変 額 年 金

野 沢 孝之助

ま え が き

変額年金は，財務数学・投資計画計算においてよく見受けられる。筆者も既述したことがある[1)]が，本稿はその後の研究を踏まえて，これを整備せんとするものである。

本稿は，年金現価について述べるにとどめるが，年金終価については，これから簡単に推察することが可能であろう。

なお，計算には，便宜すべて電卓 HP 38 E を利用することとする。

1

t 期末における支払金を $R(t)$ とおくと，その n 期間の期末払年金現価は，

$$\sum_{t=1}^{n} R(t)\cdot V^t \qquad V^t \text{ は } t \text{ 期の現価率} \qquad \text{〔100〕}$$

である。

以下，$R(t)$ の特別の場合について論究する。

まず，$V^t=(1+i)^{-t}=v^t$ と，1期の利率を i とおく。

（1） $R(t)=R(1+g)^{t-1}$ のとき

R は $R(1)$ で第1期の支払金，g は等比数列的増減率

$$\sum_{t=1}^{n} R(1+g)^{t-1}\cdot v^t$$

$$=\frac{R}{1+g}\cdot\sum_{t=1}^{n}\{(1+g)v\}^t$$

$$=R\circ\frac{1-(1+g)^n\circ v^n}{i-g}\qquad i\neq g\qquad [101]$$

特に，$i=g$ のときは，〔101〕式は　nRv　となる。

ここで，$(1+g)v=v'=\dfrac{1}{1+i'}$　とおけば，〔101〕式は

$$\frac{R}{1+g}\cdot\sum_{t=1}^{n}v'^{\,t}=\frac{R}{1+g}\circ a_{\overline{n}|i'}\qquad [101]'$$

$$\text{ただし，}a_{\overline{n}|i'}=\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$

と，電卓の利用に便利な変形式を得る。

なお，$i<g$　のときは　$v'>1$, $i'<0$　となるが，〔101〕′ 式の計算には支障はない[2)]。

また，$R(t)$ には当然に，$R(t)>0$　の制限があるから，$R(1+g)^{t-1}>0$ ゆえに，$1+g>0$　すなわち　$g>-1$　の制限がある。従って，

$g>0$　　なれば　$R(t)$ は増加関数

$-1<g<0$　なれば　$R(t)$ は減少関数

（$g=0$　の場合，第 7 節参照）。

となる。これらの諸点は，以下においても同様である。

（2）　$R(t)=R+(t-1)Q$　のとき

Q は等差数列的増減額

$$\sum_{t=1}^{n}\{R+(t-1)Q\}v^t=(R-Q)\sum_{t=1}^{n}v^t+Q\circ\sum_{t=1}^{n}tv^t$$

$$=(R-Q)a_{\overline{n}|}+Q\circ\frac{a_{\overline{n}|}(1+i)-nv^n}{i}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\qquad [102]$$

[3)]

これを変形して，次の電卓利用に便利な式を得る。

$$\left(R+\frac{Q}{i}\right)a_{\overline{n}|}-\frac{Q}{i}\circ nv^n\qquad [102]'$$

また，$R(t)>0$　の制限から，$R+(t-1)Q>0$　ゆえに，$Q>-\dfrac{R}{t-1}$

の制限がある。従って，

$$Q>0 \quad \text{なれば}\quad R(t)\ \text{は増加関数}$$

$$-\frac{R}{t-1}<Q<0 \quad \text{なれば}\quad R(t)\ \text{は減少関数}$$

（$Q=0$　の場合，第７節参照)。

となる。これらの諸点は，以下においても同様である。

〔計算例１〕 耐用年数６か年のある機械がある。その保修費が，第１年末￥50,000 第２年末 ￥55,000 第３年末 ￥60,500 と等比数列的に漸増すると仮定すれば，評価利率年15％で，この保修費の年金現価はいくらとなるか。

以下，答数はすべて円未満４捨５入とする。

〔解〕

〔101〕′式による。末尾（**第１図**）参照[4]。　￥234,105

〔計算例２〕 計算例１において，保修費を第１年末￥50,000 第２年末￥55,000 第３年末60,000と等差数列的に漸増するとすると，年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔102〕′式による。末尾（**第２図**）参照[5]。　￥228,908

2

次に，$V^t=e^{-\delta t}$　と１期の利率を $e^\delta-1$ とおく。　$1+i=e^\delta$

（１） $R(t)=R(1+g)^{t-1}$　のとき

$$\sum_{t=1}^{n} R(1+g)^{t-1}\cdot e^{-\delta t}$$

$$=\frac{R}{1+g}\cdot\sum_{t=1}^{n}\{(1+g)e^{-\delta}\}^t$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+g)^n\cdot e^{-\delta n}}{e^\delta-(1+g)} \qquad e^\delta-1\neq g \tag{201}$$

ここで，$(1+g)e^{-\delta}=e^{-\delta'}$ とおけば，〔201〕式は

$$\frac{R}{1+g}\cdot\frac{1-e^{-\delta' n}}{e^{\delta'}-1}$$

$$=\frac{R}{1+g}\cdot a_{\overline{n}|}\ \text{at}\ (e^{\delta'}-1) \qquad 〔201〕'$$

となる。

（2） $R(t)=R+(t-1)Q$ 　のとき

$$\sum_{t=1}^{n}\{R+(t-1)Q\}e^{-\delta t}$$

$$=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}+Q\cdot\frac{\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} \qquad 〔202〕$$ [6)]

ただし，$a_{\overline{n}|}$ at $(e^{\delta}-1)$

$$=\left(R+\frac{Q}{e^{\delta}-1}\right)a_{\overline{n}|}-\frac{Q}{e^{\delta}-1}\cdot ne^{-\delta n} \qquad 〔202〕'$$

〔計算例3〕 計算例1において，評価利率を $e^{0.15}-1$ とすれば，保修費の年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔201〕′ 式による。末尾（**第1図**）において，1.15 を .15 g e^x ∧ と入換えればよい。 ¥226, 199

〔計算例4〕 計算例2において，評価利率を $e^{0.15}-1$ とすれば，保修費の年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔202〕′ 式による。末尾（**第2図**）において，15 i を .15 g e^x ∧ 1− STO 2 100 × i, ENTER .15 を RCL 2 と入換えればよい。 ¥221, 269

3

本節においては，住宅ローンで行なわれることがある1年ごとに等比数列ま

たは数差数列をなす変額年金における月賦金について考察する。

（1）Pを期限n年，月利iの月賦償還で借り入れ，1か月後から最初のm年間は，それぞれ1か年ごとに毎月$R, R(1+g), R(1+g)^2, \cdots\cdots, R(1+g)^{m-1}$ずつ，その後は毎月$R(1+g)^m$ずつの定額を支払うものとする。

$$P=R\cdot a_{\overline{12}|}+v^{12}\cdot R(1+g)a_{\overline{12}|}+v^{24}(1+g)^2\cdot a_{\overline{12}|}+\cdots\cdots$$
$$+v^{12(m-1)}\cdot R(1+g)^{m-1}\cdot a_{\overline{12}|}+v^{12m}\cdot R(1+g)^m\cdot a_{\overline{12(n-m)}|}$$

ここで，$v^{12}(1+g)=1+i''$とおけば，

$$P=R\cdot a_{\overline{12}|i}\{1+(1+i'')+(1+i'')^2+\cdots\cdots$$
$$+(1+i'')^{m-1}\}+R\cdot a_{\overline{12(n-m)}|i}(1+i'')^m$$
$$=R\{a_{\overline{12}|i}\cdot S_{\overline{m}|i''}+a_{\overline{12(n-m)}|i}(1+i'')^m\}$$

ただし，$S_{\overline{m}|i''}=\dfrac{(1+i'')^m-1}{i''}$

$$\therefore\quad R=\frac{P}{(a_{\overline{12}|i}\cdot a_{\overline{m}|i''}+a_{\overline{12(n-m)}|i})(1+i'')^m} \qquad 〔301〕^{7)}$$

（2）Pを期限n年，月利iの月賦償還で借り入れ，1か月後から最初のm年間は，それぞれ1年後ごとに毎月R, $R+Q$, $R+2Q, \cdots\cdots, R+(m-1)Q$ずつ，その後は毎月$R+mQ$ずつ定額を支払うものとする。

$$P=R\cdot a_{\overline{12n}|}+Q\{(a_{\overline{24}|}-a_{\overline{12}|})+2(a_{\overline{36}|}-a_{\overline{24}|})+\cdots\cdots$$
$$+(m-1)(a_{\overline{12m}|}-a_{\overline{12(m-1)}|})+m(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12m}|})\}$$
$$=R\cdot a_{\overline{12n}|}-Q(a_{\overline{12}|}+a_{\overline{24}|}+\cdots\cdots+a_{\overline{12(m-1)}|}+a_{\overline{12m}|})+mQ\cdot a_{\overline{12n}|}$$
$$=(R+mQ)a_{\overline{12n}|}-Q\cdot\frac{m-\dfrac{a_{\overline{12m}|}}{S_{\overline{12}|}}}{i}$$
$$=(R+mQ)a_{\overline{12n}|}-Q\cdot\frac{m+1-\dfrac{a_{\overline{12(m+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}}{i}$$
$$\therefore\quad R=\frac{P+\dfrac{Q}{i}\left(m+1-\dfrac{a_{\overline{12(m+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right)}{a_{\overline{12n}|}}-mQ \qquad 〔302〕^{8)}$$

〔計算例5〕　ローン¥4,000,000を期限30年，利率$j_{(12)}=8.4\%$の月賦償還法で借り入れた。1か月後から最初の5か年間はそれぞれ1か年ごとに毎月R

円，$1.05R$ 円，1.05^2R 円,……, 1.05^4R 円を，その後は毎月 1.05^5R 円を支払うものとする。第1年の月賦金はいくらとなるか。

〔解〕

〔301〕式による。

$8.4\% \div 12 = 0.7\%$　　月利

末尾（**第3図**）参照。　¥25,201

〔計算例6〕 計算例5において，最初の5年間は，それぞれ1年ごとに，毎月 R 円，$(R+2,000)$ 円，$(R+4,000)$ 円. ……, $(R+8,000)$ 円，をその後は $(R+10,000)$ 円の定額を支払うものとする。第1年の月賦金はいくらとなるか。

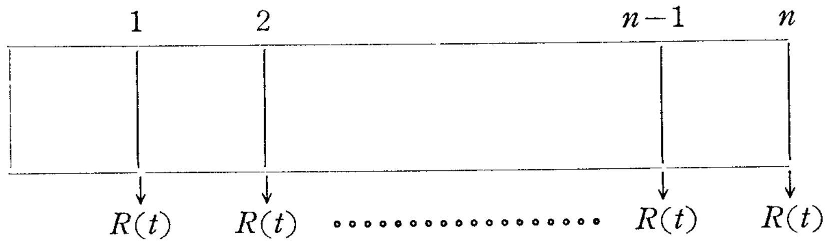
〔解〕

〔302〕式による。

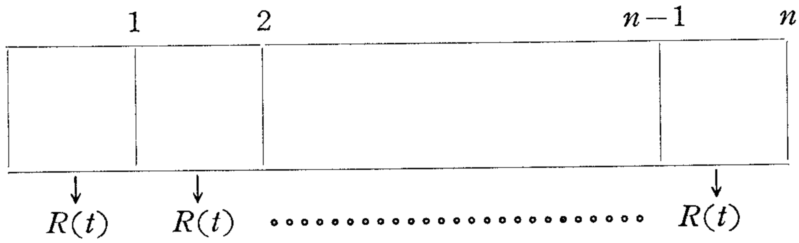
末尾（**第4図**）参照。　¥22,831

4

第1節，第2節においては，次図の如く毎期末に支払われるものとしている。



これらの支払を，毎期中央時において行なわれるものと仮定すると，下図のようになる。



まず，評価利率を i とする。

$$R\cdot\frac{1-(1+g)^n\cdot v^n}{i-g}\cdot(1+i)^{1/2} \qquad [401]$$

$$=\frac{R}{1+g}\cdot a_{\overline{n}|i'}\cdot(1+i)^{1/2} \qquad (1+g)v=v'$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|i'}\cdot(1+i')^{1/2}(1+g)^{-1/2} \qquad [401]'$$

$$\left\{R\cdot a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\right\}(1+i)^{1/2} \qquad [402]$$

$$=\left\{\left(R+\frac{Q}{i}\right)a_{\overline{n}|}-\frac{Q}{i}\cdot nv^n\right\}(1+i)^{1/2} \qquad [402]'$$

となる。

次に，評価利率を $e^\delta-1$ とする。

$$R\cdot\frac{1-(1+g)^n\cdot e^{-\delta n}}{e^\delta-(1+g)}\cdot e^{\delta/2} \qquad [411]$$

$$=\frac{R}{1+g}\cdot a_{\overline{n}|}\cdot e^{\delta/2} \qquad (1+g)e^{-\delta}=e^{-\delta'}$$

$$a_{\overline{n}|} \text{ at } (e^{\delta'}-1)$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|}\cdot e^{\delta'/2}\cdot(1+g)^{-1/2} \qquad [411]'$$

$$\left\{R\cdot a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-ne^{-\delta n}}{e^\delta-1}\right\}e^{\delta/2} \qquad [412]$$

$$a_{\overline{n}|} \text{ at } (e^{\delta}-1)$$

$$=\left\{\left(R+\frac{Q}{e^\delta-1}\right)a_{\overline{n}|}-\frac{Q}{e^\delta-1}\cdot ne^{-\delta n}\right\}e^{\delta/2} \qquad [412]'$$

5

本節および次節においては，連続変額年金について考察する。

$$\int_0^n \boldsymbol{R(t)\cdot V^t\ dt} \qquad [500]$$

まず，$V(t)=v^t$　とおく。

(1)　$R(t)=R(1+g)^t$　のとき

$$\int_0^n R(1+g)^t \cdot v^t\, dt$$

$$= R\int_0^n \{(1+g)v\}^t\ dt = R\left[\frac{\{(1+g)v\}^t}{L_n\{(1+g)v\}}\right]_0^n$$

L_n 自然対数を示す。

$$= R\cdot\frac{1-(1+g)^n\cdot v^n}{\delta - L_n(1+g)} \qquad i \neq g \qquad 〔501〕$$

ここで，$(1+g)v = v'$ とおけば，〔501〕式は，

$$R\int_0^n v'^t\ dt = R\left[\frac{v'^t}{L_n\, v'}\right]_0^n$$

$$= R\cdot\frac{1-v'^n}{\delta'} = R\cdot a_{\overline{n}|i'}\ \frac{i'}{\delta'} \qquad 〔501〕'$$

となる。

（２）　$R(t) = R + tQ$　のとき

$$\int_0^n (R+tQ)v^t\, dt$$

$$= R\int_0^n v^t\, dt + Q\int_0^n tv^t\, dt$$

$$= R\left[\frac{v^t}{L_n\, v}\right]_0^n + Q\left[\frac{v^t(t\cdot L_n\, v - 1)}{(L_n\, v)^2}\right]_0^n$$

$$= R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|} + Q\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta} \qquad 〔502〕$$

ただし，$\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{\delta}$ [9]

$$= \left(R + \frac{Q}{\delta}\right)\bar{a}_{\overline{n}|} - \frac{Q}{\delta}\cdot nv^n \qquad 〔502〕'$$

〔計算例７〕　計算例１を連続増額の連続払とすれば，年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔501〕′式による。

末尾（**第５図**）参照。　¥263, 325

〔計算例８〕 計算例２を連続増額の連続払とすれば，年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔502〕′ 式による。

末尾（**第６図**）参照。　$\underline{\underline{¥255,594}}$

6

次に，$V^t=e^{-\delta t}$ とおく。

（１） $R(t)=R(1+g)^t$ 　のとき

$$\int_0^n R(1+g)^t \cdot e^{-\delta t}\,dt = R\int_0^n \{(1+g)e^{-\delta}\}^t\,dt$$

$$=R\left[\frac{\{(1+g)e^{-\delta}\}^t}{L_n\{(1+g)e^{-\delta}\}}\right]_0^n$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+g)^n\cdot e^{-\delta n}}{\delta-L_n(1+g)} \qquad e^{\delta}-1\fallingdotseq g \qquad 〔601〕$$

ここで，$(1+g)e^{-\delta}=e^{-\delta'}$ とおけば，〔601〕式は

$$R\int_0^n e^{-\delta' t}\,dt=R\left[\frac{e^{-\delta' t}}{-\delta'}\right]_0^n$$

$$=R\cdot\frac{1-e^{-\delta' n}}{\delta'} \qquad 〔601〕'$$

となる。

（２） $R(t)=R+tQ$ 　のとき

$$\int_0^n (R+tQ)e^{-\delta t}\,dt$$

$$=R\int_0^n e^{-\delta t}\,dt+Q\int_0^n te^{-\delta t}\,dt$$

$$=R\left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\right]_0^n+Q\left[\frac{e^{-\delta t}(t\cdot L_n\,e^{-\delta}-1)}{(L_n\,e^{-\delta})^2}\right]_0^n$$

[10]

$$=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta} \qquad 〔602〕$$

$$=\left(R+\frac{Q}{\delta}\right)\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-\frac{Q}{\delta}\cdot ne^{-\delta n} \qquad 〔602〕'$$

〔計算例9〕 計算例3において，連続増額の連続仏とすれば，年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔601〕′式による。

末尾（**第5図**）において，1.15 ENTER を .15 g e^x ∧ と入換えればよい。 ¥255, 749

〔計算例10〕 計算例4において，連続増額の連続払とすれば，年金現価はいくらとなるか。

〔解〕

〔602〕′式による。 ¥248, 370

末尾（**第6図**）において，次の置換えを行えばよい。

1.15 ENTER 6	を	.15 ENTER 6 ×
g y^x	を	g e^x
1.15 g L_n ∧	を	.15

7

前節まで（第3節を除く）において，g または Q を0とすると，次のような等額年金となる。

〔101〕式 〔102〕式	$R\cdot\frac{1-v^n}{i}=R\cdot a_{\overline{n}\rceil}$
〔201〕式 〔202〕式	$R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=R\cdot a_{\overline{n}\rceil}$ at $(e^{\delta}-1)$
〔401〕式 〔402〕式	$R\cdot a_{\overline{n}\rceil}(1+i)^{1/2}$
〔411〕式 〔412〕式	$R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}\cdot e^{\delta/2}=R\cdot a_{\overline{n}\rceil}\cdot e^{\delta/2}$ at $(e^{\delta}-1)$
〔501〕式 〔502〕式	$R\cdot\frac{1-v^n}{\delta}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}\rceil}$

〔601〕式
〔602〕式
$$R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\ \text{at}\ (e^{\delta}-1)$$

また，$R(t)=t$　とおくと，1, 2, 3, ……, n の逓加年金 $(Ia)_{\overline{n}|}$ が得られる。

$$\sum_{t=1}^{n}tv^{t}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv}{i}\qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}=(1+i)a_{\overline{n}|}$$

$$\sum_{t=1}^{n}te^{-\delta t}=\frac{\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}\cdot e^{\delta}-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-ne^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}\qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}\ \text{at}\ (e^{\delta}-1)$$

$$\int_0^n tv^t\,dt=\left[\frac{v^t(t\cdot L_n v-1)}{(L_n v)^2}\right]_0^n=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{\delta}$$ 11)

$$\int_0^n te^{-\delta t}\,dt=\left[\frac{e^{-\delta t}(t\cdot L_n e^{-\delta}-1)}{(L_n e^{-\delta})^2}\right]_0^n=\frac{\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

$$=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}-ne^{-\delta n}}{\delta}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|}\ \text{at}\ (e^{\delta}-1)$$

これは，$Q=R=1$　とおいた場合である。

同様に，$R(t)=n-t+1$ とおくと，$n, n-1, n-2,$ ……, 1 の逓減年金 $(Da)_{\overline{n}|}$ が得られる。これは，$R=n$, $Q=-1$ とおいた場合である。

最後に，保修費などにおいては，保守的思考によって，期首払と考えることもあるが，変形は簡単であろう。

進んで，評価利率が変率する場合における変率変額年金については，別稿[12]で論究しているので本稿では触れない。

(第1図)	(第2図)	(第3図)		
END	END	END		
f FIN	f FIN	f FIN	STO 1	$x \rightleftarrows y$
6	6	5	12	÷
n	n	n	n	f 0
(1+.1)	15	1.05	.7	
ENTER	i	ENTER	i	
(1+.15)	5,000	1,007	PV	**¥25,201**
f $\Delta\%$	ENTER	ENTER	<	
i	.15	12	RCL 1	
50,000	−	g y^x	×	
$x \rightleftarrows y$	STO 1	<	STO 2	
−	50,000	÷	300	
CHS	+	STO 0	n	
PMT	CHS	1	PV	
PV	PMT	−	<	
<	RCL 1	100	RCL 2	
f 0	RCL n	×	+	
	×	i	RCL 0	
	FV	1	5	
¥234,105	PV	CHS	g y^x	
	<	PMT	<	
	f 0	PV	×	
		<	4,000,000	
	¥228,908	↗	↗	

(注) ( )は暗算
<は瞬時待

（第 4 図）

END
f FIN
(12×30)
n
.7
i
1
CHS
PMT
PV
<
STO 1
12
n
PV
<
STO 2
(12×6)
n
PV
<
RCL 2
↗

÷
6
$x \rightleftarrows y$
−
2,000
×
.007
÷
4,000,000
+
RCL 1
÷
5
ENTER
2,000
×
−
f 0
¥22,831

（第 5 図）

1.15
ENTER
1.1
÷
STO 0
6
CHS
g y^x
<
1
$x \rightleftarrows y$
−
RCL 0
g L_n
<
÷
50,000
×
f 0
¥263,325

（第 6 図）

1.15
ENTER
6
CHS
g y^x
<
STO 1
1
$x \rightleftarrows y$
−
1.15
g L_n
<
STO 2
÷
5,000
RCL 2
÷
STO 3
50,000
+
×
↗

RCL 3
6
×
RCL 1
×
−
f 0
¥255,594

1) 拙著：新会計数理 1976 p. 19—p. 22
拙稿：投資計算の基礎公式について 城西経済学会誌 第15巻第2号 1979. 12
本稿においては，上記とは便宜記号を変更したもののあることに注意せられたい。

2) $-i'=d$ とすると，$\dfrac{1-(1+i')^{-n}}{i'}=\dfrac{(1-d)^{-n}-1}{d}$ と，割引率による計算となる。
(拙著：前掲書，p. 149 参照)。

3) $\dfrac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$ を数表としたものがある。
(拙稿：投資計算における用語・記号・金利計算表とその節略化について 城西大学経済経営紀要 第3巻第1号 1980. 6 p. 50 参照。)

4) Cf. E. B. Greynolds Jr., J. B. Aronofsky, R. J. Frame: Financial Analysis using Calculators, Time Value of Money p. 448 Ex. 9–2。

5) Cf. Hewlett-Packard: HP 37 E/HP 38 E Real Estate Applications p. 15—p. 16 Ex. 2。

6) $a_{\overline{n}|}$ at $(e^{\delta}-1)$ の数表はある。(拙稿：注3 論文 p. 51 参照)。

7) 拙著：前掲書 p. 91 公式〔8. 38〕において，$\beta=g$, $k=12$ として与件を改め変形したものに当る。
Cf. Greynolds et al.: op. cit. p. 419 (9—88) 式

8) 拙著：前掲書 p. 90 公式〔8 37〕において，$R'\alpha=Q$, $k=12$ として与件を改め変形したものに当る。

9) $\bar{a}_{\overline{n}|}$ の数表はある。(拙稿：注3 論文 p. 51 参照)。

10) $\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$ の数表はある。(拙稿：注3 論文 p. 52 参照)。

11) Cf. M. V. Butcher, C. J. Nesbitt: Mathematics of Compound Interest 1979 4th printing p. 121 (3. 67) 式。

12) 拙稿：変率複利と変率年金 経営数学会誌 第3号 1980. 12

(1980. 11. 24 稿)