投資計算の基礎公式について

野　沢　孝之助

1

元本に対する利率を i，その収益の再投資利率を r とするいわゆる2個の利率を用いる場合の投資計算の諸公式は，次のようである。

Pを現価，Sを終価，Rを年金額とする。

(1)　終　　価

$$S = P\left\{1 + i\cdot\sum_{t=0}^{n-1}(1+r)^t\right\}$$

$$= \boldsymbol{P(1 + i\cdot S_{\overline{n}|r})} \qquad [101]$$

(注)　$S_{\overline{n}|r} = \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Pi は定期に支払われるものと仮定され，本式は従来，定期払利息の公式といわれ，2個の利率を用いる場合の基本公式である。

以下この公式から各種場合の誘導を試みんとするものである。

(2)　現　　価

公式〔101〕を変形する。

$$P = S/(1 + i\cdot S_{\overline{n}|r}) \qquad [201]$$

(3)　年金終価

各期末に支払われる R に，公式〔101〕を順次に適用する。

$$S = R\cdot\sum_{t=0}^{n-1}(1 + i\cdot S_{\overline{t}|r})$$

$$= R\{1 + (1 + i\cdot S_{\overline{1}|r}) + \cdots\cdots + (1 + i\cdot S_{\overline{n-1}|r})\}$$

$$=R\left(n+i\cdot\frac{S_{\overline{n}|r}-n}{r}\right) \qquad 〔301〕$$

(4) 年金現価

各期末に支払われる R に，公式〔201〕を順次に適用する。

$$P=R\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{t}|r}}$$

$$=R\left\{\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{1}|r}}+\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{2}|r}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{n}|r}}\right\} \qquad 〔401〕$$

(5) 償還賦金

公式〔401〕を変形する。

$$R=P\Big/\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{t}|r}} \qquad 〔501〕$$

(6) 積立賦金

公式〔301〕を変形する。

$$R=S\Big/\left(n+i\cdot\frac{S_{\overline{n}|r}-n}{r}\right) \qquad 〔601〕$$

2

第1節において，

$r=0$	とおけば	単利計算
$r=i$	とおけば	複利計算

の諸公式が得られる。

(1) 公式〔101〕において，

$r=0$ とすると $S=P(1+ni)$ [1)] ……単利現価 〔102〕

$r=i$ とすると $S=P(1+i)^n$ ……複利終価 〔103〕

を得る。

(2) 公式〔201〕式から

$$P=\frac{S}{1+ni} \qquad \text{……単利現価} \qquad 〔202〕$$

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=S(1+i)^{-n}$$

$$=Sv^n \qquad \cdots\cdots \text{複利終価} \qquad 〔203〕$$

を得られるが，それぞれ〔102〕，〔103〕式から直接にも得られる。

債券価格

額面金額（償還金額）C，債券利率 g，評価利率 i とし，債券利息の 再投資利率 r とすると、債券価格 A は次式のようになる。

$$A=\frac{C(1+g\cdot S_{\overline{n}|r})}{1+i\cdot S_{\overline{n}|r}}$$ [2)]

（g, n, i は，期単位とする。）

$r=0$ とすると $A=\dfrac{C(1+ng)}{1+ni}$ ……単利債券価格

$r=i$ とすると $A=\dfrac{C(1+g\cdot S_{\overline{n}|i})}{(1+i)^n}$

$$=C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|i}\} \qquad \cdots\cdots \text{複利債券価格}$$

（注） $a_{\overline{n}|i}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Hoskold の公式

P を投資すれば，n 年間毎年末に R ずつ収益が得られる。このとき 投資には 報酬率 i が要求され，$(R-Pi)$ の 蓄積には 報酬率より低い蓄積率 r によるものとする。

$$(R-Pi)S_{\overline{n}|r}=P$$

$$\therefore \quad P=\frac{R\cdot S_{\overline{n}|r}}{1+i\cdot S_{\overline{n}|r}}=\frac{R}{(S_{\overline{n}|r})^{-1}+i}$$

$$=\frac{R}{(a_{\overline{n}|r})^{-1}-r+i}$$

本式が，Hoskold の公式である。

（3） 公式〔301〕から，

$$S=Rn\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot i\right) \qquad \cdots\cdots \text{単利年金終価} \qquad 〔302〕$$ [3)]

$$S=R\cdot S_{\overline{n}|i} \qquad \cdots\cdots \text{複利年金終価} \qquad 〔303〕$$

を得られる。

（4） 公式〔401〕から，

$$P=R\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+ti}$$

$$=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+2i}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+ni}\right\}$$

……単利年金現価　〔402〕

$$P=R\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|i}$$

……複利年金現価　〔403〕

を得られる。

（5） 公式〔501〕から，

$$R=P\Big/\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+ti}$$

……単利償還賦金　〔502〕

$$R=P\Big/\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}$$

$$=P\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$=P(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

……複利償還賦金　〔503〕

を得られるが，それぞれ〔402〕，〔403〕式から直接にも得られる。

（6） 公式〔601〕から，

$$R=S\Big/n\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot i\right)$$

……単利積立賦金　〔602〕

$$R=S\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=S(S_{\overline{n}|i})^{-1}=S\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}$$

……複利積立賦金　〔603〕

を得られるが，それぞれ〔302〕，〔303〕式から直接にも得られる。

〔問題1〕 毎年末￥100,000あて10か年間支払われる年金の次の各場合の現価を求めよ。

a） 利率　年 6%　　再投資利率　年 4%

b） 単利利率　年 6%

c） 複利利率　年 6%

〔解〕〔401〕〜〔403〕式による。

a）　$P=100,000\sum_{t=1}^{10}\frac{1}{1+0.06\,s_{\overline{t}|4\%}}$

$=100,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06\times1}+\frac{1}{1+0.06\times2.06}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.06\times13.1807\ 9494}\right\}$

$=100,000\times7.4589\ 422=\underline{\underline{745,894(円)}}$

b）　$P=100,000\sum_{t=1}^{10}\frac{1}{1+0.06\,t}$ 4)

$=100,000\times7.6489\ 3917=\underline{\underline{764,894(円)}}$

c）　$P=100,000\,a_{\overline{10}|6\%}$

$=100,000\times7.3600\ 8705=\underline{\underline{736,009(円)}}$

3

元金１の１年後の複利終価は，周知のように，

実効利率　i　のとき　$(1+i)$

名目利率　$\frac{j_{(m)}}{m}$　のとき　$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$

である。

いま，上記の名目利率における m を瞬間ごとに切替えると考えたときの極限は，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$$

ここで，$\frac{m}{j_{(m)}}=x$ とおくと，$m=x\cdot j_{(m)}$ となり，上式は，

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{j_{(m)}}=e^{j_\infty}$$

となり，j_∞ を δ とおくと，次式を得る。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m=e^\delta$$

この δ を利力という。

さて，複利法における一括払および均等払の差分方程式は，次のようになるであろう。

$$u(t+1)-a\cdot u(t)=b \qquad [a\neq 0,\ \ t=0,1,2,\cdots]$$

本式を順次に計算すると，

$$u(1)=a\cdot u(0)+b$$
$$u(2)=a\cdot u(1)+b=a^2\cdot u(0)+b(1+a)$$
$$\vdots$$
$$u(t)=a^t\cdot u(0)+b(1+a+\cdots\cdots+a^{t-1})$$
$$\vdots$$
$$u(n)=a^n\cdot u(0)+b\cdot\sum_{t=0}^{n-1}a^t \qquad [1]$$ 5)

となる。これが複利法の一括払と均等払の基本公式である。

ここで，

$$\sum_{t=1}^{n}u(t)=U(n+1)-U(1)$$

なお，

$$\Delta^{-1}\cdot u(t)=U(t)+C \qquad [\Delta^{-1}\text{は和分演算子}]$$

$$\therefore\quad \sum_{t=1}^{n}u(t)=\Delta^{-1}[u(n+1)-u(1)]$$
$$=\Delta^{-1}[u(t)]_1^{n+1}$$ 6)

ここで，Δ^{-1} を求めると，

$$\sum_{t=1}^{1}a^t=\Delta^{-1}[a^t]_1^2=\Delta^{-1}(a^2-a)$$
$$=\Delta^{-1}\cdot a(a-1)=a$$

$$\therefore\quad \Delta^{-1}=\frac{1}{a-1} \qquad [a\neq 1]$$

$$\sum_{t=0}^{n-1}a^t=\Delta^{-1}[a^t]_0^n=\frac{a^n-1}{a-1}$$

ゆえに，公式〔1〕は，

$$u(n)=a^n\cdot u(0)+b\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

ここで，$u(0)=P$，$u(n)=S$，$b=R$ とすると，

$$\boldsymbol{S=P\cdot a^n+R\cdot\frac{a^n-1}{a-1}} \qquad (a\neq 1) \qquad 〔1〕'$$

となる。以下，本式から各種場合の誘導を試みんとするものである。

(1) 終価・現価

公式〔1〕′において，$R=0$ とすると，

$$S=P\cdot a^n \qquad 〔2〕$$

となる。これが一括払の公式である。

i 終　価

$a=(1+i)$ とすれば $S=P(1+i)^n$

第2節の〔103〕式となる。

$a=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ とすれば $S=P\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{mn}$

$a=e^\delta$ とすれば $S=P\cdot e^{\delta n}$

ii 現　価

$a=(1+i)$ とすれば $P=S(1+i)^{-n}$

第2節の〔203〕式となる。

$a=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ とすれば $P=S\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$

$a=e^\delta$ とすれば $P=S\cdot e^{-\delta n}$

(2) 年金終価・年金現価

公式〔1〕′において，$P=0$ とすれば年金終価，$S=0$ および R を負とすれば年金現価を求めることができる。

i 年金終価

$$S=R\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

$a=(1+i)$ とすれば $S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$

$$=R\cdot S_{\overline{n|}i}$$

第２節の〔303〕式となる。

$a=\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ とすれば $S=R\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1}$

$$=R\cdot\frac{S_{\overline{mn|}}}{S_{\overline{m|}}}\quad \text{at}\ \frac{j_{(m)}}{m}$$

$a=e^\delta$ とすれば $S=R\cdot\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^\delta-1}$

ii　年金現価

$$0=P\cdot a^n-R\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

$$\therefore\quad P=R\cdot\frac{1-a^{-n}}{a-1}$$

$a=(1+i)$ とすれば $P=R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$$=R\cdot a_{\overline{n|}i}$$

第２節の〔403〕式にあたる。

$a=\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ とすれば $P=R\cdot\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1}$

$$=R\cdot\frac{a_{\overline{mn|}}}{S_{\overline{m|}}}\quad \text{at}\ \frac{j_{(m)}}{m}$$

$a=e^\delta$ とすれば $P=R\cdot\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^\delta-1}$

債券価格

公式〔1´〕において，$P=A$，$S=C$，$R=-Cg$ とし，$a=(1+i)$ とおくと，

$$C=A(1+i)^n-Cg\cdot S_{\overline{n|}i}$$

$$A=C(1+i)^{-n}+Cg\cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$\therefore\quad A=C\{1-(i-g)a_{\overline{n|}i}\}$$

第２節(2)参照。

（3） 賦　金

公式〔1〕′から，R を求めると，

$$R=(S-P\cdot a^n)\cdot\frac{a-1}{a^n-1} \qquad 〔3〕$$

となって，これが均等払賦金の公式である。

ここで，$S=0$ および R を負とすれば償還賦金，$P=0$ とすれば積立賦金を求めることができる。

i　償還賦金

$$R=P\cdot\frac{a-1}{1-a^{-n}}$$

$a=(1+i)$　　とすれば　　$R=P\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

$$=P(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

第2節の〔503〕式となる。

$a=e^{\delta}$　　とすれば　　$R=P\cdot\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-\delta n}}$

ii　積立賦金

$$R=S\cdot\frac{a-1}{a^n-1}$$

$a=(1+i)$　　とすれば　　$R=S\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1}=S(S_{\overline{n}|})^{-1}$

$$=S\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}$$

第2節の〔603〕式となる。

$a=e^{\delta}$　　とすれば　　$R=S\cdot\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta n}-1}$

利率 i における**期首払年金**の場合の諸公式を掲げておく。

公式〔1〕,〔1〕′において，$b=aR$ とすればよい。

$$S=P\cdot a^n+R\cdot a\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

年金終価　　$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot(1+i)=R(S_{\overline{n+1}|}-1)$

年金現価 $P=R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i)=R(a_{\overline{n-1}|}+1)$

償還賦金 $R=P\cdot v(a_{\overline{n}|})^{-1}=P\cdot a_{\overline{1}|}(a_{\overline{n}|})^{-1}$

積立賦金 $R=S\cdot v(S_{\overline{n}|})^{-1}$

$=S\cdot v\{(a_{\overline{n}|})^{-1}-i\}=S\cdot a_{\overline{1}|}\{(a_{\overline{n}|})^{-1}-i\}$

4

複利変額年金について考察する。

各期末に支払われる年金額が必ずしも一定の規則に従わず変額する場合には，個々の年金の終価または現価を求め，その総和を算定するしか方法はない。以下は，（1）等差数列をなす場合（2）等比数列をなす場合について述べよう。

（1） 等差数列をなす年金

第1回年金を R，公差を Q とする。$Q>0$ のとき毎期末支払の年金額は増加し，$Q<0$ のときは年金額は減少する。

$b=\{R+(n-1-t)Q\}$ 〔$b>0$〕

とおくと，公式〔1〕，〔1〕′ は次のようになる。

（毎期年金額を逆の順に考えている）。

$$S=P\cdot a^n+\{R+(n-1-t)Q\}\sum_{t=0}^{n-1}a^t$$

$$=P\cdot a^n+R\cdot\sum_{t=0}^{n-1}a^t+Q\left\{(n-1)\sum_{t=0}^{n-1}a^t-\sum_{t=0}^{n-1}ta^t\right\}$$

ここで，$\sum_{t=0}^{n-1}ta^t$ を求めるために，$ta^t=f(t)$ とおき，

$$f(t+1)-a\cdot f(t)=a^{t+1}$$

の差分方程式の集計を求めると，

$$\sum_{t=1}^{n}f(t)-a\cdot\sum_{t=0}^{n-1}f(t)=\sum_{t=1}^{n}a^t$$

明らかに，$f(0)=0$ であるから，

$$\sum_{t=0}^{n-1} f(t)+f(n)-a\cdot\sum_{t=0}^{n-1} f(t)=\sum_{t=1}^{n} a^t$$

$$\therefore\quad \sum_{t=0}^{n-1} f(t)=\frac{f(n)-\sum_{t=1}^{n} a^t}{a-1}=\frac{na^n-\dfrac{a(a^n-1)}{a-1}}{a-1}$$

原式に代入すると，

$$S=P\cdot a^n+R\cdot\frac{a^n-1}{a-1}+Q\left\{\frac{(n-1)(a^n-1)}{a-1}-\frac{na^n-\dfrac{a(a^n-1)}{a-1}}{a-1}\right\}$$

$$=P\cdot a^n+R\cdot\frac{a^n-1}{a-1}+Q\cdot\frac{\dfrac{a^n-1}{a-1}-n}{a-1} \qquad \text{〔4〕}$$

これが，等差数列をなす年金の公式である。

$P=0$ とおけば年金終価，$S=0$，R および Q を負とおけば年金現価となる。

i　年金終価

$a=(1+i)$ 　とすれば　$S=R\cdot s_{\overline{n}|i}+Q\cdot\dfrac{s_{\overline{n}|i}-n}{i}$

$a=e^\delta$ 　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^\delta-1}+Q\cdot\dfrac{\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^\delta-1}-n}{e^\delta-1}$

ii　年金現価

$a=(1+i)$ 　とすれば　$P=R\cdot a_{\overline{n}|i}+Q\cdot\dfrac{a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|i}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|i}(1+ni)-n}{i}$$

$a=e^\delta$ 　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^\delta-1}+Q\cdot\dfrac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^\delta-1}-ne^{-\delta n}}{e^\delta-1}$

等差数列をなす年金終価を $(AS)_{\overline{n}|}$ と示し，$R=Q=1$ のときを $(IS)_{\overline{n}|}$〔逓加年金〕，$R=n$，$Q=-1$ のときを $(DS)_{\overline{n}|}$〔逓減年金〕と示すこともある。$(Aa)_{\overline{n}|}$ と $(Ia)_{\overline{n}|}$，$(Da)_{\overline{n}|}$ の関係も同様である。

$$(IS)_{\overline{n}|i}=S_{\overline{n}|i}+\frac{S_{\overline{n}|i}-n}{i}$$
$$=\frac{S_{\overline{n}|i}(1+i)-n}{i}=\frac{S_{\overline{n+1}|i}-(n+1)}{i}$$
$$=S_{\overline{1}|i}+S_{\overline{2}|i}+S_{\overline{3}|i}+\cdots\cdots+S_{\overline{n-1}|i}+S_{\overline{n}|i}$$
$$=\sum_{t=1}^{n}t(1+i)^{n-t}$$
$$(Da)_{\overline{n}|i}=n\cdot a_{\overline{n}|i}-\frac{a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$$
$$=\frac{n\{1-(1+i)^{-n}\}-a_{\overline{n}|i}+n(1+i)^{-n}}{i}$$
$$=\frac{n-a_{\overline{n}|i}}{i}$$
$$=a_{\overline{1}|i}+a_{\overline{2}|i}+a_{\overline{3}|i}+\cdots\cdots+a_{\overline{n-1}|i}+a_{\overline{n}|i}$$
$$=\sum_{t=1}^{n}(n+1-t)(1+i)^{-t}$$

iii　償還賦金

〔4〕式において，$S=0$，R およびQを負として R を求めればよい。

$a=(1+i)$　　とすれば　　$R=P(a_{\overline{n}|i})^{-1}-Q\left[\dfrac{1-n\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}}{i}\right]$

iv　積立賦金

〔4〕式において，$P=0$ として R を求めればよい。

$a=(1+i)$　　とすれば　　$S=R\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1}+Q\cdot\dfrac{\dfrac{a^n-1}{a-1}-n}{a-1}$

$$\therefore\quad R=S(S_{\overline{n}|i})^{-1}-Q\cdot\frac{1-n(S_{\overline{n}|i})^{-1}}{i}$$
$$=S\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}-Q\cdot\frac{1-n\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}}{i}$$

（2）　等比数列をなす年金

第1回年金を K，公比を r とする。ただし，$r>1$　のとき毎期末払の年金額は増加し，$1>r>0$　のときは年金額は減少する。

公式〔1〕，〔1〕′ において，$b=K\cdot r^{n-1-t}$ とすると，

$$S=P\cdot a^n+K\cdot r^{n-1}\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{a}{r}\right)^t$$

$$=P\cdot a^n+K\cdot r^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^n-1}{\frac{a}{r}-1}$$

$$=P\cdot a^n+K\cdot\frac{a^n-r^n}{a-r}\qquad(a\neq r)\qquad〔5〕$$

これが等比数列をなす年金の公式である。$P=0$ とおけば年金終価，$S=0$，K を負とおけば年金現価となる。

i　年金終価

$a=(1+i)$　とすれば　$S=K\cdot\dfrac{(1+i)^n-r^n}{1+i-r}$

$a=e^\delta$　とすれば　$S=K\cdot\dfrac{e^{\delta n}-r^n}{e^\delta-r}$

ii　年金現価

$a=(1+i)$　とすれば　$P=K\cdot\dfrac{1-r^n(1+i)^{-n}}{1+i-r}$

$a=e^\delta$　とすれば　$P=K\cdot\dfrac{1-r^ne^{-\delta n}}{e^\delta-r}$

なお，等差数列において，$Q=0$，等比数列において，$r=1$ の場合には，均等払年金となる。

5

次に，割引率（利息前払法）による場合について考察する。

まず，1年後の複割引終価は，

実効割引率　d　のとき　$(1-d)^{-1}$

名目割引率　$f_{(m)}$　のとき　$\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$

である。

いま，

$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$ を求めるには，第３節に準じて

$-\frac{m}{f_{(m)}}=x$　とおくと，$-m=x\cdot f_{(m)}$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{f_{(m)}}=e^{f_\infty}$$

$f_\infty=\delta'$　とおくと，次式を得る。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta'}$$

第３節の利率と上述の割引率の関係をまとめると，

$$1+i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{\delta}$$

$$=(1-d)^{-1}=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta'}$$

となり

$$\delta=\delta'$$

となる。すなわち，**瞬間切替においては，利率と割引率の区別はない。**[7)]

公式〔1〕′ において，a を

$$(1+i)\longrightarrow(1-d)^{-1}$$

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}\longrightarrow\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$$

と左右対応するものに置換すれば，次の諸公式を得る。（e^{δ} の場合には，変化はない。）

（1）　終価・現価

i　終　　価

$a=(1-d)^{-1}$　とすれば　$S=P(1-d)^{-n}$

$a=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$　とすれば　$S=P\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-mn}$

ii　現　　価

$a=(1-d)^{-1}$　とすれば　$P=S(1-d)^{n}$

$a=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$　とすれば　$P=S\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{mn}$

（2） 年金終価・年金現価

i　年金終価

$a=(1-d)^{-1}$　　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{(1-d)^{-n}-1}{(1-d)^{-1}-1}$

$$=R\cdot\frac{(1-d)^{-n}-1}{d}\cdot(1-d)$$

$a=\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{-mn}-1}{1-\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}}\cdot\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}$

ii　年金現価

$a=(1-d)^{-1}$　　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-(1-d)^{n}}{d}\cdot(1-d)$

$a=\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m}$　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{mn}}{1-\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}}\cdot\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}$

（3） 賦　　金

償還賦金は年金現価から R，積立賦金は年金終価から R を求めればよい。

〔問題2〕　1万円を5か月月賦，月利8.1%（日歩27銭）で貸付けた場合，期末払の元利均等償還法による償還表を示せ。ただし，利息はすべて円未満切捨とする。

a）　$i=8.1\%$

b）　$d=8.1\%$

〔解〕

a）第3節（3）i による周知のものである。

月	月初未済元金	利　　息	元金償還	月末支払額
1	10,000	810	1,701	2,511
2	8,299	672	1,839	2,511
3	6,460	523	1,988	2,511
4	4,472	362	2,149	2,511
5	2,323	188	2,323	2,511
計	——	2,555	10,000	12,555

b）第5節（3）による。

$$R=P(1-d)^{-1}\cdot\frac{d}{1-(1-d)^n}$$

$$=10,000\times(1-0.081)^{-1}\cdot\frac{0.081}{1-(1-0.081)^5}$$

$$=\underline{\underline{2,558(円)}}\quad（切捨）$$

月	月初未済元金（1）	利　息（2）	元金償還（3）	月末支払額（4）
1	10,000	881	1,677	2,558
2	8,323	733	1,825	2,558
3	6,498	572	1,986	2,558
4	4,512	397	2,161	2,558
5	2,351	207	2,351	2,558
計	——	2,790	10,000	12,790

（注）（2）=（1）×8.1%(1−8.1%)$^{-1}$
　　　（3）=（4）−（2）

6

積分を利用する場合について考察する。

公式〔1〕において，

$$u(n)=a^n\cdot u(0)+b\int_0^n a^t\,dt$$

$$=a^n\cdot u(0)+b\left[\frac{a^t}{\log_e a}\right]_0^n$$

$$=a^n\cdot u(0)+b\cdot\frac{a^n-1}{\log_e a}$$

ここで，$u(0)=P$，$u(n)=S$，$b=R$ とすると，

$$\boldsymbol{S=P\cdot a^n+R\cdot\frac{a^n-1}{\log_e a}} \qquad 〔1〕''$$

となる。これは連続払年金の公式である。**連続払には，期末払と期首払の区別はない。**[8)]

（1）年金終価・年金現価

〔1〕″ 式において，$P=0$ とすれば年金終価，$S=0$，R を負とすれば年金現価を求めることができる。

i　年金終価

$a=(1+i)$　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{\delta}$

$=R\cdot\bar{S}_{\overline{n}|i}$

$a=e^{\delta}$　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{e^{\delta n}-1}{\delta}$

$a=(1-d)^{-1}$　とすれば　$S=R\cdot\dfrac{(1-d)^{-n}-1}{\delta}$

ii　年金現価

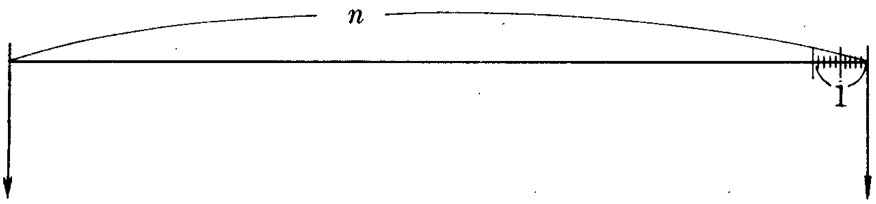
$a=(1+i)$　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}$

$=R\bar{a}_{\overline{n}|i}$

$a=e^{\delta}$　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$

$a=(1-d)^{-1}$　とすれば　$P=R\cdot\dfrac{1-(1-d)^n}{\delta}$

次に，n 年後の 1 か年間連続年金の現価を図示すると，次のようである。[9]



$\dfrac{i}{\delta}\cdot(1+i)^{-n}$　　$\dfrac{i}{\delta}=\bar{S}_{\overline{1}|i}$

$\dfrac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-\delta n}$　　$\dfrac{e^{\delta}-1}{\delta}=\bar{S}_{\overline{1}|}$ at δ

$$\bar{S}_{\overline{1}|}\cdot a^{-n}=\bar{a}_{\overline{1}|}\cdot a^{-(n-1)}$$

$$=(n-1)|\bar{a}_{\overline{1}|}=\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{\overline{n-1}|}$$

$a=(1+i)$　とすれば　$\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}-\dfrac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{\delta}$

$$=\frac{i}{\delta}\cdot(1+i)^{-n}$$

$a=e^{\delta}$ とすれば $\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-\dfrac{1-e^{-\delta(n-1)}}{\delta}$

$$=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-\delta n}$$

(2) 賦　金

〔1〕″式において，$S=0$，Rを負としてRを求めれば償還賦金，$P=0$としてRを求めれば積立賦金を得られる。

i 償還賦金

$a=(1+i)$ とすれば $R=P\cdot\dfrac{\delta}{1-(1+i)^{-n}}$

$$=P(\bar{a}_{\overline{n|}i})^{-1}$$

$a=e^{\delta}$ とすれば $R=P\cdot\dfrac{\delta}{1-e^{-\delta n}}$

ii 積立賦金

$a=(1+i)$ とすれば $R=S\cdot\dfrac{\delta}{(1+i)^{n}-1}$

$$=S(\bar{S}_{\overline{n|}i})^{-1}=S\{(\bar{a}_{\overline{n|}i})^{-1}-\delta\}$$

$a=e^{\delta}$ とすれば $R=S\cdot\dfrac{\delta}{e^{\delta n}-1}$

(3) 変額年金

〔1〕式において，$u(0)=P$，$u(n)=S$，$b=R+(n-t)Q$ 〔$b>0$〕とし，積分を利用する。

$$S=P\cdot a^{n}+\{R+(n-t)Q\}\int_{0}^{n}a^{t}\ dt$$

$$=P\cdot a^{n}+R\int_{0}^{n}a^{t}\ dt+Q\left(n\int_{0}^{n}a^{t}\ dt-\int_{0}^{n}ta^{t}\,dt\right)$$

$$=P\cdot a^{n}+R\left[\frac{a^{t}}{\log_{e}a}\right]_{0}^{n}+Q\left(n\left[\frac{a^{t}}{\log_{e}a}\right]_{0}^{n}-\left[\frac{a^{t}(t\cdot\log_{e}a-1)}{(\log_{e}a)^{2}}\right]_{0}^{n}\right)$$

$$=P\cdot a^{n}+R\cdot\frac{a^{n}-1}{\log_{e}a}+Q\cdot\frac{\dfrac{a^{n}-1}{\log_{e}a}-n}{\log_{e}a}\qquad〔4〕''$$

これが等差数列をなす連続払年金の公式である。

また，$b=Kr^{n-t}$　とおくと，

$$S=P\cdot a^n+Kr^{n-t}\int_0^n a^t\ dt$$

$$=P\cdot a^n+Kr^n\int_0^n\left(\frac{a}{r}\right)^t\ dt$$

$$=P\cdot a^n+K\cdot\frac{a^n-r^n}{\log_e\left(\dfrac{a}{r}\right)} \qquad 〔5〕''$$

これが等比数列をなす連続払年金の公式である。

i　年金終価

〔4〕″，〔5〕″ 式において，$P=0$　とする。

$a=(1+i)$　とすれば　$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{(1+i)^n-1}{\delta}-n}{\delta}$$

$$S=K\cdot\frac{(1+i)^n-r^n}{\delta-\log_e r}$$

$a=e^\delta$　とすれば　$$S=R\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{e^{\delta n}-1}{\delta}-n}{\delta}$$

$$S=K\cdot\frac{e^{\delta n}-r^n}{\delta-\log_e r}$$

ii　年金現価

〔4〕″，〔5〕″ 式において，$S=0$, R, Q, および K を負とする。

$a=(1+i)$　とすれば　$$P=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$$P=K\cdot\frac{1-r^n(1+i)^{-n}}{\delta-\log_e r}$$

$a=e^\delta$　とすれば　$$P=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

$$P=K\cdot\frac{1-r^{n}e^{-\delta n}}{\delta-\log_{e}r}$$

〔問題3〕 初年度1,000万円で毎年50万円ずつ減少する純利益を10年間あげる資産がある。残存価額0として，次の条件で現価を求めよ。

a） 年1回払で利率年 $i=10\%$

b） 連続払で利率年 $i=10\%$

c） 連続払で利力年 $\delta=10\%$

〔解〕

a） 第4節（1）ii の次式による。

$$P=R\cdot a_{\overline{n}|i}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|i}(1+ni)-n}{i}$$

$$(Aa)_{\overline{10}|10\%}=1,000\times a_{\overline{10}|10\%}-50\times\frac{a_{\overline{10}|10\%}(1+10\times0.1)-10}{0.1}$$

$$=1,000\times6.14457-50\times\frac{6.14457\times2-10}{0.1}$$

$$=6,144.57-1,144.57=\underline{\underline{5,000(\text{万円})}}$$

b） 本節（3）ii の次式による。

$$P=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}-n(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$$(A\bar{a})_{\overline{10}|10\%}=1,000\times\bar{a}_{\overline{10}|10\%}-50\times\frac{\bar{a}_{\overline{10}|10\%}-10(1+0.1)^{-10}}{\delta}$$

$$=1,000\times\bar{S}_{\overline{1}|}\cdot a_{\overline{10}|}\ at10\%-50\times\frac{\bar{S}_{\overline{1}|}\cdot a_{\overline{10}|}\ at10\%-10(1+0.1)^{-10}}{\delta}$$

ただし， $\bar{S}_{\overline{1}|10\%}=\dfrac{0.1}{\delta}=1.0492\ 06$

$$=1,000\times1.0492\ 06\times6.1445\ 67$$

$$-50\times\frac{1.0492\ 06\times6.1445\ 67-10\times0.3855\ 43}{0.0953\ 10}$$

$$=6,446.92-1,359.50=\underline{\underline{5,087(\text{万円})}}$$

c） 本節（3）ii の次式による。

$$P=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

ただし， $\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=\bar{a}_{\overline{n}|}\ at\ \delta$ と略記する。

$$(A\bar{a})_{\overline{10}|}\ at\ \delta=1,000\times\bar{a}_{\overline{10}|}\ at\ \delta-50\times\frac{\bar{a}_{\overline{10}|}\ at\ \delta-10e^{-0.1\times10}}{\delta}$$

$$=1,000\times\bar{S}_{\overline{1}|}\cdot a_{\overline{10}|}\ at\ \delta-50\times\frac{\bar{S}_{\overline{1}|}\cdot a_{\overline{10}|}\ at\ \delta-10e^{-1}}{\delta}$$

ただし， $\bar{S}_{\overline{1}|}\ at\ \delta=\frac{e^{0.1}-1}{0.1}$, $a_{\overline{10}|}\ at\ \delta=\frac{1-e^{-10\delta}}{e^{0.1}-1}$

$$=1,000\times1.0517\ 09\times6.0104\ 12$$

$$-50\times\frac{1.0517\ 09\times6.0104\ 12-10\times0.3678\ 79}{0.0953\ 10}$$

$$=6,321.20-1,386.22=\underline{\underline{4,935(\text{万円})}}$$

7

本節は，興味ある諸点を補説する。

$$(Da)_{\overline{n}|i}=\sum_{t=1}^{n}(n+1-t)(1+i)^{-t}$$

$$=(n+1)a_{\overline{n}|i}-(Ia)_{\overline{n}|i}$$

$$=(n+1)a_{\overline{n}|i}+(1+i)\frac{d}{di}(a_{\overline{n}|i}) \qquad 10)$$

$$\sum_{t=1}^{n}t^2(1+i)^{-t}=(1+i)^2\frac{d^2}{di^2}(a_{\overline{n}|i})+(1+i)\frac{d}{di}(a_{\overline{n}|i})$$

$$=v+2^2v^2+3^2v^3+\cdots\cdots+n^2v^n$$

$$=\frac{2a_{\overline{n}|i}-(1+i)^{-1}-(n^2+2n-1)(1+i)^{-(n+1)}+n^2(1+i)^{-(n+2)}}{i^2(1+i)^{-2}} \qquad 11)$$

以下の諸式は従来 $e^{\delta t}$ で示されたものを，今回 a^t に拡張して示したものである。

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|}=\int_0^n ta^{-t}\ dt=\left[t\int a^{-t}\ dt-\iint a^{-t}\ dt^2\right]_0^n \qquad 12)$$

$$(D\bar{a})_{\overline{n}|}=\int_0^n(n-t)a^{-t}\ dt=n\int_0^n a^{-t}\ dt-\int_0^n ta^{-t}\ dt$$

$$=\int_0^n\int_0^t a^{-t}\ dt^2=\int_0^n\bar{a}_{\overline{t}|}\ at \qquad 13)$$

$$\int_0^n t^2 a^t \ dt = \left[\frac{t^2 a^t}{\log_e a} - \frac{2}{\log_e a}\int t a^t \ dt\right]_0^n$$

$$= \left[\frac{t^2 a^t}{\log_e a} - \frac{2}{\log_e a}\left\{\frac{t a^t}{\log_e a} - \frac{a^t}{(\log_e a)^2}\right\}\right]_0^n$$

$$= \frac{n^2 a^n}{\log_e a} - \frac{2\,n a^n}{(\log_e a)^2} + \frac{\dfrac{2(a^n-1)}{\log_e a}}{(\log_e a)^2} \quad 14)$$

最後に，公式〔1〕を減価償却に適用した場合を付記しておく。

取得原価　$C = u(0)$

残存価額　$S = u(n)$

耐用期数　n

t 期末の帳簿価額　$B_t = u(t)$

t 期末の減価償却額　D_t

とする。

（1） $a=1$ の場合

公式〔1〕は，

$$u(n) = u(0) + b \cdot n$$

となり， t 期について考えると，

$$u(t) = u(0) + b \cdot t$$

となる。

いま，　$b = -\dfrac{C-S}{n}$ とおくと，

$$B_t = C - \frac{C-S}{n} \cdot t$$

$$D_t = B_{t-1} - B_t = \frac{C-S}{n}$$

となって，定額法の場合である。

また，

$$b = -(C-S) \cdot \frac{2\,n-t+1}{n(n+1)}$$

とおくと，

$$B_t=C-(C-S)\cdot\frac{2n-t+1}{n(n+1)}\cdot t$$

$$D_t=B_{t-1}-B_t=\frac{C-S}{n(n+1)}\{(2n-t+1)t-(2n-t+2)(t-1)\}$$

$$=(C-S)\cdot\frac{2(n-t+1)}{n(n+1)}$$

となって，年次数総和法の場合である。

(2)　$a=\left(\frac{S}{C}\right)^{\frac{1}{n}}=1-r$　,　$b=0$　の場合

公式〔1〕は

$$u(n)=a^t\cdot u(0)$$

となるから，t 期において，

$$B_t=C(1-r)^t$$

$$D_t=B_{t-1}-B_t=C(1-r)^{t-1}\cdot r$$

となって，いわゆる定率法の場合であり，r は償却定率である。

注 1)　$\lim_{r\to 0}\frac{(1+r)^n-1}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{d}{dr}\{(1+r)^n-1\}}{\frac{d}{dr}(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{n(1+r)^{n-1}}{1}=n$

2)　本式は，〔201〕式において，

$P=A$　,　$S=C+Cg\cdot S_{\overline{n}|r}$

とおいたものであって，かつての拙稿とは異なる立場のものであることに注意せられたい。

"債券投資計算における再投資利率の導入"　商業数学会誌　第30号 (1977.2)

3)　$\lim_{r\to 0}\frac{S_{\overline{n}|r}-n}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{(1+r)^n-1-nr}{r^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{d^2}{d^2r}\{(1+r)^n-1-nr\}}{\frac{d^2}{d^2r}(r^2)}=\frac{n(n-1)}{2!}$

4)　$\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+t_i}$　の計算は，次書によった。

佐藤信吉：単利計算の理論と応用　p.104

5)　経営数学書に，

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+P(1+i)^n$$

を中心に会計数理を説明するものがあること、およびその変化について既に論究したことがある。

拙 稿：会計数理の基本公式 城西経済学会誌 第6巻第1号 (1970.4)

なお，本稿第3節以降は，上記論文ならびに次の論文をより総括整理したものである。

拙 稿：利息算への差分と積分の応用 城西経済学会誌 第14巻第1号(1978.9)

6) Cf. A Wayne Corcoran, Robert K. Mautg : Mathematical applications in Accounting 1967年 p.21

7) 拙 著：新会計数理 p.148

8) 前掲書 p.141

9) 拙 稿：EE における利息計算 城西経済学会誌 第4巻第1号 (1969.9) 参照。

10) $(Ia)_{\overline{n}|i}=-(1+i)\frac{d}{di}(a_{\overline{n}|i})$

D.W.A. Donald : Compound Interest and Annuities-certain 2nd ed. 1956年 p.54

N.E. Sheppard, D.C. Baille : Compound Interest 1966年 p.81

11) Cf. D.W.A. Donald : op. cit. p.55

R. Todhunter : Compound Interest and Annuities-Certain 4th ed. 1937年 p.50

12) Cf. D.W.A. Donald : op. cit. p.57

H.E. Stelson : Mathematics of Finance 1957年 p.128

13) Cf. H.E. Stelson : op. cit. pp.127—128, 132

14) Cf. D.W.A. Donald : op. cit. p.69

(1979.7.14 稿)