会計数理の基本公式

── Hoskold 公式の拡張 ──

野沢孝之助

経営数学書において，

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+P(1+i)^n$$

の式を中心に会計数理を説明するものを散見する。本論はこれを現価式に改め，より一般化して

$$P=\sum_{t=1}^{n}R_t[g(t)]^{-1}+S[f(n)]^{-1}$$

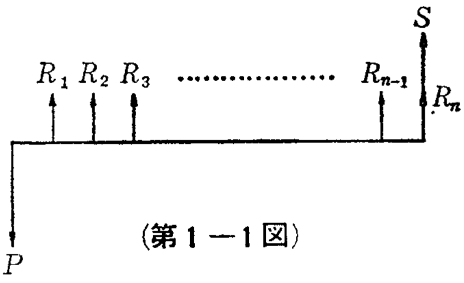
を会計数理の基本公式としようとの試論である。

基本公式が確立すれば，それから誘導により各公式がえられることはいうまでもない。しかし，それにもまして各公式間の関連が明確になり，また，必要によって従来の公式を拡張することも可能であることがメリットであろう。公式拡張の1例としてHoskold 公式について論究した。

本論は単利法にも一部用いることができるが，以下は複利法に限定する。

1

現在Pを投ずると，各年末 $R_t(t=1,2,\ldots,n)$ の収益がn年間えられるとともに，n年後にSの収入があるものとする。これを図示すると，次のようである。



（第１－１図）

（注）　矢印の下向きは支出，上向きは収入を示す。[1]

いま，R_t においては t 年後の１の現在価値すなわち現価が $[g(t)]^{-1}$，S においては同様に $[f(t)]^{-1}$ であるとすれば，次式をうる。

$$P=\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}+S[f(n)]^{-1} \qquad [100]$$

以下，本式から種々の諸公式を導いてみよう。

（1）　R_t が常に R と一定の場合

（a）　$g(t)=f(t)=(1+i)^t$ のとき，[100] 式は

$$P=R\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}+S(1+i)^{-n}$$

となり，

$$R\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=R\{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-n}\}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=R\cdot a_{\overline{n}|}$$ [2]

であるから，次式のようになる。

$$P=R\cdot a_{\overline{n}|}+S(1+i)^{-n} \qquad [101]$$ [3]

本式は，ふつうの場合における複利の基本公式ということができる。

a_1)　$R=0$

$$P=S(1+i)^{-n} \qquad [102]$$

a_2)　$S=0$

$$P=R\cdot a_{\overline{n}|} \qquad [103]$$

$$R=P\cdot\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \qquad [104]$$

据置年金の現価を求めたいときは，$\sum$ の範囲を考慮すればよい。

a_3) 終価系[4]の公式を求めたいときは，[101] 式において，

$$P\to(-S),\quad (-n)\to n,\quad S\to(-P)$$

のおきかえを行なえばよい。[5]

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+P(1+i)^n$$

$$=R\cdot S_{\overline{n}|}+P(1+i)^n \qquad [105]$$

$R=0$

$$S=P(1+i)^n \qquad [106]$$

$P=0$

$$S=R\cdot S_{\overline{n}|} \qquad [107]$$

$$R=S\cdot\frac{1}{S_{\overline{n}|}}=S\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}}-i\right) \qquad [108]^{6)}$$

ここでは変換式 [105] において，$R=0$ あるいは $P=0$ として [106]～[108] 式を求めたが，[102]～[104] 式から直接変換してもよい。

期首払の年金価格は $\sum_{t=0}^{n-1}$ とすればよい。

a_4) [101] 式において，$P=A$, $R=Cg$, $S=C$ とすれば，次の債券価格公式をうる。

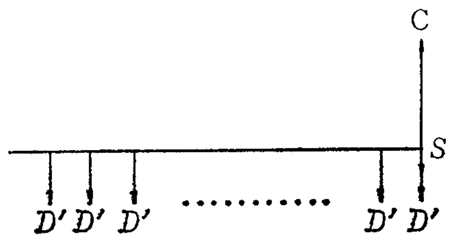
$$A=Cg\cdot a_{\overline{n}|}+C(1+i)^{-n} \qquad [111]$$

また，$P=C, R=D$ とすれば，次の減価償却の年金法公式をうる。

$$D=\{C-S(1+i)^{-n}\}\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

$$=(C-S)\frac{1}{a_{\overline{n}|}}+Si \qquad [112]$$

また，$P=0$, $R=D'$, $S=-(C-S)$ のときは次図のようであって，



(第1―2図)

（注）$R[=D']$ と $S[=(C-S)]$ が，第1-1図と収支反対となるので，S を負数とする。

$$D'=(C-S)\frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

$$=(C-S)\frac{1}{a_{\overline{n}|}}+Si-Ci \qquad [113]^{7)}$$

これは償却基金法の公式である。

(b)　$g(t)=(1+r)^t$，$f(t)=(1+i)^t$ のとき，[101] 式を改変して，

$$P=R\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}+S(1+i)^{-n}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|r}+S(1+i)^{-n} \qquad [121]^{8)}$$

これが2個の利率を用いる複利の場合の基本公式である。

本式を終価になおすと，

$$S=R\cdot S_{\overline{n}|r}+P(1+i)^n \qquad [122]$$

となる。

b_1)　定期払利息

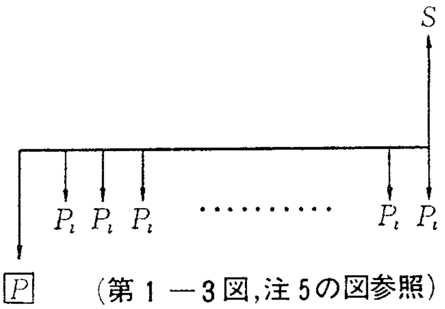
定期払利息はPを複利利殖する代わりに，毎年末 Pi の利息が支払われPはそのまま残るから，[122] 式において，$R=Pi$，$P(1+i)^n=P$ とする。

$$S=Pi\cdot S_{\overline{n}|r}+P$$

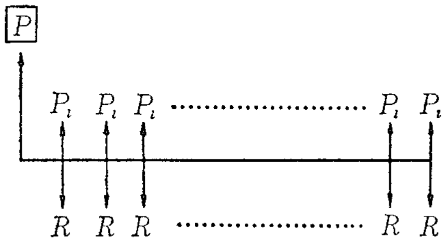
$$S=P\{1+i\cdot S_{\overline{n}|r}\} \qquad [123]$$

b_2)　報酬利率 (i) と蓄積利率 (r) を用いる負債償還と資産価格

[122] 式において，$R=-(R-Pi)$，$P(1+i)^n=P$ とする。



(第1－3図,注5の図参照)



(第1－4図)

$$R=P\left\{\frac{1}{S_{\overline{n}|r}}+i\right\}=P\left\{\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r+i\right\} \qquad [124]$$

$$P=\frac{R}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|r}}+i}=\frac{R}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r+i} \qquad [125]$$

[124] 式は年利 i の負債 P を毎年末利息 Pi を支払うとともに，$P\cdot\dfrac{1}{S_{\overline{n}|r}}$ の賦金を利率 r で積立てて償還する場合の公式であり，[125] 式はいわゆる Hoskold の公式である。Hoskold 公式は，[123] 式において，$S=R\cdot S_{\overline{n}|r}$ としても求めることもできる。また，$S\neq 0$ とすれば残価のある場合の Hoskold 公式がえられる[9]。

（2） R_t が t によって異なる場合には，R_t 個々について計算するほかはない。しかし，R_{t-1} と R_t との間に一定の関係がある場合には速算法がある。たとえば，次例のようである。(ただし，$g(t)=f(t)=(1+i)^t$ とする)

（a） $R_t=R_1+(t-1)D$ の場合，[100] 式において

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1} \doteqdot R_1(1+i)^{-1}+(R_1+D)(1+i)^{-2}+\cdots$$
$$+\{R_1+(n-1)D\}(1+i)^{-n}$$
$$=R_1\cdot a_{\overline{n}|}+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}$$ [10)]

であるから，次式のようになる。

$$P=R_1 a_{\overline{n}|}+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}+S(1+i)^{-n} \qquad [131]$$

(b) $R_t=R_1(1+g)^{t-1}$ の場合，[100] 式において

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+i)^{-n}}{i-g} \qquad \text{ただし，} i\neq g$$
$$=R_1(1+g)^{-1}\frac{1-\left(1+\dfrac{i-g}{1+g}\right)^{-n}}{\dfrac{i-g}{1+g}}$$
$$=R_1(1+g)^{-1}a_{\overline{n}|k} \qquad \text{ただし，} k=\frac{i-g}{1+g}$$

であるから，次式のようになる。

$$P=R_1(1+g)^{-1}a_{\overline{n}|k}+S(1+i)^{-n} \qquad [132]$$
$$\text{ただし，} k=\frac{i-g}{1+g},\ i\neq g$$

[131]，[132] 式において，$S=0$ とおけば，ある種の変額年金現価の公式である。また，現価式から変額年金による賦金を求めることもできる。(D, g は正負いずれでもよい。ただし，制約はある。)

なお，$g(t)=(1+r)^t$，$f(t)=(1+i)^t$ のとき [131]，[132] 式に対応する式を求めると，

$$P=R_1\cdot a_{\overline{n}|r}+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|r}-n(1+r)^{-n}}{r}+S(1+i)^{-n} \qquad [141]$$

$$P=R_1(1+g)^{-1}a_{\overline{n}|k'}+S(1+i)^{-n} \qquad [142]$$

$$\text{ただし，}\ k'=\frac{r-g}{1+g},\ r\neq g$$

これらを終価系になおす[11)]と，

$$S=R_1\cdot S_{\overline{n}|r}+D\cdot\frac{S_{\overline{n}|r}-n}{r}+P(1+i)^n \quad [143]$$

$$S=R_1(1+g)^{-1}S_{\overline{n}|k'}+P(1+i)^n \quad [144]$$

$$\text{ただし，}\ k'=\frac{r-g}{1+g},\ r\neq g$$

となる。

これらの式において，$R_1=-(R_1-Pi)$，$D=-D$，$P(1+i)^n=P$
$S=0$，とおくと，

$$P=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-\dfrac{n}{S_{\overline{n}|r}}}{r}}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|r}}+i}=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-n\left(\dfrac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r\right)}{r}}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r+i} \quad [145]$$

$$P=\frac{R_1}{(1+g)\dfrac{1}{S_{\overline{n}|k'}}+i} \quad [146]$$

$$\text{ただし，}\ k'=\frac{r-g}{1+g},\ r\neq g$$

となる。

[145]，[146] 式は収益が変額するある種の場合の Hoskold 公式であって，ふつうの Hoskold 公式の拡張ということができる。

2

利率に瞬間切替のものすなわち利力[12)]を用いる場合について次に考察する。

(1)　R_t が常にRと一定の場合

(a)　$g(t)=f(t)=e^{\delta t}$ のとき，[100] 式は

$$P=R\sum_{t=1}^{n}e^{-\delta t}+Se^{-\delta n}=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}+Se^{-\delta n}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta+Se^{-\delta n} \quad \text{13)} \qquad [201]$$

となる。

本式は，利力を用いる複利の場合における基本公式である。

a_1) $R=0$

$$P=Se^{-\delta n} \qquad [202]$$

a_2) $S=0$

$$P=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=R\cdot a_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta \qquad [203]$$

$$R=P\cdot\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-\delta n}}=P\cdot\frac{1}{a_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta} \qquad [204]$$

a_3) 終価系の公式に変換すると，次のようである。

$$S=R\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}+Pe^{\delta n} \qquad [205]$$

$$P=Se^{\delta n} \qquad [206]$$

$$S=R\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}=R\cdot S_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta \qquad [207]$$

$$R=S\cdot\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta n}-1}=S\cdot\frac{1}{S_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta}$$

$$=S\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta}-e^{\delta}+1\right) \qquad [208]$$

必要があれば，[111]～[113] に対応する諸公式を求めることができる。

(b) $g(t)=e^{\delta' t}$, $f(t)=e^{\delta t}$ のとき

$$P=R\cdot a_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta'+Se^{-\delta n} \qquad [221]$$

[205] 式を改変して

$$S=R\cdot\frac{e^{\delta' n}-1}{e^{\delta'}-1}+Pe^{\delta n}=R\cdot S_{\overline{n|}}\ \mathrm{at}\ \delta'+Pe^{\delta n} \qquad [222]$$

ここで，$R=-\{R-P(e^{\delta}-1)\}$，$Pe^{\delta n}=P$，$S=0$，とすると，次式をうる。

$$P=\frac{R}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}+e^{\delta}-1}=\frac{R}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-e^{\delta'}+e^{\delta}} \qquad [225]$$

これは Hoskold 公式の拡張されたものである。

(2) R_t が t によって異なるが，R_{t-1} と R_t との間には一定の関係がある場合（ただし，$g(t)=f(t)=e^{\delta t}$ のとき）

(a) $R_t=R_1+(t-1)D$ の場合，[100] 式において

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1e^{-\delta}+(R_1+D)e^{-2\delta}+\cdots+\{R_1+(n-1)D\}e^{-\delta n}$$

$$=R_1\cdot a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$$

であるから，次式のようになる。

$$P=R_1\cdot a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}+Se^{-\delta n} \qquad [231]$$

(b) $R_t=R_1(1+g)^{t-1}$ の場合，[100] 式において

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1(1+g)^{-1}\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{e^{\delta}-1-g}{1+g}\right)^{-n}}{\dfrac{e^{\delta}-1-g}{1+g}}$$

$$=R_1(1+g)^{-1}a_{\overline{n}|h}$$

$$\text{ただし，}\quad h=\frac{e^{\delta}-1-g}{1+g},\quad e^{\delta}-1\neq g$$

であるから，次式のようになる。

$$P=R_1(1+g)^{-1}a_{\overline{n}|h}+Se^{-\delta n} \qquad [232]$$

$$\text{ただし，}\quad h=\frac{e^{\delta}-1-g}{1+g},\quad e^{\delta}-1\neq g$$

[231]，[232] 式において，$S=0$ とおけば，ある種の変額年金現価の公式である。

なお，$g(t)=e^{\delta' t}$，$f(t)=e^{\delta}$ のときの [231]，[232] 式に対応する式を求め，終価系になおすと，

$$S=R_1\cdot S_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'+D\cdot\frac{S_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'-n}{e^{\delta'}-1}+Pe^{\delta n} \qquad [243]$$

$$S=R_1(1+g)^{-1}S_{\overline{n}|h'}+Pe^{\delta n} \qquad [244]$$

ただし，$h'=\dfrac{e^{\delta'}-1-g}{1+g}$，$e^{\delta'}-1\fallingdotseq g$

これらの式において，$R_1=-\{R_1-P(e^{\delta}-1)\}$，$D=-D$，$Pe^{\delta n}=P$，$S=0$，とおくと，

$$P=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-\dfrac{n}{S_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}}{e^{\delta'}-1}}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}+e^{\delta}-1}=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-n\left(\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-\delta'\right)}{e^{\delta'}-1}}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-e^{\delta'}+e^{\delta}} \qquad [245]$$

$$P=\frac{R_1}{(1+g)\dfrac{1}{S_{\overline{n}|h'}}+e^{\delta}-1} \qquad [246]$$

ただし，$h'=\dfrac{e^{\delta'}-1-g}{1+g}$，$e^{\delta'}-1\fallingdotseq g$

となる。

[245]，[246] 式は収益が変額するある種の場合の Hoskold 公式であって，ふつうの Hoskold 公式の拡張である。

3

いままでの諸公式は R_t が t 年末というように定点ごとに受払いされる場合であったが，これを瞬間ごとに受払いすなわち連続受払いされる場合について考えてみよう。

Grant は年末仮定を end-of-year convention，連続仮定を uniform-flow convention と呼んでいることについてはすでに触れたことがある[14)]。

公式 [100] において，$\sum$ を $\int$ に取りかえて次式をうる。

$$P=\int_0^n R_t[g(t)]^{-1}dt+S[f(n)]^{-1} \qquad [300]$$

(1) R_t が常に R と一定の場合

(a) $g(t)=f(t)=(1+i)^t$ のとき，[300] 式は

$$P=R\int_0^n (1+i)^{-t}dt+S(1+i)^{-n}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}+S(1+i)^{-n}$$

$$=R\cdot\bar{a}_{\overline{n|}}+S(1+i)^{-n} \qquad [301]^{15)}$$

これが連続払の利率 i における複利の基本公式である。

a_1) $R=0$ のとき [102]，[106] 式と一致する。

a_2) $S=0$ のとき

$$P=R\cdot\bar{a}_{\overline{n|}} \qquad [303]$$

$$R=P\cdot\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}} \qquad [304]$$

a_3) 終価系に変換すると，次のようになる。

$$S=R\cdot\bar{S}_{\overline{n|}} \qquad [307]$$

$$R=S\cdot\frac{1}{\bar{S}_{\overline{n|}}}=S\left(\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}}-\delta\right) \qquad [308]$$

(b) $g=1+r$，$f=1+i$ のとき

$$P=R\cdot\bar{a}_{\overline{n|}r}+S(1+i)^{-n} \qquad [321]$$

[125] 式に対応する式を求めると，次のようである。

$$P=\frac{R}{\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}r}}-\delta'+i} \qquad [325]$$

これは Hoskold 公式の拡張である。

(2) R_t が年によって異なるが，R_{t-1} と R_t との間には一定の関係がある場合（ただし，$g(t)=f(t)=(1+i)^t$ のとき）

(*a*) $R_t=R_1+(t-1)D$ の場合，[300] 式は

$$P=\int_0^n \{R_1+(t-1)D\}(1+i)^{-t}dt+S(1+i)^{-n}$$

で，

$$\int_0^n \{R_1+(t-1)D\}(1+i)^{-t}dt=(R_1-D)\int_0^n (1+i)^{-t}dt+D\int_0^n t(1+i)^{-t}dt$$

$$=(R_1-D)\frac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}+D\cdot\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}-n(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}$$ [16)

$$=R_1\bar{a}_{\overline{n}|}+D\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}(1-\delta)-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

であるから，

$$P=R_1\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}+D\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}(1-\delta)-n(1+i)^{-n}}{\delta}+S(1+i)^{-n} \quad [331]$$

(*b*) $R_t=R_1(1+g)^{t-1}$ の場合，[300] 式は

$$P=\int_0^n R_1(1+g)^{t-1}(1+i)^{-t}dt+S(1+i)^{-n}$$

で，

$$\int_0^n R_1(1+g)^{t-1}(1+i)^{-t}dt=R_1(1+g)^{-1}\int_0^n\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^{-t}dt$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\left[-\frac{1}{\log_e\left(\dfrac{1+i}{1+g}\right)}\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^{-t}\right]_0^n$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\frac{1-\left(\dfrac{1+i}{1+g}\right)^{-n}}{\log_e\left(\dfrac{1+i}{1+g}\right)}$$

であるから，

$$P=R_1(1+g)^{-1}\frac{1-\left(\dfrac{1+i}{1+g}\right)^{-n}}{\log_e\left(\dfrac{1+i}{1+g}\right)}+S(1+i)^{-n}$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\bar{a}_{\overline{n}|k}+S(1+i)^{-n} \qquad [332]$$

$$\text{ただし，}\ k=\frac{i-g}{1+g},\ i\neq g$$

[331]，[332] 式において，$S=0$ とおけば，ある種の変額年金現価公式の拡張式がえられる。

なお，$g(t)=(1+r)^t$，$f(t)=(1+i)^t$ のときの [331]，[332] 式に対応する式を求め，終価系になおすと，

$$S=R_1\cdot\bar{S}_{\overline{n}|r}+D\cdot\frac{\bar{S}_{\overline{n}|r}(1-\delta')-n}{\delta'}+P(1+i)^n \qquad [343]$$

$$S=R_1(1+g)^{-1}\bar{S}_{\overline{n}|k'}+P(1+i)^n \qquad [344]$$

$$\text{ただし，}\ k'=\frac{r-g}{1+g},\ r\neq g$$

これらの式において，

$R_1=-(R_1-Pi)$，$D=-D$，$P(1+i)^n=P$，$S=0$ とすると，

$$P=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-\delta'-\dfrac{n}{\bar{S}_{\overline{n}|r}}}{\delta'}}{\dfrac{1}{\bar{S}_{\overline{n}|r}}+i}=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-\delta'-n\left(\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|r}}-\delta'\right)}{\delta'}}{\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|r}}-\delta'+i} \qquad [345]$$

$$P=\frac{R_1}{(1+g)\dfrac{1}{S_{\overline{n}|k'}}+i} \qquad [346]$$

$$\text{ただし，}\ k'=\frac{r-g}{1+g},\ r\neq g$$

となる。

[345]，[346] 式は収益が変額するある種の場合の Hoskold 公式であって，ふつうの Hoskold 公式の拡張である。

4

連続受払の場合において利力を用いるとどのようになるかを次に考察する。

(1) R_t が常にRと一定の場合

(a) $g(t)=f(t)=e^{\delta t}$ のとき，[300] 式は

$$P=R\int_0^n e^{-\delta t}dt+Se^{-\delta n}$$ 17)

$$=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+Se^{-\delta n}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta+Se^{-\delta n} \qquad [401]$$

[401] 式は連続受払の場合に利力を用いるときの基本公式である。

a_1) $R=0$ のとき [202]，[206] 式と一致する。

a_2) $S=0$ のとき

$$P=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta \qquad [403]$$

$$R=P\cdot\frac{\delta}{1-e^{-\delta n}}=R\cdot\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta} \qquad [404]$$

a_3) 終価系の公式に変換すると，次のようになる。

$$S=R\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}=R\cdot\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta \qquad [407]$$

$$R=S\cdot\frac{\delta}{e^{\delta n}-1}=S\cdot\frac{1}{\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta}=S\left(\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta}-\delta\right) \qquad [408]$$

(b) $g(t)=e^{\delta' t}$，$f(t)=e^{\delta t}$ のとき

$$P=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'+Se^{-\delta n} \qquad [421]$$

[325] に対応する公式を求めると次のようになる。

$$P=\frac{R}{\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-\delta'+e^{\delta}-1} \qquad [425]$$

これは Hoskold の拡張公式である。

（2） R_t が年によって異なるが，R_{t-1} と R_t との間には一定の関係がある場合（ただし，$g(t)=f(t)=e^{\delta t}$ のとき）

（a） $R_t=R_1+(t-1)D$ の場合，[300] 式は

$$P=\int_0^n \{R_1+(t-1)D\}e^{-\delta t}dt+Se^{-\delta n}$$

で

$$\int_0^n \{R_1+(t-1)D\}e^{-\delta t}dt=(R_1-D)\int_0^n e^{-\delta t}dt+D\int_0^n te^{-\delta t}dt \quad {}^{18)}$$

$$=(R_1-D)\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+D\cdot\frac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

あるから，

$$P=R_1\cdot\bar{a}_{\overline{n|}}\text{ at }+\delta D\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n|}}\text{ at }\delta(1-\delta)-ne^{-\delta n}}{\delta}+Se^{-\delta n} \qquad [431]$$

（b） $R_t=R_1(1+g)^{t-1}$ の場合，[300] 式は

$$P=\int_0^n R_1(1+g)^{t-1}e^{-\delta t}dt+Se^{-\delta n}$$

で

$$\int_0^n R_1(1+g)^{t-1}e^{-\delta t}dt=R_1(1+g)^{-1}\int_0^n\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{-t}dt \quad {}^{19)}$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\frac{1-\left(\dfrac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{-n}}{\log_e\left(\dfrac{e^{\delta}}{1+g}\right)}$$

であるから

$$P=R_1(1+g)^{-1}\frac{1-\left(\dfrac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{n}}{\log_e\left(\dfrac{e^{\delta}}{1+g}\right)}+Se^{-\delta n}$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\bar{a}_{\overline{n|}h}+Se^{-\delta n} \qquad [432]$$

ただし，$h=\dfrac{e^{\delta}-1-g}{1+g}$，　$e^{\delta}-1\fallingdotseq g$

[431], [432] 式において，$S=0$ とおけば，ある種の変額年金現価公式の拡張式がえられる。

なお，$g(t)=e^{\delta' t}$，$f(t)=e^{\delta t}$ のときの [431], [432] 式に対応する式を求め，終価系になおすと，

$$S=R_1\cdot\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'+D\cdot\frac{\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'(1-\delta')-n}{\delta'}+Pe^{\delta n} \qquad [443]$$

$$S=R_1(1+g)^{-1}\frac{\left(\dfrac{e^{\delta'}}{1+g}\right)^n-1}{\log_e\left(\dfrac{e^{\delta'}}{1+g}\right)}+Pe^{\delta n}$$

$$=R_1(1+g)^{-1}\bar{S}_{\overline{n}|h'}+Pe^{\delta n} \qquad [444]$$

$$\text{ただし}\,h'=\frac{e^{\delta'}-1-g}{1+g},\quad e^{\delta'}-1\fallingdotseq g$$

これらの式において，$R_1=-\{R_1-P(e^{\delta}-1)\}$，$D=-D$，$Pe^{\delta n}=P$，$S=0$ とすると，

$$P=\frac{R_1+D\cdot\dfrac{1-\delta'-\dfrac{n}{\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}}{\delta'}}{\dfrac{1}{\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}+e^{\delta}-1}$$

$$=R_1+D\cdot\frac{1-\delta'-n\left(\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-\delta'\right)}{\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta'}-\delta'+e^{\delta}-1} \qquad [445]$$

$$P=\frac{R_1}{(1+g)\dfrac{1}{\bar{S}_{\overline{n}|h'}}+e^{\delta}-1} \qquad [446]$$

$$\text{ただし，}\,h'=\frac{e^{\delta'}-1-g}{1+g},\quad e^{\delta'}-1\fallingdotseq g$$

となる。

[445], [446] 式は収益が変額するある種の場合の Hoskold 公式の拡張式をうる。

5

いままでの論述によると，［100］式と［300］式を基本公式ということができるであろう。しかし，なお考察をすすめると，以下のように［100］式にまとめることができる。考察を簡明にするため，$R_t=R$ と常に一定とする。

さて［100］式における R において，年 p 回払，年 m 回転化の利率 $j'_{(m)}$（注12参照）による場合を考える。

この場合は受払期1期を単位として

$$R=\frac{R}{p},\quad n=np,\quad g(t)=\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}\cdot t}$$

とし，S については $j_{(m)}$ を適用すると，$f(n)=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{mn}$ となるからこれらをおきかえると，

$$P=\frac{R}{p}\sum_{t=1}^{np}\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$=\frac{1-\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn} \qquad [500]$$

となる。

（1） $m=1$ のとき，$j'_{(m)}=r$，$j_{(m)}=i$ とする。

$$P=R\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1\}}+S(1+i)^{-n} \qquad [501]^{20)}$$

$$=R\cdot S^{(p)}_{\overline{1}|r}\cdot a_{\overline{n}|r}+S(1+i)^{-n}$$

［501］式で，$p=1$ とすると［121］式，$p\to\infty$ とすると［321］式をうる[21)]。

（2） $p=1$ のとき

$$P=R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{m}-1}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$=R\cdot\frac{a_{\overline{mn}|\frac{j'_{(m)}}{m}}}{S_{\overline{m}|\frac{j'_{(m)}}{m}}}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn} \qquad [502]$$

$p\to\infty$ のとき

$$P=R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{m\log_e\left(1+\frac{j'_{(m)}}{m}\right)}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot\bar{a}_{\overline{mn}|\frac{j'_{(m)}}{m}}+S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn} \qquad [503]$$

（3）　$m\to\infty$ のとき

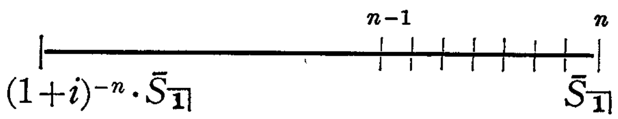
$$P=R\cdot\frac{1-e^{-\delta' n}}{p(e^{\frac{\delta'}{p}}-1)}+Se^{-\delta n} \qquad [504]$$

[504] 式で $p=1$ とすると [221] 式，$P\to\infty$ とすると [421] 式をうる。これらの諸公式において，$R=0$ とすれば複利現価，$S=0$ とすれば年金現価をえられることは明らかであり，また，終価系の公式に変換することも可能である。

6

（1）　特殊な連続年金現価

n 年首から1か年にわたって1が連続支払われるものの現価を考える。



（第 6-1 図）

公式 [300] において，$R_t=1$，$g(t)=(1+i)^t$，$S=0$ とし，$\int$ の範囲に注意して，

$$P=\int_{n-1}^{n}(1+i)^{-t}dt=\left[-\frac{(1+i)^{-t}}{\log_e(1+i)}\right]_{n-1}^{n}=(1+i)^{-n}\frac{i}{\log_e(1+i)}$$

$$=(1+i)^{-n}\bar{S}_{\overline{1|}}=\frac{i}{\delta}(1+i)^{-n} \qquad [601]$$

また，上記において，$g=e^{\delta}$ とすると，

$$P=\int_{n-1}^{n}e^{-\delta t}dt=\left[-\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\right]_{n-1}^{n}=e^{-\delta n}\cdot\frac{e^{\delta}-1}{\delta} \qquad [602]^{22)}$$

となる。

（2） アドオン方式

割賦償還において，負債総額に対する全期間の単利利息を負債に加えた元利合計を，期間nにわたって均等償還する方法をアドオン(add-on)方式という[23]。

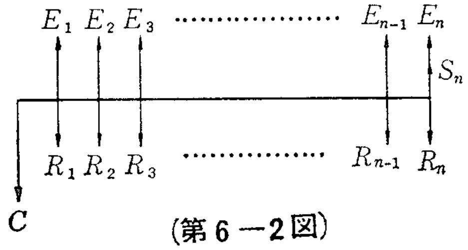
アドオン利率rとすると，割賦金 R_t は $P\left(\frac{1}{n}+r\right)$ となるから，[100] 式において，$R_t=P\left(\frac{1}{n}+r\right)$, $g=1+i$, $S=0$, とすれば

$$P\left(\frac{1}{n}+r\right)=P\cdot\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{\overline{n|}}}=\frac{1}{n}+r \qquad r=\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{n} \qquad [603]$$

（3） 設備投資における正味現価

最初に設備原価C，その後t年に維持費 R_t を投ずると，収益 E_t がえられる。n年後の設備の残価はS_n となる。この投資の純収益の現価 V_n——これを正味現価 (net present value) という——は利力によると次式のようである。



(第6－2図)

[300] 式において，$P=C$, $R_t=E_t-R_t$, $g(t)=f(t)=e^{\delta' t}$ とする。(両辺が等しくなるような利力を δ' とする)。

$$C=\int_0^n (E_t-R_t)e^{-\delta' t}dt+S_n e^{-\delta' n}$$

ここで，評価利率を e^{δ} に取りかえて，

$$V_n=\int_0^n (E_t-R_t)e^{-\delta t}dt+S_n e^{-\delta n}-C \qquad [604]^{24)}$$

となる。この V_n を最大にする条件は次式のようである。

$$E_n=R_n+\delta S_n-\frac{dS_n}{dn} \qquad [605]$$

（4） 旧 MAPI 方式

最初の設備原価Cはその設備を長く使用すれば1年当りの原価は低くなることは明らかである。ところが操業費用は年とともにどのような形かは明らかでないが，増加していくと考えられる。

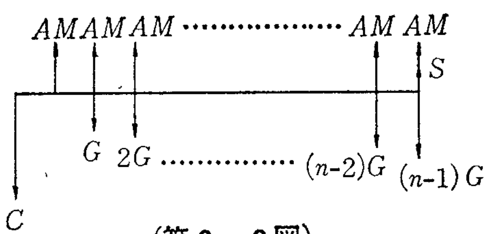
Terborgh, G. は最新の設備と比較して操業費は直線的に増加するものと仮定し，これを操業劣性と名づけた。したがって，第1年は0，第2年はG，第3年は $2G$, ・・・・・ の形となる。

n年後に S_n の残価あるものとすると，その設備原価と操業費の合計の年当り総原価 AM は，

$$\left[C+G\cdot\frac{a_{\overline{n|}}-n(1+i)^{-n}}{i}-S_n(1+i)^{-n}\right]\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

となる。

このAMの値を最小にするnを経済寿命といい，このときのAMをAdverse minimum という。



(第6−3図)

第6-3図において，C, G, $2G$, $\cdots$, $(n-1)G$, S の現価に対する年賦金 AM を考えればよいことは明らかであるから，[131] 式において，$P=C$, $R_t=\mathrm{AM}-(t-1)G$, $R_1=R$ とすると，

$$C=AM\cdot a_{\overline{n}|}-G\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}+S_n(1+i)^{-n}$$

これから

$$AM=\left[C+G\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}-S_n(1+i)^{-n}\right]\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

$$=(C-S_n)\frac{1}{a_{\overline{n}|}}+S_n i+G\cdot\frac{1-n\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}}-i\right)}{i} \qquad [606]^{25)}$$

これが残価ある場合の $MAPI$ の基本公式ということができる。

〔注〕

1) Smith. G. W.: Engineering Economy Analysis for Capital Expenditures. '68 p. 38 参照。

2) $$\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-n}$$

両辺に $(1+i)^{-1}$ を乗じて

$$(1+i)^{-1}\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots+(1+i)^{-(n+1)}$$

上式から下式を減じて

$$\{1-(1+i)^{-1}\}\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=(1+i)^{-1}-(1+i)^{-(n+1)}$$

$$\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=\frac{(1+i)^{-1}\{1-(1+i)^{-n}\}}{\frac{i}{1+i}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

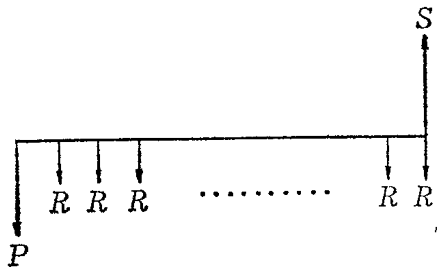
この右辺を $a_{\overline{n}|}$ の記号で示す。この記号は万国アクチュアリー学会の制定記号の1つである。(以下同様)

3) 以下各公式は数表を考慮して示す。数表については，拙稿：EE における利息計算　城西経済学会誌　第4巻第1号　参照せられよ。

4) 終価系とは筆者の新造語であるが，$(1+i)^n$, $\frac{(1+i)^n-1}{i}=S_{\overline{n}|}$, $\frac{1}{S_{\overline{n}|}}$ をさす。

5) このおきかえは，現価系⇄終価系の変換に用いることができる。年金利回りを求める公式にも利用できることは勿論である。

このおきかえによって，第1-1図は下図のように変わる。



6)　$\dfrac{1}{S_{\overline{n}|}}=\dfrac{i}{(1+i)^n-1}-i=\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}=\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$

7)　[105] 式において，$P=0, S=C-S, R=D'$ とおいてもえられる。

8)　$\dfrac{(1+r)^n-1}{r}=S_{\overline{n}|r}$ と r を添記する。$\dfrac{(1+i)^n-1}{i}=S_{\overline{n}|i}$ と i を添記することもあるが，添記 i は省略されることが多い。本稿では添記 i は省略した。

9)　久武雅夫：商業計算提要　p. 145　参照。

10)　注1に準ずる。

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1(1+i)^{-1}+(R_1+D)(1+i)^{-2}+\cdots+\{R_1+(n-1)D\}(1+i)^{-n}$$

両辺に $(1+i)^{-1}$ を乗じて

$$(1+i)^{-1}\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1(1+i)^{-2}+(R_1+D)(1+i)^{-3}+\cdots$$
$$+\{R_1+(n-1)D\}(1+i)^{-(n+1)}$$

上式から下式を減じて

$$\{1-(1+i)^{-1}\}\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1(1+i)^{-1}-R_1(1+i)^{-(n+1)}+D\{(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}$$
$$+\cdots+(1+i)^{-(n+1)}\}-nD(1+i)^{-(n+1)}$$
$$=(1+i)^{-1}[R_1-R_1(1+i)^{-n}-nD(1+i)^{-n}$$
$$+D\{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-n})\}$$

$$\sum_{t=1}^{n} R_t[g(t)]^{-1}=R_1\cdot a_{\overline{n}|}+D\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}$$

11)　この場合には注5の変換式は成立しない。Rの部分については，

$$(1+r)^n,\qquad \left(1+\frac{r-g}{1+g}\right)^n=\left(\frac{1+r}{1+g}\right)^n$$

を用いる。

12)　利率 $j_{(m)}$ を年 m 回切替えて複利計算を行なうと，1か年後の終価率は

$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ となる。ここで，$m\to\infty$ とすると，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m=e^{\delta}$$

となり，この δ を利力 (force of interest) という。$m=1$ のとき $j_{(1)}=i$

13) $a_{\overline{n}|}$ at δ

$$1+i=e^{\delta} \qquad \therefore \quad i=e^{\delta}-1$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$$

14) 拙稿：*EE* における利息計算　城西経済学会誌　第4巻第1号　参照。

15) $\int_0^n(1+i)^{-t}dt=\left[-\frac{1}{\log_e(1+i)}(1+i)^{-t}\right]_0^n=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}=\bar{a}_{\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot a_{\overline{n}|}$ 注12参照。

16) $\int_0^n t(1+i)^{-t}dt=\left[-\frac{(1+i)^{-t}}{\log_e(1+i)}\left\{t+\frac{1}{\log_e(1+i)}\right\}\right]_0^n$

$$=\frac{1-(1+i)^{-n}}{[\log_e(1+i)]^2}-\frac{n(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}=\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}-n(1+i)^{-n}}{\log_e(1+i)}$$

17) $\int_0^n e^{\delta t}dt=\left[-\frac{1}{\delta}\cdot e^{-\delta t}\right]_0^n=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=\bar{a}_{\overline{n}|}$ at δ

18) $\int_0^n te^{-\delta t}dt=\left[-\frac{1}{\delta}\left(t+\frac{1}{\delta}\right)e^{-\delta n}\right]_0^n\doteq\frac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta}$

19) $\int_0^n\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{-t}dt=\left[-\frac{\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{-t}}{\log_e\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)}\right]_0^n=\frac{1-\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)^{-n}}{\log_e\left(\frac{e^{\delta}}{1+g}\right)}$

20) $S^{(p)}_{\overline{1}|r}=\frac{r}{p\{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1\}}$

21) $S^{(p)}_{\overline{1}|r}\cdot a_{\overline{n}|r}$ において，$p\to\infty$ とすると，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1\}}=\lim_{p\to\infty}\frac{\dfrac{1}{p}\{1-(1+r)^{-n}\}}{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1}$$

分母子別にその微分をとって，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{P^2}\cdot\{1-(1+r)^{-n}\}}{-\dfrac{1}{P^2}\cdot(1+r)^{\frac{1}{p}}\log_e(1+r)}=\frac{1-(1+r)^{-n}}{\log_e(1+r)}$$

22) [601] 式は Grant [602] 式は Reul, Dean などによって導入された概念であることについてはすでに触れたことがある。 拙稿: EE における利息計算　城西経済学会誌　第4巻第1号　参照。

Grant, E. L. & Ireson, W. G.: Principles of Engineering Economy 4/e Revised Printing, '64 p. 494.

Reul, R. I.: Profitability Index for Investment, *Harvard Business Review*, July-Aug. '57

Joel Dean Associates: Interest Tables for determining Rate of Return by the Discounted Cash Flow method D表.

23) 拙稿: 消費者金融におけるアドオン方式　商業数学会誌第21号(1968. 12) 参照。

24) Howell, J.E. & Teichroew, D.: Mathematical Analysis for Business Decisions, '66 pp. 222/6 と，記号が異なるだけである。

また，Schneider, E. は $E_t=E$ とした式を示している。島野卓爾訳: 経済計算論 p. 89 (Wirtschaftlichkeits-Rechnung—Theorie der Invenstition—)

25) $\dfrac{1-n\left(\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}-i\right)}{i}$ については，数表がある。この点についてはすでに触れたことがある（拙稿: 特種な利息関数表　商業数学会誌　第19号 1967. 10）が，その後のものを加えてこの数表の概要を示しておこう。

$$\frac{1}{i}\left(1-n\cdot\frac{1}{Sn}\right)$$

数表名	利率 %（刻み）	期間（刻み）	桁数（小数）
Taylor	1(1/2)6(1)10(5)50	1(1)35	5
Barish	2(2)10(5)30(10)50	1(1)30(5)50	2
DeGarmo	1(1)2(2)12(3)15(5)25	1(1)12(3)15(5)50	4
Thuesen	1(1)10	1(1)40	6
備考: Thuesen は，$\dfrac{1}{e^{\delta}-1}-\dfrac{n}{e^{n\delta}-1}$ 表も与えている			

たとえば，利率 1 (1)10 は 1%0〜10%（1%刻み），期間 1 (1)40 は 1期〜40期（1期刻み）の意。

Taylor, G. A.: Managerial and Engineering Economy—Economic Decision-Making '64.

Barish, N. N.: Economic Analysis for Engineering and Managerial Decision-Making '62.

DeGarmo. E. P.: Engineering Economy 4/e '67.

Thuesen, H. G. & Fabryky, W. J.: Engineering Economy 3/e '64.

（昭和45. 2. 20稿）