株価モデルの考察

――ゴードンを中心として――

野沢孝之助

1

企業における上場普通株の株式価値すなわち株価は，利益の関数とされる場合（利益説 pure earnings theory）もあるが，ここには配当の関数と考える（配当説 dividend theory）から，将来に株主が受け取る配当を資本化したものとなる[1]。したがって，株価 P_1，t 期の配当 D_t，資本化率（資本還元利率）k とし，k を毎期一定とすると，株価は次式で示すことができる。

$$P_1=\sum_{t=1}^{\infty} D_t(1+k)^{-t} \qquad 〔100〕^{2)}$$

2

本節では，$D_t=D$ すなわち配当は毎期一定と仮定する場合について考察する。このときの株価を P_2 とする。

この場合においては，公式〔100〕は次のようになる。

$$P_2=\sum_{t=1}^{\infty} D(1+k)^{-t}=\frac{D}{k} \qquad 〔201〕^{3)}$$

これは，従来の

$$k=\frac{D}{P_2} \qquad 〔202〕^{4)}$$

の思考であって，これは配当の安定化傾向に基礎をおくものであり，このときの資本化率は配当利回りを示し，成長を考慮しない場合であった。

3

本節では，$D_t=D_1(1+g)^{t-1}$ すなわち毎期配当は一定率 g で成長する場合について考察する。このときの株価を P_3 とする。

この場合においては，公式〔100〕は次のようになる。

$$P_3=\sum_{t=1}^{\infty}D_1(1+g)^{t-1}(1+k)^{-t} \quad {}^{5)}$$

$$P_3(1+g)=\sum_{t=1}^{\infty}D_1(1+g)^{t}(1+k)^{-t}$$

$$\therefore \quad P_3=\frac{D_1}{k-g} \qquad \text{ただし，} k>g \tag{301}$$

本式は変形すると，

$$k=\frac{D_1}{P_3}+g \tag{302}$$

となって，本モデルにおいては，資本化率は配当利回りと成長率の和となる。

一般に〔301〕式の結果を求めるのに，

$$P=\int_0^{\infty}De^{gt}e^{-kt}dt=D\int_0^{\infty}e^{-(k-g)t}dt$$

$$=D\left[-\frac{1}{k-g}\cdot e^{-(k-g)t}\right]_0^{\infty}=\frac{D}{k-g}$$

が用いられる[6)]。

以下これを考察する。

さて，年金計算には年金の支払が1回払と連続払とがあり，適用利率には1回切替の真利率 effective rate of interest と連続切替の利力 force of interest とがあって，この組み合わせは第3—1表のようである[7)]。

利率／支払	真利率	利　力
1回払	(1)	(2)
連続払	(3)	(4)

(第 3—1 表)

以下，n 期の年金について第3—1表の各場合について考えるが，成長率については

資本化率に準じて取り扱う。

(1)
$$P=D(1+k)^{-1}+D(1+g)(1+k)^{-2}+\cdots+D(1+g)^{n-1}(1+k)^{-n}$$
$$=D(1+k)^{-1}\cdot\frac{1-(1+g)^n(+k)^{-n}}{1-(1+g)(1+k)^{-1}}$$
$$=D\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}}{k-g}$$

(2)
$$P=De^{-k}+De^{g-2k}+\cdots+De^{(n-1)g-nk}$$
$$=De^{-k}\cdot\frac{1-e^{n(g-k)}}{1-e^{g-k}}$$
$$=D\cdot\frac{1-e^{n(g-k)}}{e^k-e^g}$$

e^{-k} は利力 k による1年前の現価を示し，e は自然対数の底数である。

(3)
$$P=\frac{D}{p}(1+k)^{-\frac{1}{p}}+\frac{D}{p}(1+g)^{\frac{1}{p}}(1+k)^{-\frac{2}{p}}+\cdots\cdots+\frac{D}{p}(1+g)^{\frac{np-1}{p}}(1+k)^{-\frac{np}{p}}$$
$$=\frac{D}{p}(1+k)^{-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}}{1-(1+g)^{\frac{1}{p}}(1+k)^{-\frac{1}{p}}}$$
$$=\frac{D}{p}\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}}{(1+k)^{\frac{1}{p}}-(1-g)^{\frac{1}{p}}}$$

p は1期間の支払回数を示し，上式で $p\to\infty$ とすると連続払となる。

$$P=\lim_{p\to\infty}\frac{D}{p}\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}}{(1+k)^{\frac{1}{p}}-(1+g)^{\frac{1}{p}}}$$
$$=\lim_{p\to\infty}\frac{\frac{D}{p}\{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}\}}{(1+k)^{\frac{1}{p}}-(1+g)^{\frac{1}{p}}}$$
$$=\lim_{p\to\infty}\frac{-\frac{D}{p^2}\{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}\}}{-\frac{1}{p^2}\{k'(1+k)^{\frac{1}{p}}-g'(1+g)^{\frac{1}{p}}\}}$$
$$=D\cdot\frac{1-(1+g)^n(1+k)^{-n}}{k'-g'}$$

$k'=\log_e(1+k)$，$g'=\log_e(1+g)$ であって，k', g' は真利率 k, g に相当する利力である。

(4)
$$P=\frac{D}{p}\cdot e^{-\frac{k}{p}}+\frac{D}{p}\cdot e^{\frac{g-2k}{p}}+\cdots+\frac{D}{p}\cdot e^{\frac{(np-1)g-npk}{p}}$$
$$=\frac{D}{p}\cdot e^{-\frac{k}{p}}\cdot\frac{1-e^{n(g-k)}}{1-e^{\frac{g-k}{p}}}$$

$$=\frac{D}{p}\cdot\frac{1-e^{n(g-k)}}{e^{\frac{k}{p}}-e^{\frac{g}{p}}}$$

$$\therefore\quad P=\lim_{p\to\infty}\frac{\frac{D}{p}\{1-e^{n(g-k)}\}}{e^{\frac{k}{p}}-e^{\frac{g}{p}}}$$

$$=D\cdot\frac{1-e^{n(g-k)}}{k-g}$$

(3), (4)については，積分によって求めることができる。

上記のように本来これら4つの場合は異なるものであるが，$n\to\infty$ とすると，第3—2表のようになって，(1)と(4)は一致する。

利率 ＼ 支払	真利率	利　力
1回払	$\frac{D}{k-g}$	$\frac{D}{e^k-e^g}$
連続払	$\frac{D}{k'-g'}$	$\frac{D}{k-g}$

（第 3—2 表）

配当は明らかに連続払ではないから，真利率によるときは(1)，利力によるときは(2)が正しいのであって，積分法を用いることは不適当であり，近似計算としてのみ許される。

〔参考〕

k 真利率	e^k-1 利　力　k	$k'=\log_e(1+k)$ kに相当する利力
0.05	0.0513	0.04879
0.10	0.1052	0.09531
0.15	0.1618	0.13976
0.20	0.2214	0.18232

（第 3—3 表）（丸善対数表による）

4

本節では，総資産A（1株当り），その利益率r，利益留保率b $(0\leqq b<1)$ とし，負債は皆無，増資は行なわない場合について考察する。

本例において b, r が毎期一定とすると，各期の配当は

第1期の配当　　$Ar(1-b)=D_1$

第2期の配当　$(A+Arb)r(1-b)=Ar(1+br)(1-b)=D_1(1+br)$

第3期の配当　$\{A(1+br)+Ar(1+br)b\}r(1-b)$

$$=Ar(1+br)^2(1-b)=D_1(1+br)^2$$

$$\vdots$$

となって，公式〔301〕において，g を br とすると，配当は利益留保にのみよって成長する場合となる。

ゆえに，

$$P_4=\frac{Ar(1-b)}{k-br} \quad \text{ただし，} k>br \qquad [401]$$

本式は Gordon Model といわれているものに当たる[8]。

この Gordon Model は，Miller, Modiliani の配当アプローチ式

$$V(0)=\frac{X(0)\,(1-k_r)}{\rho-g}$$

$\left(\begin{array}{l}V(0)\cdots\text{株価},\ X(0)\cdots 1\text{株当り利益},\ k_r\cdots\text{留保率},\ \rho\cdots\text{資本化率}\\ g\ \text{は Gordon Model と同様}\end{array}\right)$

および Solomon の動学モデル

$$V=\frac{D}{k_e}+Vbm$$

($V\cdots$株価，$k_e\cdots$資本化率，$m\cdots\dfrac{r}{k_e}$，D, b は Gordon Model と同様)

と記号は異なるが，内容的に一致する[9]。

公式〔401〕から

$$k=\frac{Ar(1-b)}{P_4}+br$$

$$=\frac{1-b}{\dfrac{P_4}{Ar}}+br$$

$$\frac{Ar(1-b)}{P_4}=\frac{1-b}{\dfrac{P_4}{Ar}}$$

左辺は配当利回りであり，右辺は $\dfrac{1-\text{留保率}}{\text{株価収益率}}$ である。

本モデルにおける b, r の関係を考察すると，次のようである。

(a)　$r=k$ のとき

この場合は，株価は b に無関係であって，常に

$$P_4=A \qquad \text{(第4—1表参照)}$$

(b)　b が与えられているとき

r が大きいほど株価は高い。（第4—1表参照）

(c)　r が与えられているとき

$$P_4=\frac{A(1-b)}{\frac{k}{r}-b}=\frac{A\left(\frac{k}{r}-b+1-\frac{k}{r}\right)}{\frac{k}{r}-b}$$

$$=A+\frac{A\left(1-\frac{k}{r}\right)}{\frac{k}{r}-b}$$

から，

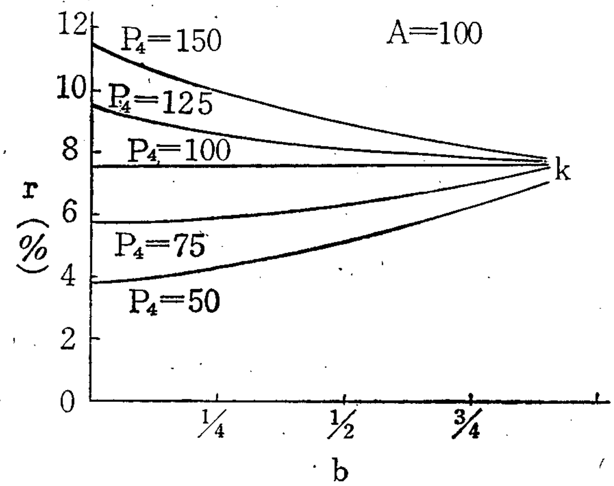
$r>k$ なれば，b が大きいほど株価は高い。

$r<k$ なれば，b が小さいほど株価は高い。

となる。（第4—2表参照）この関係をグラフに示すと，第4—1図[10]（a, b の場合）および第4—2図（c の場合）のようである。

b	r ($A=100, k=7.5\%$)				
	$P_4=150$	$P_4=125$	$P_4=100$	$P_4=75$	$P_4=50$
0	11.25%	9.38%	7.50%	5.63%	3.75%
1/4	10.00	8.82	7.50	6.00	4.29
1/2	9.00	8.33	7.50	6.43	5.00
3/4	8.18	7.89	7.50	6.92	6.00

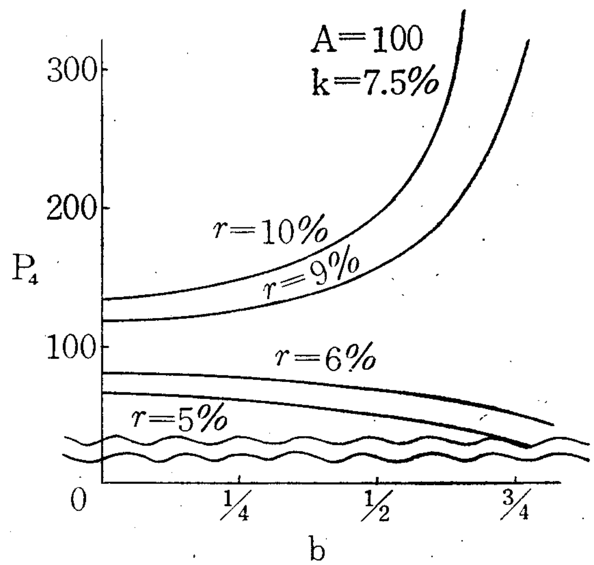
（第 4—1 表）



(第 4—1 図)

b	P_4 ($A=100$, $k=7.5\%$)			
	$r=10\%$	$r=9\%$	$r=6\%$	$r=5\%$
0	133円	120円	80	67
1/4	150	129	75	60
1/2	200	150	67	50
3/4	∞	300	50	33

(第 4—2 表)



(第 4—2 図)

5

前節〔401〕式において k は，b, r に独立として取り扱われている。しかし，(c)の場合（第4—2図）において，$r>k$ のときとくに欠点が現われる。本節では，この k を b, r の関数とした場合について考察する。

k を b, r のどんな関数と考えるべきかは実証的研究によらなければならないが，ここには既に提案された2例について考察しよう。

(1)　　$k=\alpha+\phi br$

これは Gordon によるもので，α は外部的リスクのない証券の利子率，ϕ は外部的リスクを示す。Lerner, Carleton も記号は異なるが同型のものを与えている[11]。これは k について直線的変化を仮定している。

(2)　　$k=\alpha_0(1+br)^{-\alpha_1}+br$

これは Gordon によるもの[12]であって，k について曲線的変化を仮定している。

(1)の仮定によると，〔401〕式は次のようになる。

$$P_5=\frac{Ar(1-b)}{\alpha+\phi br-br}=\frac{Ar(1-b)}{\alpha-br(1-\phi)}$$

ただし，$\alpha>br(1-\phi)$，　$0<\phi<1$　　〔501〕

本モデルを吟味すると，

(a)　$r=\dfrac{\alpha}{1-\phi}$　のとき

株価は b に無関係で，常に

$$P_5=\frac{Ar}{\alpha}=\frac{A}{1-\phi}$$

と一定になる。

(b)　b が与えられているとき

r が大きいほど株価は高い。（第5—1表参照）

(c)　r が与えられているとき，

b の大小と株価の高低とは，次例のようになる。（第5—1表参照）

$$A=100 \qquad \alpha=7.5\%$$

イ　$\phi=0.1$　　ロ　$\phi=0.2$

〔イ　$\phi=0.1$〕

b	$r=10\%$		$r=9\%$		$r=6\%$		$r=5\%$	
	k	P_5	k	P_5	k	P_5	k	P_5
	%	円	%	円	%	円	%	円
0	7.5	133	7.5	120	7.5	80	7.5	67
1/4	7.75	143	7.725	123	7.65	73	7.625	59
1/2	8.0	167	7.95	130	7.8	63	7.75	48
3/4	8.25	333	8.175	158	7.95	43	7.875	30

〔ロ　$\phi=0.2$〕

b	$r=10\%$		$r=9\%$		$r=6\%$		$r=5\%$	
	k	P_5	k	P_5	k	P_5	k	P_5
	%	円	%	円	%	円	%	円
0	7.5	133	7.5	120	7.5	80	7.5	67
1/4	8.0	136	7.95	118	7.8	71	7.75	58
1/2	8.5	143	8.4	115	8.1	59	8.0	45
3/4	9.0	167	8.85	107	8.4	38	8.25	28

（第 5—1 表）

(2)の仮定によるときは，〔401〕式は次のようになる。

$$P'_5=\frac{Ar(1-b)}{\alpha_0(1+br)^{-\alpha_1}+br-br}=\frac{Ar(1-b)}{\alpha_0(1+br)^{-\alpha_1}}$$

$$=\alpha_0^{-1}(1+br)^{\alpha_1}Ar(1-b) \qquad 〔502〕$$

本式において，

$$\frac{\partial P'}{\partial b}=\alpha_0^{-1}Ar[-(1+br)^{\alpha_1}+(1-b)\alpha_1 r(1+br)^{\alpha_1-1}]=0$$

$$\therefore \quad b=\frac{\alpha_1 r-1}{r(\alpha_1+1)} \qquad 〔503〕$$

となるから，bがこの値をとるとき株価は最大となることがわかる。（第5—2表）

公式〔502〕において，P_5'を求めると次例のようである。

イ　$A=100$　$r=12\%$　$\alpha_0=8\%$　$\alpha_1=12$

ロ　$A=100$　$r=10\%$　$\alpha_0=7\%$　$\alpha_1=13$

b	イ　bの最適値 0.282		ロ　bの最適値 0.214	
	k	P'_5	k	P'_5
0	8. %	150.0 円	7. %	142.9 円
0.1	8.133	155.8	7.151	146.3
0.2	8.419	159.5	7.411	147.8
0.3	8.833	160.5	7.767	146.9
0.4	9.358	158.0	8.204	142.7
0.5	9.976	150.9	8.712	134.7
b の最適		160.6		147.9

(第 5—2 表)[13)]

6

公式〔301〕

$$P=\frac{D}{k-g}\quad \text{（副記号は省略）}$$

において，

(a)　$g<0$　のとき　$P=\dfrac{D}{k-g}$　衰退企業

(b)　$g=0$　のとき　$P=\dfrac{D}{k}$　無成長企業

(c)　$g>0$　のとき　$P=\dfrac{D}{k-g}$　成長企業

であることは明らかである。

さて，(c)において，ここ当分の間とくに成長の期待できる企業——超成長企業——を考えてみよう。

(d)　今後n年間年g_1，その後年g_2の成長が期待できる企業のとき（$g_1>g_2$）

$$P_6=\sum_{t=1}^{n} D_1(1+g_1)^{t-1}(1+k)^{-t}+\sum_{t=n+1}^{\infty} D_1(1+g_1)^{n}(1+g_2)^{t-(n+1)}(1+k)^{-t}$$

ただし　$k>g_2$

$$=D_1\left[\frac{1-(1+g_1)^n(1+k)^{-n}}{k-g_1}+\frac{(1+g_1)^n}{k-g_2}\cdot(1+k)^{-n}\right]$$

$$=D_1\cdot\frac{(g_1-g_2)(1+g_1)^n(1+k)^{-n}-(k-g_2)}{(g_1-k)(k-g_2)} \qquad [601]$$

いま，$D_1=4$　$k=8\%$　$g_1=15\%$　$g_2=3\%$　$n=10$

のときは次のようである。

$$P_6=4\times\frac{(0.15-0.03)(1+0.15)^{10}(1+0.08)^{-10}-(0.08-0.03)}{(0.15-0.08)(0.08-0.03)}$$

$$=4\times\frac{0.12\times4.04556\times0.46319-0.05}{0.07\times0.05}=200$$

本例をもし毎年同一の成長率と考えれば

$$200=\frac{4}{0.08-x}$$

$$\therefore\quad x=0.08-\frac{4}{200}=0.06$$

その成長率は6％に当たる。

7

本節は負債がある場合について考察する。

いわゆる Leverage に関連する問題である。

いま，負債（1株当り）L，その借入利率 i [14] とすると，

第1期の配当　$(Ar-Li)(1-b)$

第2期の配当　$[\{A+(Ar-Li)b\}r-Li](1-b)$

$$=(Ar-Li)(1+br)(1-b)$$

第3期の配当　$[\{A+(Ar-Li)b+(Ar-Li)(1+br)b\}r-Li](1-b)$

$$=(Ar-Li)(1+br)^2(1-b)$$

$$\vdots$$

ここで，自己資本をCとすると，会計恒等式から

$$A=L+C$$

であるから

$$Ar-Li=(L+C)r-Li$$
$$=\left\{r+(r-i)\frac{L}{C}\right\}C$$

となるから，公式〔401〕における Ar を $\left\{r+(r-i)\frac{L}{C}\right\}C$ におきかえれば，

$$P_7=\frac{\left\{r+(r-i)\frac{L}{C}\right\}C(1-b)}{k-br} \qquad [701]$$

をうる。

ここで，$\frac{L}{C}$ によって，i, k は影響を受けるであろうが，いまこれを試案として次のように仮定できるとしよう。

$$k=\alpha_0\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{-\alpha_1}+br$$

$$i=i_0+i_1\left(\frac{L}{C}\right)^2$$

本モデルは次のようになる。

$$P_7=\frac{\left[r+\left\{r-i_0-i_1\left(\frac{L}{C}\right)^2\right\}\frac{L}{C}\right]C(1-b)}{\alpha_0\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{-\alpha_1}}$$

$$=\alpha_0^{-1}\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{\alpha_1}\left[r+\left\{r-i_0-i_1\left(\frac{L}{C}\right)^2\right\}\frac{L}{C}\right]C(1-b) \qquad [702]$$

本モデルは，$\frac{L}{C}=0$ のとき〔502〕式と一致する。

$$\frac{\partial P}{\partial b}=\alpha_0^{-1}\left[r+\left\{r-i_0-i_1\left(\frac{L}{C}\right)^2\right\}\frac{L}{C}\right]C$$
$$\times\left[\alpha_1\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{\alpha_1-1}r(1-b)-\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{\alpha_1}\right]$$
$$=\alpha_0^{-1}\left[r+\left\{r-i_0-i_1\left(\frac{L}{C}\right)^2\right\}\frac{L}{C}\right]C\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left[\alpha_1 r(1-b)-\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}\right]=0$$

$$\therefore \quad \alpha_1 r(1-b)-\left\{1+br-\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2\right\}=0$$

$$\therefore \quad b=\frac{\alpha_1 r-1+\left(\frac{L}{C}\cdot r\right)^2}{r(\alpha_1+1)} \qquad [703]$$

となるから，b がこの値を採るとき株価は最大となる。

いま，$C=100$　$r=12\%$　$\alpha_0=8\%$　$\alpha_1=12$　$i_0=4\%$　$i_1=1\%$

として P_7 を求めると，第7—1表のようである。

$\frac{L}{C}$ \ b	0.2 $i=4.04\%$		0.4 $i=4.16\%$		0.6 $i=4.36\%$		0.8 $i=4.64\%$		1.0 $i=5.00\%$	
	k	P_7	k	P_7	k	P_7	k	P_7	k	P_7
	%		%		%		%		%	
0	8.056	169	8.227	184	8.515	195	8.940	200	9.521	200
0.1	8.181	157	8.325	191	8.573	202	8.937	208	9.434	208
0.2	8.424	180	8.583	196	8.797	207	9.108	213	9.533	213
0.3	8.868	181	8.975	197	9.158	209	9.426	215	9.790	215
0.4	9.388	178	9.480	194	9.637	206	9.867	212	10.181	212
0.5	10.002	170	10.081	185	10.217	197	10.415	203	10.685	203

（第 7—1 表）

本例において，$\frac{L}{C}=0$ の場合は $C=A$ となって，第5—2表 イ の場合となる。

〔注〕

1) 利益説の主張者は Solomon, Dean などであり，配当説は Gordon に代表されるといわれる。（柴川林也：投資決定論 pp. 117/8 参照）

Hilferding は株主の請求権を配当のみにしぼり，株価は配当を基礎として利子率との比較において形成されるとする。林要訳：金融資本論。

2) Williams J. B.: The Theory of Investment Value, 1937 pp. 55/9 参照。

3) $P_2=\sum_{t=1}^{\infty} D(1+k)^{-t}$

$=D(1+k)^{-1}+D(1+k)^{-2}+\cdots$

$=D(1+k)^{-1}\cdot\frac{1}{1-(1+k)^{-1}}$

$=\frac{D}{k}$

4) 野沢孝之助：利回りを中心とした商業数学 p. 232 参照。

5) Williams, J.B.：前掲書 pp. 89/94 参照。

6) Gordon, M.J. & Shapiro, E.："Capital Equipment Analysis—The Required Rate of Profit" Management Science, Oct. 1956 (Solomon, E.(ed.)：The Management of Corporate Capital, 1959 pp. 141/9)

次の著書，論文もこれを祖述している。

Durand, D.："The Petershurg Paradox and Growth Stock Valuation" Journal of Finance, 1957.

Howell, J.E. & Teichroew, D.：Mathematical Analysis for Business Decisions, 1963 pp. 200/1.

Taylor, G.A.：Managerial and Engineering Economy, 1964 pp. 144/6.

Bierman, H.Jr. & Smidt, S.：The Capital Budgeting Decision 2/e, 1966 pp. 175/8.

なお，Merrett, A.J. & Sykes, A.：The Finance and Analysis of Capital Projects, 1965 pp. 21/9 および Lerner/Carleton：A Theory of Financial Analysis, 1966 pp. 108/9 は離散量として取り扱っている。

7) 商業数学書を参照せられたい，たとえば，注 4) の書。

8) Gordon, M.F.：前掲論文または Gordon, M.J.：The Investment, Financing and Valuation of the Corporation, 1962 p. 45 参照。

利益処分は税引利益について，株主配当，役員賞与と内部留保から成り立つ。b はこの内部留保率を示し，r は税引利益率とすれば，〔401〕式は役員賞与を無視していることになる。

9) Weston, J.F. & Brigham, E.F.：Managerial Finance, 1966 (諸井勝之助訳・経営財務Ⅱ pp. 182/3)

10) Lerner/Carleton：前掲書 pp. 118/9 参照。

11) Gordon：前掲論文 (村松司叙：資本調達論 p. 32 参照) Lerner/Carleton：前掲書 p. 150 参照。

12) Gordon：前掲書 p. 52 参照。

13) 計算には厘刻みの $(1+i)^n$ 表，$(1+i)^{-n}$ 表を利用する。(佐々木道雄：金利計算諸表)

14) i は税負担を控除したものを考える。

(昭和46年2月15日稿)

本稿校正中に次の書を入手した。参考になると思われるので追記しておく。

Renwick, F. B.：Introduction to Investments and Finance—Theory and Analysis '71.