利息算への差分と積分の応用

野 沢 孝之助

1

元金1の1年後の複利終価は，周知のように，

実効利率 i のとき $(1+i)$

名目利率 $j_{(m)}$ のとき $\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$

である。

いま，上記公式のmを瞬間ごとに切替えると考えたときの極限は，次式のようである。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$$

ここで，$\frac{m}{j_{(m)}}=x$ とおくと，$m=x\cdot j_{(m)}$ となり，上式は

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{j_{(m)}}=e^{j_\infty}$$

となり，j_∞ を δ とおくと，次式を得る。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m=e^\delta$$

次に，割引率（利息前払法）による1年後の複割引終価は，

実効割引率 d のとき $(1-d)^{-1}$

名目割引率 $f_{(m)}$ のとき $\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{-m}$

である。

いま，

$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$ を求めるには，上述に準じて，$-\frac{m}{f_{(m)}}=x$，

$-m=x\cdot f_{(m)}$ とおくと，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{f_{(m)}}=e^{f_\infty}$$

$f_\infty=\delta'$ とおくと，次式を得る。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta'}$$

以上をまとめると，利率と割引率の関係は，

$$1+i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{\delta}$$

$$=(1-d)^{-1}=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta'}$$

となり，

$$\delta=\delta'$$

となる。[1]すなわち，**瞬間切替においては，利率と割引率の区別はない。**

2

複利法における一括払および均等払の差分方程式（または，定差方程式）は，次のようである。

$$u(t+1)-a\cdot u(t)=b \qquad [a\neq 0,\quad t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots]$$

本式を順次に計算すると，

$$u(1)=a\cdot u(0)+b$$

$$u(2)=a\cdot u(1)+b=a^2\cdot u(0)+b(1+a)$$

$$u(3)=a\cdot u(2)+b=a^3\cdot u(0)+b(1+a+a^2)$$

$$\vdots$$

$$u(t)=a^t\cdot u(0)+b(1+a+a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{t-1}) \qquad [1]^{2)}$$

となる。これが一般公式である。以下，特記しない限り，一括払額または均等払額は１と仮定する。

$$\sum_{t=1}^{n}u(t)=U(n+1)-U(1)$$

いま，

$$\Delta^{-1}\cdot u(t)=U(t)+C$$

ゆえに，

$$\sum_{t=1}^{n}u(t)=\Delta^{-1}[u(n+1)-u(1)]$$

$$=\Delta^{-1}[u(t)]^{n+1}$$

3

（1） 現価・終価

〔１〕式において，$u(0)=1$，$b=0$ とすると，

$$u(t)=a^t \qquad [2]$$

となる。これが一括払の公式である。

i 現 価

$a=(1+i)^{-1}$ とすれば， $u(n)=(1+i)^{-n}$

$$a=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-m} \quad \text{とすれば，} \quad u(n)=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$a=e^{-\delta} \quad \text{とすれば，} \quad u(n)=e^{-\delta n}$$

ii　終　価

$$a=1+i, \quad a=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}, \quad a=e^{\delta} \quad \text{とおけばよい。}$$

（2） 年金現価・年金終価

〔1〕式において，　$u(0)=0$，　$b=1$　とすると，

$$u(n)=1+a+a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1} a^t=\Delta^{-1}[a^t]_0^n$$

となる。いま，

$$\sum_{t=1}^{1} a^t=\Delta^{-1}[a^t]_1^2=\Delta^{-1}(a^2-a)=\Delta^{-1}\cdot a(a-1)$$

$$=a$$

$$\therefore \quad \Delta^{-1}=\frac{1}{a-1}$$

ゆえに，上式は，

$$\sum_{t=0}^{n-1} a^t=\frac{1}{a-1}(a^n-1) \tag{3}$$

また，　$a+a^2+a^3+\cdots\cdots\cdots+a^n$

$$=\sum_{t=1}^{n} a^t=a\cdot\sum_{t=0}^{n-1} a^t$$

$$=\Delta^{-1}[a^t]_1^{n+1}=\frac{1}{a-1}\cdot a(a^n-1) \tag{4}$$

となる。この〔3〕，〔4〕両式が，均等払年金の公式である。

i　年金現価

期末払は，〔4〕式 $\sum_{t=1}^{n} a^t$ による。

$a=(1+i)^{-1}$ とすれば， $\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}$

$$=\frac{1}{(1+i)^{-1}-1}(1+i)^{-1}\{(1+i)^{-n}-1\}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=a_{\overline{n}|i}$$

$a=e^{-\delta}$ とすれば， $\sum_{t=1}^{n} e^{-\delta t}=\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=a_{\overline{n}|}\ at\ \delta$

$a=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}$ とすれば， $\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{n}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mt}$

支払回数 t を pt，1回の支払額1を$\frac{1}{p}$と置換する。

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}-1}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}$$

$$\times\left\{\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}-1\right\}$$

$$=\frac{1-\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}$$

期首払は，〔3〕式 $\sum_{t=0}^{n-1} a^t$ による。

ii 年金終価

期末払は〔3〕式，期首払は〔4〕式による。

iii 永久年金現価（期末払）

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}=\Delta^{-1}\Big[(1+i)^{-t}\Big]_1^{\infty}=\Delta^{-1}\{0-(1+i)^{-1}\}$$

$$=\frac{1}{(1+i)^{-1}-1}\{-(1+i)^{-1}\}=\frac{1}{i}=a_{\infty,i}$$

$j_{(m)}$, $e^{-\delta}$ による場合および期首払は省略する。

iv 据置年金現価（期末払）

k 期据置，n 期支払の年金現価は，次式のようになる。

$$\sum_{t=k+1}^{k+n}(1+i)^{-t}=\Delta^{-1}\Big[(1+i)^{-t}\Big]_{k+1}^{k+n+1}$$

$$=\Delta^{-1}\{(1+i)^{-(k+n+1)}-(1+i)^{-(k+1)}\}$$

$$=\Delta^{-1}(1+i)^{-1}(1+i)^{-k}\{(1+i)^{-n}-1\}$$

$$=(1+i)^{-k}\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}$$

$$=\sum_{t=1}^{k+n}(1+i)^{-t}-\sum_{t=1}^{k}(1+i)^{-t}$$

$$=(1+i)^{-k}\cdot a_{\overline{n}|i}=a_{\overline{k+n}|i}-a_{\overline{k}|i}=k|a_{\overline{n}|i}$$

$j_{(m)}$, $e^{-\delta}$ による場合および期首払は省略する。

（3） 賦 金

〔1〕式を，$t=n$ の場合における b を求めると，

$$b=\frac{u(n)-a^n\cdot u(0)}{\sum_{t=0}^{n-1}a^t} \qquad 〔5〕$$

となる。これが均等期末払賦金の公式である。

i 償還賦金

〔5〕式において，$u(0)=1$, $u(n)=0$, $a=1+i$, $b=-b'$ とすると，次のようになる。

$$-b'=\frac{0-(1+i)^n}{S_{\overline{n}|i}}$$

$$b' = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = (a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

ii 積立賦金

〔5〕式において，　$u(0)=0$，　$u(n)=1$，　$a=1+i$　とすると，次のようになる。

$$b = \frac{1-0}{S_{\overline{n}|i}} = (S_{\overline{n}|i})^{-1}$$

（4） 債券価格

〔1〕式において，　$t=n$,　$u(n)=A$,　$u(0)=C$,　$b=a\cdot Cg$,　$a=(1+i)^{-1}$　とおく（g, i, n は期単位とする）と，

$$A = a^n\cdot C + a\cdot Cg(1+a+a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1})$$

$$= (1+i)^{-n}\cdot C + Cg\cdot\sum_{t=1}^{n} a^t$$

$$= C(1+i)^{-n} + Cg\cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$= C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|i}\}$$

となって，g 利付債券価格の公式である。

4

変額年金について考察する。

（1） 等差数列をなす年金

第1回年金を R，公差を Q とする。期末払を示し，期首払は省略する。

i 現 価

$$\sum_{t=1}^{n} [R+(t-1)Q]a^t = (R-Q)\sum_{t=1}^{n} a^t + Q\cdot\sum_{t=1}^{n} ta^t$$

ここで，$\sum_{t=1}^{n} ta^t$ を求めるために，

$$u(t+1)-a\cdot u(t)=a^{t+1}$$

の差分方程式を集計すると，

$$\sum_{t=1}^{n} u(t)-a\cdot\sum_{t=0}^{n-1} u(t)=\sum_{t=1}^{n} a^t$$

$u(0)=0$ であるから，

$$\sum_{t=1}^{n} u(t)-a\{\sum_{t=1}^{n} u(t)-u(n)\}=\sum_{t=1}^{n} a^t$$

$$(1-a)\sum_{t=1}^{n} u(t)+a\cdot u(n)=\sum_{t=1}^{n} a^t$$

$$\therefore\quad \sum_{t=1}^{n} u(t)=\frac{\sum_{t=1}^{n} a^t-a\cdot u(n)}{1-a}$$

ここで，$ta^t=u(t)$ とおくと，$u(n)=na^n$ であるから，

$$\sum_{t=1}^{n} ta^t=\frac{\Delta^{-1}[a^t]_1^{n+1}-a\cdot na^n}{1-a}$$

$$=\frac{a\left\{\frac{1}{a-1}(a^n-1)-na^n\right\}}{1-a}$$

となる。これを原式に代入すると，

$$\sum_{t=1}^{n}[R+(t-1)Q]a^t$$

$$=(R-Q)\frac{1}{a-1}\cdot a(a^n-1)+Q\cdot\frac{a\left\{\frac{1}{a-1}(a^n-1)-na^n\right\}}{1-a}$$

$$=R\cdot\frac{1}{a-1}\cdot a(a^n-1)$$

$$+Q\cdot\frac{a\left\{\frac{1}{a-1}\cdot a(a^n-1)-na^n\right\}}{1-a} \qquad [6]$$

$a=(1+i)^{-1}$

$$(Aa)_{\overline{n}|i}=R\cdot a_{\overline{n}|i}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$$

$a=e^{-\delta}$

$$(Aa)_{\overline{n}|}\ at\ \delta=R\cdot a_{\overline{n}|}\ at\ \delta+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}\ at\ \delta-ne^{-\delta}}{e^{\delta}-1}$$

$(Ia)_{\overline{n}|}$〔逓加年金〕は，上記諸式において，　$R=Q=1$　とおけばよい。また，$(Da)_{\overline{n}|}$〔逓減年金〕は，　$R=n,\quad Q=-1$　とおく。

ii　終　価

$$\sum_{t=1}^{n}[R+(t-1)Q]a^{n-t}=a^n\cdot\sum_{t=1}^{n}[R+(t-1)Q]a^{-t}$$

$$=a^n(Aa)_{\overline{n}|}$$

$a=1+i,\quad a=e^{\delta}$　とおけば，$(AS)_{\overline{n}|i},\quad (AS)_{\overline{n}|}\ at\ \delta$　を求めることができる。

$(IS)_{\overline{n}|},\quad (DS)_{\overline{n}|}$　についても，現価と同様である。

（2）　等比数列をなす年金

第1回年金を K，公比を r とする。期末払を示し，期首払は省略する。

i　現　価

$$\sum_{t=1}^{n}Kr^{t-1}a^t=\frac{K}{r}\cdot\sum_{t=1}^{n}(ra)^t=\frac{K}{r}\cdot\frac{1}{ra-1}\cdot ra\{(ra)^n-1\}$$

$$=K\cdot\frac{1}{ra-1}\cdot a\{(ra)^n-1\} \qquad [7]$$

$a=(1+i)^{-1}$

$$(Ga)_{\overline{n}|i}=K\cdot\frac{1}{r(1+i)^{-1}-1}(1+i)^{-1}\{r^n(1+i)^{-n}-1\}$$

$$=K\cdot\frac{1-r^n(1+i)^{-n}}{1+i+r}\qquad [1+i\neq r]$$

$a=e^{-\delta}$

$$(Ga)_{\overline{n}|}\ at\ \delta=K\cdot\frac{1-r^ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-r}\qquad [e^{\delta}\neq r]$$

ii 終 価

$$\sum_{t=1}^{n}Kr^{t-1}a^{n-t}=a^n(Ga)_{\overline{n}|}$$

$a=1+i,\quad a=e^{\delta}$ とおけば，$(GS)_{\overline{n}|i},\quad (GS)_{\overline{n}|}\ at\ \delta$ を求めることができる。

5

複割引法の場合について考察する。

既述の〔1〕式における a を

現 価 $\quad (1+i)^{-1}\longrightarrow(1-d)$

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-m}\longrightarrow\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}$$

終 価 $\quad (1+i)\longrightarrow(1-d)^{-1}$

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}\longrightarrow\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$$

と置換する（e^{δ}，$e^{-\delta}$ は，そのままとする)。

（1） 現価・終価

〔2〕式 $\qquad u(t)=a^t$

i 現 価

$$a=1-d\qquad\qquad u(n)=(1-d)^n$$

$$a=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{m} \qquad u(n)=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

$$a=e^{-\delta} \qquad u(n)=e^{-\delta n}$$

ii 終　価

$a=(1-d)^{-1}$, $a=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$, $a=e^{\delta}$ とおけばよい。

（2） 年金現価・年金終価

i 年金現価

期末払は，〔4〕式により，$a=1-d$ とする。

$$\frac{1}{(1-d)-1}(1-d)\{(1-d)^{n}-1\}$$

$$=(1-d)\frac{1-(1-d)^{n}}{d}$$

期首払は，〔3〕式による。

ii 年金終価

期末払は，〔3〕式により，$a=(1-d)^{-1}$ とする。

$$\frac{1}{(1-d)^{-1}-1}\{(1-d)^{-n}-1\}$$

$$=(1-d)\frac{(1-d)^{-n}-1}{d}$$

期首払は，〔4〕式による。

（3） 賦　金

〔5〕式 $$b=\frac{u(n)-a^{n}\cdot u(0)}{\sum_{t=0}^{n-1}a^{t}}$$

i 償還賦金

$u(0)=1$, $u(n)=0$, $a=(1-d)^{-1}$, $b=-b'$ とする。

$$-b'=\frac{0-(1-d)^{-n}}{(1-d)\dfrac{(1-d)^{-n}-1}{d}}$$

$$b'=(1-d)^{-1}\frac{d}{1-(1-d)^{n}}$$

ii 積立賦金

$u(0)=0$, $u(n)=1$, $a=(1-d)^{-1}$ とする。

$$b=\frac{1}{(1-d)\dfrac{(1-d)^{-n}-1}{d}}$$

$$=(1-d)^{-1}\frac{d}{(1-d)^{-n}-1}$$

〔算例1〕 1万円を5ヵ月月賦，月利8.1%（日歩27銭）で貸付けた場合，期末払の元利均等償還法による償還表を示せ。ただし，利息はすべて円未満切捨とする。

イ. $i=8.1\%$（利息後払い）

ロ. $d=8.1\%$（利息前払い）

解イ. 第3節（3）iによる。周知のものである。

月	月初未済元金	利　　息	元金償還	月末支払額
1	10,000	810	1,701	2,511
2	8,299	672	1,839	2,511
3	6,460	523	1,988	2,511
4	4,472	362	2,149	2,511
5	2,323	188	2,323	2,511
計	——	2,555	10,000	12,555

ロ．第5節（3）i

$$(1-d)^{-1}\frac{d}{1-(1-d)^n}=(1-0.081)^{-1}\frac{0.081}{1-(1-0.081)^5}$$
$$=0.2558\ (\text{切捨})$$

による。

月	月初未済元金（1）	利　息（2）	元金償還（3）	月末支払額（4）
1	10,000	881	1,677	2,558
2	8,323	733	1,825	2,558
3	6,498	572	1,986	2,558
4	4,512	397	2,161	2,558
5	2,351	207	2,351	2,558
計	——	2,790	10,000	12,790

注　（2）＝（1）×8.1%(1−8.1%)$^{-1}$
　　（3）＝（4）−（2）

（4） 変額年金

i 現　価

〔6〕および〔7〕式において，$a=(1-d)$ とおくと，

$$(Aa)_{\overline{n|}}\ at\ d=R\cdot\frac{(1-d)\{1-(1-d)^n\}}{d}$$

$$+Q\cdot\frac{(1-d)\left[\dfrac{(1-d)\{1-(1-d)^n\}}{d}-n(1-d)^n\right]}{d}$$

$$(Ga)_{\overline{n|}}\ at\ d=K\cdot\frac{1-r^n(1-d)^n}{(1-d)^{-1}-r}\qquad[(1-d)^{-1}\neq r]$$

ii 終　価

上式にそれぞれ $(1-d)^{-n}$ を乗ずれば，$(AS)_{\overline{n|}}$，$(GS)_{\overline{n|}}\ at\ d$ を求めることができる。

6

積分を利用する場合について考察する。

1.　年金現価・年金終価

$$\int_0^n a^t\,dt=\left[\frac{a^t}{\log_e a}\right]_0^n=\frac{a^n-1}{\log_e a} \qquad 〔8〕$$

これは連続払の年金現価・年金終価の公式である。**連続払には，期末払と期首払の区別はない。**

i　年金現価

$$a=(1+i)^{-1}$$

$$\frac{(1+i)^{-n}-1}{\log_e(1+i)^{-1}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}=\bar{a}_{\overline{n}|i}$$

$$a=e^{-\delta}$$

$$\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ \delta$$

$$a=(1-d)$$

$$\frac{(1-d)^n-1}{\log_e(1-d)}=\frac{1-(1-d)^n}{\delta}=\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ d$$

ii　年金終価

〔8〕式における a を，それぞれ $(1+i)$，e^δ，$(1-d)^{-1}$ とおけばよい。

2.　変額年金

（1）　等差数列をなす年金

第1回年金をR，公差をQとする。

i　現　価

$$\int_0^n (R+tQ)a^t\,dt=R\int_0^n a^t\,dt+Q\int_0^n ta^t\,dt$$

ここで

$$\int_0^n ta^t\, dt=\left[\frac{a^t(t\cdot\log_e a-1)}{(\log_e a)^2}\right]_0^n$$

$$=\frac{a^n(n\cdot\log_e a-1)+1}{(\log_e a)^2}$$

$$=\frac{na^n-\dfrac{a^n-1}{\log_e a}}{\log_e a}$$

ゆえに，原式は，

$$\int_0^n (R+tQ)a^t\, dt=R\cdot\frac{a^n-1}{\log_e a}+Q\cdot\frac{na^n-\dfrac{a^n-1}{\log_e a}}{\log_e a} \qquad [9]$$

となる。

$a=(1+i)^{-1}$

$$(A\bar{a})_{\overline{n}|i}=R\cdot\frac{(1+i)^{-n}-1}{\log_e(1+i)^{-1}}+Q\cdot\frac{n(1+i)^{-n}-\dfrac{(1+i)^{-n}-1}{\log_e(1+i)^{-1}}}{\log_e(1+i)^{-1}}$$

$$=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|i}+Q\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$a=e^{-\delta}$

$$(A\bar{a})_{\overline{n}|}\text{ at }\delta=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta+Q\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }\delta-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

$a=(1-d)$

$$(A\bar{a})_{\overline{n}|}\text{ at }d=R\cdot\frac{(1-d)^n-1}{\log_e(1-d)}$$

$$+Q\cdot\frac{n(1-d)^n-\dfrac{(1-d)^n-1}{\log_e(1-d)}}{\log_e(1-d)}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1-d)^n}{\delta}$$

$$+Q\cdot\frac{\dfrac{1-(1-d)^n}{\delta}-n(1-d)^n}{\delta}$$

$$=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ d+Q\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ d-n(1-d)^n}{\delta}$$

$R=0,\quad Q=1$

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|i}=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ \delta=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ \delta-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ d=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ d-n(1-d)^n}{\delta}$$

$R=n,\quad Q=-1$

$$(D\bar{a})_{\overline{n}|i}=n\cdot\bar{a}_{\overline{n}|i}-\frac{\bar{a}_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$$=\frac{n-\bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(D\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ \delta=\frac{n-\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ \delta}{\delta}$$

$$(D\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ d=\frac{n-\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ d}{\delta}$$

ii 終 価

$$\int_0^n(R+tQ)a^{n-t}\ dt=a^n\int_0^n(R+tQ)a^{-t}\ dt$$

$$=R\cdot\frac{a^n-1}{\log_e a}+Q\cdot\frac{\dfrac{a^n-1}{\log_e a}-n}{\log_e a}$$

（2） 等比数列をなす年金

第1回年金をK，公比をrとする。

i 現　価

$$\frac{K}{r}\cdot\int_0^n (ra)^t\,dt=\frac{K}{r}\left[\frac{(ra)^t}{\log_e(ra)}\right]_0^n=\frac{K}{r}\left[\frac{(ra)^n-1}{\log_e(ra)}\right]$$

$$=\frac{K}{r}\cdot\frac{r^n a^n-1}{\log_e r+\log_e a} \qquad [10]$$

$a=(1+i)^{-1}$

$$(G\bar{a})_{\overline{n}|i}=\frac{K}{r}\cdot\frac{r^n(1+i)^{-n}-1}{\log_e r+\log_e(1+i)^{-1}}$$

$$=\frac{K}{r}\cdot\frac{1-r^n(1+i)^{-n}}{\delta-\log_e r}$$

$a=e^{-\delta}$

$$(G\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ \delta=\frac{K}{r}\cdot\frac{1-r^n e^{-\delta n}}{\delta-\log_e r}$$

$a=(1-d)$

$$(G\bar{a})_{\overline{n}|}\ at\ d=\frac{K}{r}\cdot\frac{r^n(1-d)^n-1}{\log_e r+\log_e(1-d)}$$

$$=\frac{K}{r}\cdot\frac{1-r^n(1-d)^n}{\delta-\log_e r}$$

ii 終　価

$$\frac{K}{r}\int_0^n r^t a^{n-t}\,dt=a^n\cdot\frac{K}{r}\int_0^n\left(\frac{r}{a}\right)^t dt$$

$$=a^n\cdot\frac{K}{r}\left[\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^t}{\log_e\left(\frac{r}{a}\right)}\right]_0^n=a^n\cdot\frac{K}{r}\cdot\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^n-1}{\log_e\left(\frac{r}{a}\right)}$$

$$=\frac{K}{r}\cdot\frac{r^n-a^n}{\log_e r-\log_e a}$$

〔算例２〕　初年度1,000万円で毎年50万円ずつ減少する純収益を10年間あげる資産がある。残存価額０として，次の条件で評価せよ。[3)]

イ　年１回払で利率年 $i=10\%$

ロ　連続払で利率年 $i=10\%$

ハ　連続払で利力年 $\delta=10\%$

解イ　$(Aa)\overline{10}|_{10\%}=1,000万円\times a\overline{10}|_{10\%}-50万円\times\frac{a\overline{10}|_{10\%}-10(1+0.1)^{-10}}{0.1}$

$$=1,000万円\times 6.1446-50万円\times\frac{6.1446-10\times 0.3855}{0.1}$$

$$=6,144.6万円-1,144.8万円=\underline{\underline{5,000万円}}$$

ロ　$(A\bar{a})\overline{10}|_{10\%}=1,000万円\times\bar{a}\overline{10}|_{10\%}-50万円\times\frac{\bar{a}\overline{10}|_{10\%}-10(1+0.1)^{-10}}{\delta}$

$$=1,000万円\times\bar{s}\overline{1}|\cdot a\overline{10}|\ at\ 10\%$$

$$-50万円\times\frac{\bar{s}\overline{1}|\cdot a\overline{10}|\ at\ 10\%-10(1+0.1)^{-10}}{\delta}$$

ただし，　$\bar{s}\overline{1}|_i=\frac{0.1}{\delta}$

$$=1,000万円\times 1.0492\ 06\times 6.1445\ 67$$

$$-50万円\times\frac{1.0492\ 06\times 6.1445\ 67-10\times 0.3855\ 43}{0.0953\ 10}$$

$$=6,446.92万円-1,359.50万円=\underline{\underline{5,087万円}}$$

ハ　$(A\bar{a})\overline{10}|\ at\ \delta=1,000万円\times\bar{a}\overline{10}|\ at\ \delta$

$$-50\text{万円}\times\frac{\bar{a}_{\overline{10}|}\ at\ \delta-10e^{-0.1\times10}}{\delta}$$

$$=1,000\text{万円}\times\bar{s}_{\overline{1}|}\cdot\bar{a}_{\overline{10}|}\ at\ \delta$$

$$-50\text{万円}\times\frac{\bar{s}_{\overline{1}|}\cdot\bar{a}_{\overline{10}|}\ at\ \delta-10e^{-1}}{\delta}$$

ただし，　$\bar{s}_{\overline{1}|}\ at\ \delta=\dfrac{e^{0.1}-1}{0.1}$

$$=6,321.21\text{万円}-1,386.22\text{万円}=\underline{\underline{4,935\text{万円}}}$$

7

まず，金利計算表に関して述べよう。

複利終価表において，1期から n 期までの合計を算出する。

$$(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots\cdots+(1+i)^n$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(1+i)^t=\ddot{S}_{\overline{n}|i}=(1+i)S_{\overline{n}|i}=S_{\overline{n+1}|i}-1$$

複利現価表において，1期から n 期までの合計を算出する。

$$(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{-n}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=a_{\overline{n}|i}$$

年金終価表（期末払）において，1期から n 期までの合計を算出する。

$$S_{\overline{1}|}+S_{\overline{2}|}+S_{\overline{3}|}+\cdots\cdots+S_{\overline{n}|}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\frac{(1+i)^t-1}{i}=\frac{S_{\overline{n+1}|i}-(n+1)}{i}$$

$$=(IS)_{\overline{n}|i}=\sum_{t=1}^{n}t(1+i)^{n-t}=(1+i)^n(Ia)_{\overline{n}|i}$$

年金現価表において，1期から n 期までの合計を算出する。

$$a_{\overline{1}|}+a_{\overline{2}|}+a_{\overline{3}|}+\cdots\cdots+a_{\overline{n}|}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}=\frac{n-a_{\overline{n}|i}}{i}$$

$$=(Da)_{\overline{n}|i}=\sum_{t=1}^{n}(n+1-t)(1+i)^{-t}$$

$$=(n+1)a_{\overline{n}|i}-(Ia)_{\overline{n}|i}=(n+1)a_{\overline{n}|i}+(1+i)\frac{d}{di}(a_{\overline{n}|i})$$ [4]

以上は，金利計算表の検算に利用することができる。

最後に，第6節における記述を補説しておこう。

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|}=\int_0^n ta^t\ dt=\left[\ t\int a^t\ dt-\iint a^t\ dt^2\right]_0^n$$ [5]

$$(D\bar{a})_{\overline{n}|}=\int_0^n(n-t)a^t\ dt=n\int_0^n a^t\ dt-\int_0^n ta^t\ dt$$

$$=\int_0^n\int_0^t a^t\ dt^2=\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ dt$$ [6]

$$\int_0^n t^2a^t\ dt=\left[-\frac{t^2a^t}{\log_e a}+\frac{2}{\log_e a}\int ta^t\ dt\right]_0^n$$

$$=\left[\frac{t^2a^t}{\log_e a}+\frac{2}{\log_e a}\left(\frac{ta^t}{\log_e a}-\frac{a^t}{(\log_e a)^2}\right]_0^n$$

$$=-\frac{n^2a^n}{\log_e a}+\frac{2na^n}{(\log_e a)^2}-\frac{2a^n}{(\log_e a)^3}+\frac{2}{(\log_e a)^3}$$ [7]

$$\sum_{t=1}^{n}t^2(1+i)^{-t}=(1+i)^2\frac{d^2}{di^2}a_{\overline{n}|i}+(1+i)\frac{i}{di}a_{\overline{n}|i}$$

$$=\frac{2a_{\overline{n}|i}-(1+i)^{-1}-(n^2+2n-1)(1+i)^{-(n+1)}+n^2(1+i)^{-(n+2)}}{i^2(1+i)^{-2}}$$ [8]

注 1) 第1節の詳細は，拙著「新会計数理」第11章　参照。

2) 経営数学書に

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+P(1+i)^n$$

を中心に会計数理を説明するものがあること，およびその変化については既に述べたことがある。拙稿：会計数理の基本公式　城西経済学会誌　第6巻第1号。

3) 拙著「新会計数理」第11章　参照。

4) $(Ia)_{\overline{n}|i}=-(1+i)\dfrac{d}{di}(a_{\overline{n}|i})$

D. W. A. Donald, *Compound Interest and Annuities-certain,* 2nd ed. 1956, p. 54.

N. E. Sheppard and D. C. Baille, *Compound Interest,* 1966, p. 81.

5) Cf. D. W. A. Donald, op. cit., p. 57.

6) Cf. H. E. Stelson, *Mathematics of Finance,* 1957, pp. 127–8, 132.

7) Cf. D. W. A. Donald, op. cit., p. 69.

8) Cf. ibid., p. 55; R. Todhunter, *Compound Interest and Annuities-certain* 4th ed. 1937 p. 50.

（昭和52. 7. 26. 稿，53. 4. 3. 浄書）