n}|}$ at δ　〔402〕	Schweyer	1 (1) 10 (2) 20 25 (5) 40, 50	1 (1) 20 (5) 30 40 (10) 50	3

（第 4-2 表）

なるべく重複しないように掲げた。

Bierman, Jr. & Smidt, S.: The Capital Budgeting Decision 2/e '66

Thuesen, H. G. & Fabrycky, W. J.: Engineering Economy 3/e '64

Dean: 前掲表（注 3）

Grant: 〃（注 3）

Bracken: 〃

Taylor: 〃

Schweyer, H. E.: Analytic Models for Managerial and Engineering Economics '64

Gushee を除いてはすべて EE 書である。

〔201〕~〔403〕式の数表は，商業数学書には与えられていない。したがって，〔201〕~〔203〕および〔401〕~〔403〕式は，$e^{-n\delta}$，e^{δ} を指数関数表から，あるいは対数表(6)を利用して求めて後，公式によって計算しなければならない。しかし，〔301〕~〔303〕式については，次の2つの数表の積として示すことができる。

〔301〕 $v^n \times \bar{s}_{\overline{1|}}$ at i (7)

〔302〕 $a_{\overline{n|}} \times \bar{s}_{\overline{1|}}$ at i

〔303〕 $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}} \times \dfrac{1}{\bar{s}_{\overline{1|}}}$ at i (8)

EE 書では，〔201〕~〔402〕式に対して，第4-2表のようにそれぞれ数表を与えているものがある。

5

以下の算例は，第4-2表に示す数表を利用することを主とし，別解としてこれを利用しない場合について述べる。

〔**算例 1**〕 次の現価を求めよ。

(1) 5年末に支払われる ¥10,000 at $\delta=10\%$

(2) 5年首から5年末にわたって連続的に支払われる合計 ¥10,000 at $i=10\%$ および $\delta=10\%$

(解)

(1) 〔201〕

¥10,000$e^{-5\delta}$= ¥10,000×0.6065 3=<u>¥6,065</u>

(2) $i=10\%$ 〔301〕

¥10,000 $\bar{s}_{\overline{1|}} v^5$ at i= ¥10,000×0.6515=<u>¥6,515</u>

別解

¥10,000 $\bar{s}_{\overline{1|}} \times v^5$ at i= ¥10,000×1.0492 06×0.6209 21

= ¥10,000×0.6514 7= ¥6,515

$\delta=10\%$ 〔401〕

¥10,000$\cdot\dfrac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-5\delta}$ = ¥10,000×0.6379=<u>¥6,379</u>

別解

$$¥10,000\,\bar{s}_{\overline{1}|}\times e^{-5\delta} \text{ at } \delta= ¥10,000\times 1.0517\ 09\times 0.6065\ 3$$
$$= ¥6,379$$

〔算例 2〕 次の年金現価を求めよ。

（1） 毎年末 ¥1,000 あてを5か年間支払われる年金 at $\delta=10\%$

（2） 年額 ¥1,000 を5か年にわたって継続的に支払われる年金 at $i=10\%$ および $\delta=10\%$

(解)

（1） 〔202〕

$$¥1,000\,a_{\overline{5}|} \text{ at } \delta= ¥1,000\times 3.7412\ 4$$
$$= \underline{¥3,741}$$

別解

$$¥1,000\cdot\frac{1-e^{-5\delta}}{e^{\delta}-1}= ¥1,000\cdot\frac{1-0.6065\ 3}{1.1051\ 7-1}$$
$$= ¥3,741$$

（2） $i=10\%$ 〔302〕

$$¥1,000\,\bar{a}_{\overline{5}|} \text{ at } i= ¥1,000\times 3.9773$$
$$= \underline{¥3,977}$$

別解

$$¥1,000\,\bar{s}_{\overline{1}|}\times a_{\overline{5}|} \text{ at } i= ¥1,000\times 1.0492\ 06\times 3.7907\ 87$$
$$= ¥3,977$$

$\delta=10\%$ 〔402〕

$$¥1,000\,\bar{a}_{\overline{5}|} \text{ at } \delta= ¥1,000\times 3.935$$
$$= \underline{¥3,935}$$

別解

$$¥1,000\cdot\frac{1-e^{-5\delta}}{\delta}= ¥1,000\times\frac{1-0.6065\ 3}{0.1}$$
$$= ¥3,935$$

〔算例 3〕 次の12年間の年当り費用 (賦金) を求めよ。

（1） 第1年首に ¥1,000 第6年首に ¥1,500 第11年首に ¥800 の支払を要する費用 at $\delta=10\%$

（2） 第1年首から第5年末までに合計 ¥1,000 第6年首から第10年末まで

に合計 ¥1,500 第11年首から第12年末までに合計 ¥800 を連続的に支払を要する費用 at $i=10\%$ および $\delta=10\%$

(解)

(1) 〔201〕, 〔203〕

$$(¥1,000+¥1,500\,v^5+¥800\,v^{10})\frac{1}{a_{\overline{12}|}} \text{ at } \delta$$

$$=(¥1,000+¥1,500\times0.6065\ 3+¥800\times0.3678\ 8)\times0.1505\ 0$$

$$=\underline{¥332}$$

別解

$$(¥1,000+¥1,500e^{-5\delta}+¥800e^{-10\delta})\cdot\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-12\delta}}$$

$$=(¥1,000+¥1,500\times0.6065\ 3+¥800\times0.3678\ 8)\times\frac{1.1051\ 7-1}{1-0.3011\ 9}$$

$$=¥332$$

(2) $i=10\%$ 〔301〕~〔303〕

$$\left(¥1,000\times\frac{1}{5}\bar{a}_{\overline{5}|}+¥1,500\times\frac{1}{5}\bar{a}_{\overline{5}|}\,v^5+¥800\times\frac{1}{2}\bar{a}_{\overline{2}|}\,v^{10}\right)\times\frac{1}{\bar{a}_{\overline{12}|}} \text{ at } i$$

$$=(¥200\times3.9773+¥300\times3.9773\times0.6209\ 2$$

$$+¥400\times1.8209\times0.3855\ 4)\times0.1398\ 8$$

$$=\underline{¥254}$$

別解

$$(¥200\times\bar{s}_{\overline{1}|}\,a_{\overline{5}|}+¥300\,\bar{s}_{\overline{1}|}\,a_{\overline{5}|}\,v^5+¥400\,\bar{s}_{\overline{1}|}\,a_{\overline{2}|}\,v^{10})\times\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|}}\cdot\frac{1}{a_{\overline{12}|}} \text{ at } i$$

$$=(¥200\,a_{\overline{5}|}+¥300\,a_{\overline{5}|}\,v^5+¥400\,a_{\overline{2}|}\,v^{10})\times\frac{1}{a_{\overline{12}|}}$$

$$=(¥200\times3.7907\ 9+¥300\times3.7907\ 9\times0.6209\ 2$$

$$+¥400\times1.7355\ 4\times0.3855\ 4)\times0.1467\ 6$$

$$=¥254$$

$\delta=10\%$ 〔401〕~〔403〕

$$\left(¥1,000\times\frac{1}{5}\bar{a}_{\overline{5}|}+¥1,500\times\frac{1}{5}\bar{a}_{\overline{5}|}\,e^{-5\delta}+¥800\times\frac{1}{2}\bar{a}_{\overline{2}|}\,e^{-10\delta}\right)\times\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|}}\cdot\frac{1}{a_{\overline{12}|}} \text{ at } \delta$$

$$=(¥200\times3.935+¥300\times3.935\times0.6065\ 3$$

$$+¥400\times1.813\times0.3678\ 79)\times\frac{1}{1.0517\ 09}\times0.1505\ 0$$

$$=\underline{¥253}$$

別解

$$\left(¥1,000\times\frac{1}{5}\cdot\frac{1-e^{-5\delta}}{\delta}+¥1,500\times\frac{1}{5}\cdot\frac{1-e^{-5\delta}}{\delta}\cdot e^{-5\delta}\right.$$

$$+ ¥800 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2\delta}}{\delta} \cdot e^{-10\delta} \Big) \cdot \frac{\delta}{1-e^{-12\delta}}$$

$$= \Big(¥200 \times \frac{1-0.6065\ 3}{0.1} + ¥300 \times \frac{1-0.6065\ 3}{0.1} \times 0.6065\ 3$$

$$+ ¥400 \times \frac{1-0.8187\ 3}{0.1} \times 0.3678\ 8 \Big) \times \frac{0.1}{1-0.3011\ 9}$$

$$= ¥253$$

6

さて，ここで δ あるいは連続払の仮定を反省してみる。

（1） EE において，連続払あるいは利力を用いるほど精密な計算が必要かどうか。

与えられた資料（収支金額と評価利率など）がそれに対応するだけの精密さをもっているかどうかが問題である。

Charles Christenson は，かつてこの点に関連して次のようなことをいったことがある。(11)

年払と連続払の誤差は

$$\left(\frac{0.43429\ i}{\log_{10}(1+i)} - 1 \right) \times 100\%$$

であり，i と δ との誤差は

$$\frac{e^i - 1}{i} \times 100\%$$

であって，いずれも僅かであるとして月 1 回払の年金現価率（すなわち $s_{\overline{1}|}^{(12)} a_{\overline{n}|}^{(16)}$ at i）を与えた。

また，N.A.A. は，計算方法を改善するよりは，高度の技術と細心の注意をもってこれら資料の見積りにあたるほうが，資本利益率の信頼度を高めるに役立つといっている。(12)

（2） ここでは数学的立場から δ を i により，また連続払を年払のままで近似計算を行なうことはできないかを考察する。

もし可能なりとすれば，連続支払と利率の瞬間切替との混乱も起る恐れもなく計算の精密化の要求にも合し，つごうがよいのではないか。

まず，δ と i との関係式は

$$i=\frac{\delta}{1!}+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\cdots\cdots \tag{13}$$

であるから，

$$i \doteqdot \delta+\frac{\delta^2}{2}$$

として前節における $\delta=10\%$ による計算は，$i=10.5\%$ で近似計算を行なうことができる。

〔**算例** 4〕〔算例 1〕~〔算例 3〕における各(1)の場合を $i=10.5\%$ で計算せよ。

(算例 1)

$$¥10,000\,v^5=¥10,000\times 0.6070\ 0=\underline{¥6,070} \tag{14}$$

(算例 2)

$$¥1,000\,a_{\overline{5|}}=¥1,000\times\frac{1-0.6070\ 0}{0.105}=¥1,000\times 3.7429$$

$$=\underline{¥3,743}$$

(算例 3)

$$(¥1,000+¥1,500\,v^5+¥800\,v^{10})\frac{1}{a_{\overline{12|}}}$$

$$=(¥1,000+¥1,500\times 0.6070\ 0+¥800\times 0.3684\ 5)\times\frac{0.105}{1-0.3017\ 5}$$

$$=\underline{¥332}$$

次に，連続支払は，年間中央時において一度に支払うものと考えれば，近似的に計算できるはずである。

〔**算例** 5〕〔算例 1〕~〔算例 3〕における各（2）at i の場合について，各年間中央時に支払うものとして計算せよ。

(算例 1)

$$¥10,000\,v^5(1+i)^{\frac{1}{2}}=¥10,000\times 0.6209\ 21\times 1.0488\ 09$$

$$=\underline{¥6,512}$$

(算例 2)

$$¥1,000\,a_{\overline{5|}}(1+i)^{\frac{1}{2}}=¥1,000\times 3.7907\ 87\times 1.0488\ 09$$

$$=\underline{¥3,976}$$

(算例 3)

$$\left\{¥1,000\times\frac{1}{5}a_{\overline{5}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}+¥1,500\times\frac{1}{5}\times a_{\overline{5}|}v^5(1+i)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+¥800\times\frac{1}{2}a_{\overline{2}|}v^{10}(1+i)^{\frac{1}{2}}\right\}\frac{1}{a_{\overline{12}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\{¥200\,a_{\overline{5}|}+¥300\,a_{\overline{5}|}v^5+¥400\,a_{\overline{2}|}v^{10}\}\times\frac{1}{a_{\overline{12}|}}$$

$$=\{¥200\times3.7907\ 87+¥300\times3.7907\ 87\times0.6209\ 21$$

$$+¥400\times1.7355\ 37\times0.3855\ 43\}\times0.1467\ 63$$

$$=\underline{¥254}$$

連続払を中央時点で一時に支払うと考えるときの誤差は，一般に次のようである。

$$v^n\bar{s}_{\overline{1}|}-v^n(1+i)^{\frac{1}{2}}\quad \text{at } i$$

$$=v^n\left[\frac{i}{\delta}-(1+i)^{\frac{1}{2}}\right]$$

また，

$$\bar{a}_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}\quad \text{at } i$$

$$=a_{\overline{n}|}\left[\frac{i}{\delta}-(1+i)^{\frac{1}{2}}\right]$$

であるから，

$$\frac{i}{\delta}-(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

を計算すると，

$$\frac{i}{i\left(1-\frac{1}{2}i+\frac{1}{3}i^2-\cdots\cdots\right)}-(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{1-i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i+\cdots\cdots\right)\right\}^{-1}-(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{1+i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i+\cdots\cdots\right)+i^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i+\cdots\cdots\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$-\left\{1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{8}i^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{12}i^2+\cdots\cdots\right\}-\left\{1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{8}i^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{24}i^2+\cdots\cdots$$

となるから，

$$v^n\bar{s}_{\overline{1}|}-v^n(1+i)^{\frac{1}{2}}\doteqdot\frac{1}{24}i^2v^n$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}\doteqdot\frac{1}{24}i^2a_{\overline{n}|}$$

である。

〔算例 6〕 〔算例 1〕～〔算例 3〕における各（2）at δ の場合について，各年間の中央時に支払うものとし，利率 $i=10.5\%$ で計算せよ。

（算例 1）

$$¥10,000\,v^5(1+i)^{\frac{1}{2}}=¥10,000\times0.6070\ 00\times1.0511\ 90$$

$$=\underline{¥6,381}$$

（算例 2）

$$¥1,000\,a_{\overline{5}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}=¥1,000\times\frac{1-0.6070\ 0}{0.105}\times1.0511\ 90$$

$$=\underline{¥3,934}$$

（算例 3）

$$\{¥200\,a_{\overline{5}|}+¥300\,a_{\overline{5}|}v^5+¥400\,a_{\overline{2}|}v^{10}\}\times(1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{a_{\overline{12}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\left\{¥200\,a_{\overline{5}|}+¥300\,a_{\overline{5}|}v^5+¥400\,a_{\overline{2}|}v^{10}\right\}\times\frac{1}{a_{\overline{12}|}}$$

$$=(¥200\times3.7429+¥300\times3.7429\times0.6070\ 00$$

$$+¥400\times\frac{1-0.8189\ 84}{0.105}\times0.3684\ 49)\times\frac{0.105}{1-0.3017\ 54}$$

$$=\underline{¥253}$$

δ による連続払を $i\doteqdot\delta+\frac{\delta^2}{2}$ によって中央時点に一度に支払うものと考えた誤差は，一般に次のようになる。

複利現価

$$\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-n\delta}-\left\{1+\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right\}^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1+\delta+\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{6}+\overset{(13)}{\cdots\cdots}-1}{\delta}\left\{1-n\delta+\frac{n^2\delta^2}{2}-\cdots\cdots\right\}-\left\{1+\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right\}^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{6}+\cdots\cdots\right)\left(1-n\delta+\frac{n^2\delta^2}{2}-\cdots\cdots\right)$$

$$-\left\{1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$=\left\{1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta+\frac{3n^2-3n+1}{6}\delta^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$-\left\{1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\delta^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{24}\delta^2+\cdots\ \fallingdotseq\frac{1}{24}\delta^2$$

年金現価

$$\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}-\frac{1-\left\{1+\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right\}^{-n}}{\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}\left\{1+\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1-\left\{1-n\delta+\frac{n^2\delta^2}{2}-\frac{n^3\delta^3}{6}+\cdots\cdots\right\}}{\delta}$$

$$-\frac{1-\left\{1-n\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\delta^3\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^3+\cdots\right.}{\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{2}\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)-\frac{1}{8}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\left\{n-\frac{n^2\delta}{2}+\frac{n^3\delta^2}{6}-\cdots\cdots\right\}-\left\{n-\frac{n(n+1)}{2}\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{2}\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)-\frac{1}{8}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=n\left[\left\{1-\frac{n\delta}{2}+\frac{n^2\delta^2}{6}-\cdots\cdots\right\}-\left\{1-\frac{n}{2}\delta+\frac{4n^2-1}{24}\delta^2-\cdots\cdots\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{24}\cdot n\delta^2+\cdots\cdots$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{24}\delta^2 n$$

〔算例 1〕～〔算例 6〕の計算値をまとめると，第 6-1 表のようであり，充分実用に供することができることがわかる。

支払 ＼ 算例 ＼ i, δ	期末払		連続払		中央時払	
	$\delta=10\%$	$i \doteqdot \delta+\frac{\delta^2}{2}$ 〔算例 4〕	$i=10\%$	$\delta=10\%$	$i=10\%$ 〔算例 5〕	$i \doteqdot \delta+\frac{\delta^2}{2}$ 〔算例 6〕
1	6,065	6,070	6,515	6,379	6,512	6,381
2	3,741	3,743	3,977	3,935	3,976	3,934
3	332	332	254	253	254	253

(第 6-1 表)

7

資本利益率を計算する場合には，一定の計算時点を基準にしなければならないが，一般にはプロジェクトにもとづく利益あるいは費用節約が最初に発生する年度を基準時点に採ることが多い。建設に時間がかかるため，この時点以前にプロジェクトについて若干の支出があるのがふつうである。この支出に対する利子は，プロジェクトが利益を生みだすときまで投下資本額に加算される。

〔算例 7〕 最初に ¥1,000,000 投資すれば，2か月後から最初の5年間に ¥1,500,000 次の5か年間に ¥1,000,000 の収益が予想される投資案の利益率を求めよ。

(解)

(1) 投資は定点支出，収益は連続収入と考え，利力により計算基準時点を投資2か月経過時とする。

$$1,000,000e^{\frac{2}{12}\delta}=\left(¥1,500,000\times\frac{1}{5}\bar{a}_{\overline{5}|}+¥1,000,000\times\frac{1}{5}\times\bar{a}_{\overline{5}|}\,e^{-5\delta}\right)\quad \text{at } \delta$$

両辺はそれぞれ既述の方法で計算できるが，ここにはこれを変形して

$$e^{\frac{2}{12}\delta}=1.5\times\frac{1}{5}\bar{s}_{\overline{5}|}\,e^{-5\delta}+\frac{1}{5}\bar{s}_{\overline{5}|}\,e^{-10\delta}$$

とし，左辺には Dean の A 表，右辺には同 E 表を利用して試算しよう。

(注) Dean[3] のA表およびE表の内容は次のようである。

A表 $e^{n\delta}$ $\delta=1(1)100$ $n=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)\frac{3}{12}\left(\frac{1}{4}\right)1\left(\frac{1}{2}\right)3$

E表 $\frac{1}{5}\bar{s}_{\overline{5}|}e^{-5\delta}$, $\frac{1}{5}\bar{s}_{\overline{5}|}e^{-10\delta}$, $\cdots$ at δ

$\delta=24\%$ のとき

左辺$=1.0408$

右辺$=1.5\times 0.5823+0.1754=1.0488\ 5$

左辺−右辺$=-0.0080\ 5$

$\delta=25\%$ のとき

左辺$=1.0425$

右辺$=1.5\times 0.5708+0.1635=1.0197$

左辺−右辺$=0.0228$

この2つの値から，一次補間法によって，

$$24\%+\frac{-0.00805-0}{-0.00805-0.0228}\times 1\%=\underline{24.3\%}$$

(2) 投資は定点支出，収益は毎年の中央時点収入と考え，i による。

100 万円単位で計算する。

$$(1+i)^{\frac{2}{12}}=1.5\times\frac{1}{5}a_{\overline{5}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}a_{\overline{5}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}v^5$$

$$=a_{\overline{5}|}(1+i)^{\frac{1}{2}}\left(0.3+\frac{1}{5}v^5\right)$$

$(1+i)^{\frac{1}{p}}$ の高利率のものはないが，平方根表を利用すれば簡単である。[15]

$i=27\%$ のとき

左辺$=1.0406\ 4$

右辺$=2.5826\ 7\times 1.1269\ 4\times\left(0.3+\frac{1}{5}\times 0.3026\ 8\right)=1.0493\ 5$

左辺−右辺$=-0.0087\ 1$

$i=28\%$ のとき

左辺$=1.0420\ 0$

右辺$=2.5320\ 1\times 1.1313\ 7\times\left(0.3+\frac{1}{5}\times 0.2910\ 4\right)=1.0261\ 4$

左辺−右辺$=0.0158\ 6$

この2つの値から，一次補間法によって，

$\underline{27.4\%}$

を得る。

(注) $i=27.4\%$ を δ になおすと,

$$\delta=\log_e(1+0.274)=2.3025\ 85\log_{10}(1+0.274)=0.2422$$

となる。

また，参考に，収益を年 12 回払と考え，i によるものを求めると，次のようである。

$$(1+i)^{\frac{2}{12}}=1.5\times\frac{1}{5}s_{\overline{1|}}^{(12)}a_{\overline{5|}}+\frac{1}{5}s_{\overline{1|}}^{(12)}a_{\overline{5|}}v^5$$

$$=s_{\overline{1|}}^{(12)}a_{\overline{5|}}\text{ [16] }\times\left(0.3+\frac{1}{5}v^5\right)$$

$i=26\%$ のとき

左辺$=1.0392\ 7$

右辺$=2.936\times\left(0.3+\frac{1}{5}\times0.3148\ 8\right)=1.0657\ 0$

左辺−右辺$=-0.0264\ 3$

$i=28\%$ のとき

左辺$=1.0420\ 0$

右辺$=2.842\times\left(0.3+\frac{1}{5}\times0.2910\ 4\right)=1.0180\ 3$

左辺−右辺$=0.0239\ 7$

この 2 つの値から，一次補間法によって,

<u>27.0%</u>

を得る。

注 (1) Grant, E. L. & Ireson, W. G.: Principles of Engineering Economy 4/e Revised Printing '64 Appendix B p. 494

(2) 加藤国一郎稿: 新刊批評 商業数学会誌 第 14 号 昭和 40・3 参照。なお，注 3, 注 10 を参照せられたい。

(3) Grant: 前掲書

Appendixes E Table 25 (ただし，同表の表題は，Present Worth at zero date of $ 1 Flowing *Uniformly* throughout stated one-year periods, assuming *Continuous Compounding of Interest* of various stated effective rates per annum となっていて甚だ紛らわしいが，内容は

$$\bar{s}_{\overline{1|}}\cdot v^n \text{ at } i=\frac{1-v^n}{\delta}$$

である。)

Reul, R. I.: Profitability Index for Investment, Harvard Business Review, July-Aug. '57

$\delta=10\%,\ 15\%,\ 25\%,\ 40\% \qquad n=1\sim30$

(秦　恒雄:　設備更新の経済理論　pp. 217/21

野沢孝之助稿:　設備更新の一つの理論　教科研究　昭和 34・5

村川武雄:　設備投資の経済計算とその理論　pp. 159/63

ただし，村川 p. 162 の表中，$r=0.4$　$n=1$ の DF は Reul を誤って転載していることに注意)

Joel Dean Associates:　Interest Tables for determining Rate of Return by the Discounted Cash Flow Method D 表 (染谷恭次郎監訳:　経営指標としての資本利益率 pp. 117/20 には，Gregory, J. G. が作成した Dean 表の A～F の一部に当るものが掲載されている。多分この方が先でもあろうか。)

〔301〕,〔401〕を積分で示すと

$$\int_{n-1}^{n}(1+i)^{-t}\,dt=-\frac{1}{\log_e(1+i)}\Big[(1+i)^{-t}\Big]_{n-1}^{n}$$

$$=-\frac{1}{\log_e(1+i)}(1+i)^{-n}[1-(1+i)]$$

$$=\frac{i}{\log_e(1+i)}\cdot(1+i)^{-n}$$

$$\int_{n-1}^{n}e^{-\delta t}\,dt=-\frac{1}{\delta}\Big[e^{-\delta t}\Big]_{n-1}^{n}$$

$$=-\frac{1}{\delta}\left[e^{-n\delta}-e^{-(n-1)\delta}\right]$$

$$=\frac{e^{-n\delta}}{\delta}[e^{\delta}-1]$$

であって，また，

$$\int_{n-1}^{n}(1+i)^{-t}dt=\int_{0}^{n}(1+i)^{-t}dt-\int_{0}^{n-1}(1+i)^{-t}\,dt$$

$$\int_{n-1}^{n}e^{-\delta t}\,dt=\int_{0}^{n}e^{-\delta t}\,dt-\int_{0}^{n-1}e^{-\delta t}\,dt$$

である。

従って，〔301〕,〔401〕は〔302〕,〔402〕から簡単に求めることができる。

(4)　(CRF-i%-n) の記号を用いることもある。

(5)　一般に EE では，有効数字 3 桁もあれば充分であるとされている。

Bullinger, C. E.:　Engineering Economy '58 p. 332

Grant:　前掲書 pp. 53/4

(6)　丸善対数表 (7 桁) には，指数関数表も掲げられている。

指数関数表の詳細なものには，

National Bureau of Standards:　Tables of the Exponential Function e^x '51

がある。

(7)　Malta, A.:　Nouvelles Tables Financières tome 1 '63

$\dfrac{i}{j_{(m)}}$ 表の $m=\infty$ の場合が $\bar{s}_{\overline{1|}}$ である。($i=0.05$ (0.05) 21.65% 小数8桁)

(8) Malta 前掲表の $\dfrac{j_{(m)}}{i}$ 表において $m=\infty$ は $\dfrac{1}{\bar{s}_{\overline{1|}}}$ となる。

(9) Taylor では，$\dfrac{e^{rn}-1}{re^{rn}}$ の式で〔302〕式の計算値を与えている。

$\dfrac{e^{rn}-1}{re^{rn}}=\dfrac{1-e^{-rn}}{r}$ で $\bar{a}_{\overline{n|}}$ at δ ($r=\delta$) となる筈であるから同書の式は誤りであろう。(同書 p. 462 参照)

同様に〔303〕式に当るものについても誤りがある。

(10) Thuesen 前掲書 p. 509 Table D 20

ただし，同書は δ を φ とし，% 単位で表示している点および式に誤植のあることに注意。

(11) Christenson, C.: Construction of Present Value Tables for use in Evaluating Capital Investment Opportunities, The Accounting Review Oct. '55

(12) 染谷恭次郎監訳: 経営指標としての資本利益率 p. 116 (N. A. A.: Return on Capital as a Guide to Managerial Decisions no. 35, '59)

(13) たとえば，野沢孝之助: 利回りを中心とした商業数学 p. 70 参照

(14) 以下 $i=10.5\%$ の数表は，Malta 前掲表による。

(15) 丸善対数表 (前掲) にある。

(16) $\overset{(12)}{s_{\overline{1|}}}\,a_{\overline{n|}}$ 表は Anthony の D 表を利用することができる。

(本表は Charles Christenson: 前掲稿に与えられているが，次書にも掲載されている。)

木内佳市・長浜穆良訳編: アントニー管理会計

〔Anthony, R. N.: Management Accounting '59〕

なお，Anthony には，$\overset{(12)}{s_{\overline{1|}}}\,v^n$ を $i=1$, 2(2)30, 15, 25, 35(5)50 $n=1$(1)30 (10)50 小数3桁 与えている。

*

(本稿は日本商業数学会第25回関東部会で報告したものに加筆したものである。昭和 43・7・23 稿)