定期払利息の新拡張

野　沢　孝之助

ま　え　が　き

元金（現価）Pを年利率iでn年間貸借する場合において，利息を一定期ごとに支払われることがある。これを定期払利息という。

本稿は，定期払利息の場合を中心として，従来の利息算の諸公式を統一整備しようとの試論である[1]。

1.　定期払利息の終価と現価

§1　終　　価

現価P，名目利率[2]年i，利払年p回とする定期払利息を，利払期1期に対する元利率aの複利でn年間再投資される場合の終価Sとする。

PからSを算出すると，次式のようになることは明らかである。

$$\boxed{\boldsymbol{S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}\right\}} \qquad [\mathbf{100\ A}]}$$

ここで，$\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}$ を求めると，

$$a\cdot\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}-\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}$$

$$=(a-1)\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}=a^{np}-1$$

$$\therefore\quad \sum_{t=1}^{np}a^{np-t}=\frac{a^{np}-1}{a-1}=S_{\overline{np|}}\ at(a-1)$$

である。従って，上式を書換れば，

$$\boldsymbol{S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at(a-1)\right\}} \qquad \text{〔100 B〕}^{3)}$$

となる。

次に，a の各場合について，再投資名目利率を年 r として考察する。

(1)　利払年 p 回，利息転化年 m 回のとき

$$a=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}\cdot np}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\right\}$$

$$=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}}{S_{\overline{\frac{m}{p}}|}}\ at\frac{r}{m}\right\} \qquad \text{〔101〕}$$

$$=P\left[1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right] \qquad \text{〔101〕}'$$

(2)　$p=m=1$　のとき

$$S=P\{1+i\cdot S_{\overline{n}|}\ at\,r\} \qquad \text{〔102〕}$$

本式が従来のいわゆる2期の利率を用いる終価の場合である[4)]。

(3)　$p=m$　のとき

$$S=P\left\{1+\frac{i}{m}\cdot S_{\overline{mn}|}\ at\frac{r}{m}\right\} \qquad \text{〔103〕}$$

(4)　$p=1<m$　のとき

$$S=P\left\{1+i\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}}{S_{\overline{m}|}}\ at\frac{r}{m}\right\} \qquad \text{〔104〕}$$

$$=P\left[1+i\cdot S_{\overline{n}|}\ at\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1\right\}\right] \qquad \text{〔104〕}'$$

(5)　$p>m=1$　のとき

$$S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{n}|}}{S_{\overline{\frac{1}{p}}|}}\ at\,r\right\} \qquad \text{〔105〕}$$

$$=P\left[1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at\{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1\}\right] \qquad \text{〔105〕}'$$

§2 現　　価

公式〔100〕からPを求めると，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\sum_{t=1}^{np}\boldsymbol{a}^{np-t}\right\}^{-1} \qquad \text{〔200 A〕}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{S}_{\overline{np}|}\ \boldsymbol{at}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1})\right\}^{-1} \qquad \text{〔200 B〕}$$ [5)]

となる。

公式〔101〕～〔105〕に対応する諸公式についても簡単に求めることができる。

2. 再投資利率の特例

本節においては，前節の r の特別の場合について考察する。

〔1〕 $r=0$

すなわち再投資を行わないときであって，単利法の場合に当たる。

公式〔100 A〕において，$a^{np-t}=1$ となるから，

$$S=P\left(1+\frac{i}{p}\cdot np\right)$$

$$=P(1+ni) \qquad \text{〔211〕}$$

本式が単利終価の公式である。

また，Pを求めると，

$$P=\frac{S}{1+ni} \qquad \text{〔221〕}$$

となる。これが単利現価であって，いわゆる真割引法の公式である。

〔2〕 $r=i$

定期に利息を支払わず元金に組入れて利殖することになり，すなわち複利法の場合に当たる。

公式〔101〕は，

$$S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}}{S_{\overline{\frac{m}{p}}|}}\ at\frac{i}{m}\right\} \qquad \text{〔231〕}$$

$$=P\left[1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right] \qquad \text{〔231〕}'$$

となる。

公式〔102〕は,

$$S=P\{1+i\cdot S_{\overline{n}|}\ at\, i\}$$
$$=P(1+i)^n \qquad 〔232〕$$

となる。本式が年1回払，年1回利息転化の通例の複利終価公式である。

公式〔103〕は,

$$S=P\left\{1+\frac{i}{m}\cdot S_{\overline{mn}|}\ at\frac{i}{m}\right\}$$
$$=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \qquad 〔233〕$$

となる。本式が利息転化周期は，利息支払周期に一致するとの一般の仮定における場合の複利終価公式である。

公式〔104〕は,

$$S=P\left\{1+i\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}}{S_{\overline{m}|}}\ at\frac{i}{m}\right\} \qquad 〔234〕$$
$$=P\left[1+i\cdot S_{\overline{n}|}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1\right\}\right] \qquad 〔234〕'$$

となる。

公式〔105〕は,

$$S=P\left\{1+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{n}|}}{S_{\overline{\frac{1}{p}}|}}\ at\, i\right\} \qquad 〔235〕$$
$$=P\left[1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}\right] \qquad 〔235〕'$$

となる。

以上が複利終価の諸公式であるが，複利現価を求めるには，上記諸公式を逆算すればよいことは明らかである。

たとえば，公式〔232〕式から,

$$P=S(1+i)^{-n}=Sv^n \qquad 〔242〕$$

また，公式〔233〕式から

$$P=S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} \qquad [243]$$

となる。

〔例1〕 現価 ¥100,000 年利率 7% 期間 5 か年の次の各場合，終価を求めよ。ただし，利払年 2 回，利息転化年 1 回とする。

a 再投資利率 年 6%

b 単　利

c 複　利

〔解〕

a 公式〔101〕または〔101〕′による。

$$S=¥100,000\times\left\{1+\frac{0.07}{2}\times\frac{S_{\overline{5|}}}{S_{\overline{\frac{1}{2}|}}}\ at\ 6\%\right\}^{6)}$$

$$=¥100,000\times\left\{1+0.035\times\frac{5.6370\ 9296}{0.4927\ 1690}\right\}=\underline{\underline{¥140,043}}$$

また，

$$S=¥100,000\times\left[1+\frac{0.07}{2}\times S_{\overline{2\times5|}}\ \ at\{(1+0.06)^{\frac{1}{2}}-1\}\right]$$

$$=¥100,000\times[1+0.035\times11.4408\ 3537]=\underline{\underline{¥140,043}}$$

計算については，本稿末尾を参照せられたい。

b 公式〔211〕による。

$$S=¥100,000\times(1+0.07\times5)=\underline{\underline{¥135,000}}$$

c 公式〔231〕または〔231〕′による。

$$S=¥100,000\times\left\{1+\frac{0.07}{2}\times\frac{S_{\overline{5|}}}{S_{\overline{\frac{1}{2}|}}}\ \ at\,7\%\right\}$$

$$=¥100,000\times\left\{1+0.035\times\frac{5.7507\ 3901}{0.4915\ 4348}\right\}=\underline{\underline{¥140,948}}$$

また，

$$S=¥100,000\times\left[1+\frac{0.07}{2}\times S_{\overline{2\times5|}}\ \ at\{(1+0.07)^{\frac{1}{2}}-1\}\right]$$

$$=¥100,000\times[1+0.035\times11.6993\ 4968]=\underline{\underline{¥140,948}}$$

本問は，公式〔235〕，〔235〕′によっても同様である。

〔例2〕 終価 ¥200,000 年利率 8% 期間 5 か年の次の各場合，現価を求め

よ。ただし，利払周期，利息転化周期を各年１回とする。

a　再投資利率　年$6\frac{1}{2}$%

b　単　　利

c　複　　利

〔解〕

a　公式〔102〕よりPを求める。

$$P=\frac{¥200,000}{1+0.08\cdot S_{\overline{5|}}\ at\ 6\frac{1}{2}\%}$$

$$=\frac{¥200,000}{1+0.08\times 5.6936\ 4098}=¥137,411$$

b　公式〔221〕による。

$$P=\frac{¥200,000}{1+5\times 0.08}=¥142,857$$

c　公式〔242〕による。

$$P=¥200,000\times(1+0.08)^{-5}$$

$$=¥200,000\times 0.6805\ 8320=¥136,117$$

3.　年金終価・年金現価

§1　年 金 終 価

公式〔100〕において，Pを年金年額Rに置換えて，年p回払，nか年の期末年金を考え，順次に公式を適用し集計する。

$$S=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np-t|}}\ at(a-1)\right\}$$

$$=\frac{R}{p}\left\{np+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{np|}}\ at(a-1)-np}{a-1}\right\}\qquad〔300〕^{7)}$$

〔１〕　$r=0$　単利年金終価

(1)　$p>1$　のとき

$$S=\frac{R}{p}\left[np+\frac{i}{p}\{(np-1)^{8)}+(np-2)+\cdots\cdots+1\}\right]$$

$$=\frac{R}{p}\left\{np+\frac{i}{p}\cdot\frac{np(np-1)}{2}\right\}$$

$$=R\left\{n+i\cdot\frac{n\left(n-\frac{1}{p}\right)}{2}\right\}$$ 〔311〕

(2)　$p=1$　のとき

$$S=R\left\{n+i\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$ 〔312〕

年1回期末払単利年金終価の公式である。

〔2〕 $r=i$　複利年金終価

(1)　$p\neq m$, $p\neq 1$, $m\neq 1$　のとき

$$S=\frac{R}{p}\left[np+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{np}|}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}-np}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\right]$$ 〔321〕

(2)　$p=m=1$　のとき

$$S=R\left\{n+i\cdot\frac{S_{\overline{n}|}\ at\,i-n}{i}\right\}$$

$$=R\cdot S_{\overline{n}|}\ at\,i$$ 〔322〕

年1回期末払の複利年金終価公式である。

(3)　$p=m$　のとき。

$$S=\frac{R}{m}\left\{mn+\frac{i}{m}\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}\ at\frac{i}{m}-mn}{\frac{i}{m}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot S_{\overline{mn}|}\ at\frac{i}{m}$$ 〔323〕

利息転化周期が利払周期と一致する場合の期末払複利終価公式である。

(4)　$p=1<m$　のとき

$$S=R\left[n+i\cdot\frac{S_{\overline{n}|}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1\right\}-n}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\right]$$ 〔324〕

(5)　$p>m=1$　のとき

$$S=\frac{R}{p}\left[np+\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{np}|}\ at\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}-np}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}\right] \qquad [325]$$

§2 年金現価

公式〔200〕において，Sを年金年額Rに置換えて，年p回払nか年の期末払年金を，考え順次に式を適用し集計する。

$$\boldsymbol{P=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\ at(a-1)\right\}^{-1}}$$

$$\boldsymbol{=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}}+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}\right\}\ at(a-1)} \qquad [\mathbf{330}][9]$$

〔1〕 $r=0$ 単利年金現価

(1) $p>1$ のとき

$$P=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}}+\frac{1}{1+2\cdot\frac{i}{p}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+ni}\right\} \qquad [331]$$

(2) $p=1$ のとき

$$P=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+2i}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+ni}\right\} \qquad [332]$$

年1回期末払の単利年金現価公式である。

〔2〕 $r=i$ 複利年金現価

(1) $p\neq m$，$p\neq 1$，$m\neq 1$ のとき

$$P=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}}+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}\right\}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\} \qquad [341]$$

(2) $p=m=1$ のとき

$$P=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=R\cdot a_{\overline{n|}}\ at\,i \qquad [342]$$

年1回期末払の複利年金現価公式である。

(3) $p=m$ のとき

$$P=\frac{R}{m}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{m}}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot a_{\overline{mn|}}\ at\frac{i}{m} \qquad [343]$$

利息転化周期と利払周期が一致する場合の複利年金現価公式である。

(4) $p=1<m$ のとき

$$P=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{2|}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+i\cdot S_{\overline{n|}}}\right\}\ at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1\right\} \qquad [344]$$

(5) $p>m=1$ のとき

$$P=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}}+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2|}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np|}}}\right\}\ at\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\} \qquad [345]$$

〔例3〕 年金年額 ¥100,000 年利率 6%, 期間5か年で, 年金は年2回期末払, 利息転化年1回の次の各場合, 終価を求めよ。

a 再投資利率 年 4%

b 単　　利

c 複　　利

〔解〕

a 公式〔300〕による。

$$S=\frac{¥100,000}{2}\times\left[2\times5+\frac{0.06}{2}\times\frac{S_{\overline{2\times5|}}\ at\{(1+0.04)^{\frac{1}{2}}-1\}-2\times5}{(1+0.04)^{\frac{1}{2}}-1}\right]$$

$$=¥50,000\times\left[10+0.03\times\frac{10.9399\ 0946-10}{0.0198\ 0390}\right]$$

$$=\underline{\underline{¥571,191}}$$

b　公式〔311〕による。

$$S=¥100,000\times\left\{5+0.06\times\frac{5\times\left(5-\frac{1}{2}\right)}{2}\right\}=\underline{\underline{¥567,500}}$$

c　公式〔325〕による。

$$S=\frac{¥100,000}{2}\times\left[2\times5+\frac{0.06}{2}\times\frac{S_{\overline{2\times5|}}\ at\{(1+0.06)^{\frac{1}{2}}-1\}-2\times5}{(1+0.06)^{\frac{1}{2}}-1}\right]$$

$$=¥50,000\times\left[10+0.03\times\frac{11.4408\ 3537-10}{0.0295\ 6301}\right]$$

$$=\underline{\underline{¥573,107}}$$

〔例4〕　例3において，利払，利息転化ともに年2回とした場合の現価を求めよ。

〔解〕

a　公式〔330〕による。

$$P=\frac{¥100,000}{2}\times\left\{\frac{1}{1+\frac{0.06}{2}}+\frac{1}{1+\frac{0.06}{2}\times S_{\overline{2|}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{0.06}{2}\times S_{\overline{2\times5|}}}\right\}\ at\frac{0.04}{2}$$

$$=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.03}+\frac{1}{1+0.03\times2.02}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.03\times10.9497\ 21}\right\}$$

$$=¥50,000\times8.5646\ 5760=\underline{\underline{¥428,233}}$$

計算については，本稿末尾を参照せられたい。

b　公式〔331〕による。

$$P=\frac{¥100,000}{2}\times\left\{\frac{1}{1+\frac{0.06}{2}}+\frac{1}{1+\frac{0.06}{2}\times2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.06\times5}\right\}$$

$=¥50,000 \times 8.6311\ 1143$ [10] $= \underline{\underline{¥431,556}}$

c 公式〔343〕式による。

$$P = \frac{¥100,000}{2} \times a_{\overline{2\times5|}}\ at\ \frac{0.06}{2}$$

$=¥50,000 \times 8.5302\ 0284 = \underline{\underline{¥426,510}}$

4. 償還賦金・積立賦金

§1 償還賦金

公式〔330〕から，Rを求めればよい。

$$\boldsymbol{R = Pp\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}} + \frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2|}}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np|}}}\right\}^{-1} at(a-1)} \qquad 〔\mathbf{400}〕$$ [11]

〔1〕 $r=0$

(1) $p>1$

$$R = \frac{Pp}{\frac{1}{1+\frac{i}{p}} + \frac{1}{1+2\cdot\frac{i}{p}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+ni}} \qquad 〔411〕$$

(2) $p=1$

$$R = \frac{P}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+ni}} \qquad 〔412〕$$

年1回期末払単利償還賦金の公式である。

〔2〕 $r=i$

(1) $p \neq m$。$p \neq 1$，$m \neq 1$ のとき

$$R = \frac{Pp}{\frac{1}{1+\frac{i}{p}} + \frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2|}}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np|}}}}$$

$$at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\} \qquad [421]$$

(2) $p=m=1$ のとき

$$R=\frac{P}{\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{(1+i)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(1+i)^n}}$$

$$=\frac{P}{a_{\overline{n}|}\ at\ i}=P(a_{\overline{n}|})^{-1}\ at\ i \qquad [422]$$

年1回期末払の複利償還賦金公式である。

(3) $p=m$ のとき

$$R=\frac{Pm}{\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{m}}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}}}$$

$$=Pm(a_{\overline{mn}|})^{-1}\ at\frac{i}{m} \qquad [423]$$

利息転化周期が利払周期と一致する場合の複利償還賦金公式である。

(4) $p=1<m$ のとき

$$R=\frac{P}{\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1+i\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+i\cdot S_{\overline{n}|}}}\quad at\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1\right\}$$

$$[424]$$

(5) $p>m=1$ のとき

$$R=\frac{Pp}{\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{p}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}}$$

$$at\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\} \qquad [425]$$

§2 積立賦金

公式[300]から，Rを求めればよい。

$$\boldsymbol{R=Sp\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np-t}|}\ at(a-1)\right\}^{-1}}$$

$$=\boldsymbol{Sp}\left\{\boldsymbol{np}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\boldsymbol{S_{\overline{np|}}\ at(a-1)-np}}{\boldsymbol{a-1}}\right\}^{-1} \qquad \textbf{〔430〕}^{12)}$$

〔1〕 $r=0$

(1) $p>1$ のとき

$$R=\frac{S}{n+i\cdot\dfrac{n\left(n-\dfrac{1}{p}\right)}{2}} \qquad 〔431〕$$

(2) $p=1$ のとき

$$R=\frac{S}{n+i\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}} \qquad 〔432〕$$

年1回期末払の単利積立賦金公式である。

〔2〕 $r=i$

(1) $p\neq m,\ p\neq 1,\ m\neq 1$

$$R=\frac{Sp}{np+\dfrac{i}{p}\cdot\dfrac{S_{\overline{np|}}\ at\left\{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}-np}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}} \qquad 〔441〕$$

(2) $p=m=1$

$$R=\frac{S}{S_{\overline{n|}}\ at\ i}=S(S_{\overline{n|}})^{-1}\ at\ i=S\{(a_{\overline{n|}})^{-1}\ at\ i-i\} \qquad 〔442〕$$

年1回期末払の複利積立賦金公式である。

(3) $p=m$

$$R=Sm(S_{\overline{mn|}})^{-1}\ at\frac{i}{m}=Sm\left\{(a_{\overline{mn|}})^{-1}\ at\frac{i}{m}-\frac{i}{m}\right\} \qquad 〔443〕$$

利息転化周期が利払周期と一致する場合の複利積立賦金公式である。

(4) $p=1<m$

$$R=\frac{S}{n+i\cdot\dfrac{S_{\overline{n|}}\ at\left\{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m}-1\right\}-n}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m}-1}} \qquad 〔444〕$$

(5) $p>m=1$

$$R=\frac{Sp}{np+\dfrac{i}{p}\cdot\dfrac{S_{\overline{np}|}\ at\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}-np}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}} \qquad 〔445〕$$

〔例 5〕 ¥500,000 を年利率 9% で期間 5 か年で借入れた。償還金を年 2 回期末払，利息転化年 2 回の次の各場合，償還年額を求めよ。

a 再投資利率 年 7%

b 単 利

c 複 利

〔解〕

a 公式〔400〕による。

$$R=\frac{¥500,000\times 2}{\dfrac{1}{1+\dfrac{0.09}{2}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{0.09}{2}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+\dfrac{0.09}{2}\cdot S_{\overline{10}|}}}\ at\frac{0.07}{2}$$

$$=¥1,000,000\div 7.9565\ 3370=\underline{\underline{¥125,683}}$$

b 公式〔411〕による。

$$R=\frac{¥500,000\times 2}{\dfrac{1}{1+\dfrac{0.09}{2}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{0.09}{2}\times 2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+0.09\times 5}}$$

$$=¥1,000,000\div 8.1037\ 6133=\underline{\underline{¥123,399}}$$

c 公式〔423〕による。

$$R=¥500,000\times 2\times(a_{\overline{10}|})^{-1}\ at\frac{0.09}{2}$$

$$=¥1,000,000\times 0.1263\ 7882=\underline{\underline{¥126,379}}$$

〔例 6〕 総額 ¥400,000 を年利率 7% で 5 か年後に積立てたい。積立は年 2 回期末払，利息転化年 1 回の次の各場合，積立年額を求めよ。

a 再投資利率 年 $5\frac{1}{2}$%

b 単 利

c 複 利

〔解〕

a 公式〔430〕による。

$$R=\frac{¥400,000\times 2}{2\times 5+\frac{0.07}{2}\times\frac{S_{\overline{2\times 5}|}\ at\{(1+0.055)^{\frac{1}{2}}-1\}-10}{(1+0.055)^{\frac{1}{2}}-1}}$$

$$=\frac{¥800,000}{10+0.035\times\frac{11.3136\ 0781-10}{0.0271\ 3193}}$$

$$=\underline{\underline{¥68,408}}$$

b 公式〔431〕による。

$$R=\frac{¥400,000}{5+0.07\times\frac{5\times\left(5-\frac{1}{2}\right)}{2}}=\underline{\underline{¥69,114}}$$

c 公式〔445〕による。

$$R=\frac{¥400,000\times 2}{2\times 5+\frac{0.07}{2}\times\frac{S_{\overline{10}|}\ at\{(1+0.07)^{\frac{1}{2}}-1\}-10}{(1+0.07)^{\frac{1}{2}}-1}}$$

$$=\frac{¥800,000}{10+0.035\times\frac{11.6993\ 4968-10}{0.0344\ 0804}}$$

$$=\underline{\underline{¥68,209}}$$

5. 応 用 計 算

§1 減 価 償 却

以下，取得原価C， k 期末帳簿価額 B_k， k 期の減価償却費 D_k とする。

さて，公式〔100〕において，$p=m=1$ の場合すなわち公式〔102〕において，

$S=B_k$， $P=C$， $n=k$ とすると

$$B_k=C\{1+i\cdot S_{\overline{k}|}\ at\ r\} \qquad 〔501〕$$

となる。

〔1〕 定額法・年次数総和法

公式〔501〕において，$r=0$ の場合は，

$$B_k=C(1+ki) \qquad 〔510〕$$

となる。

(1)　定額法

公式〔510〕において

$$i=-\frac{C-S}{Cn}=-\frac{1-\dfrac{S}{C}}{n}$$

と置く（ただし，ここに，$S=B_n$ で，n は耐用期数とする）と，

$$B_k=C\left(1-k\cdot\frac{1-\dfrac{S}{C}}{n}\right)$$

$$=C-k\cdot\frac{C-S}{n} \qquad \text{〔511〕}$$

従って，

$$D_k=B_{k-1}-B_k=\left\{C-(k-1)\cdot\frac{C-S}{n}\right\}-\left\{C-k\cdot\frac{C-S}{n}\right\}$$

$$=\frac{C-S}{n} \qquad \text{〔512〕}$$

となることは明らかであり，k 期に関係なく，一定額である。

また，k 期末の減価償却累計額は，

$$\sum_{t=1}^{k} D_t=kD=C-B_k$$

であり，

$$B_k=C-kD$$

である。

(2)　年次数総和法

公式〔510〕において，

$$i_k=-\frac{C-S}{C}\cdot\frac{2n-k+1}{n(n+1)} \qquad i_k \text{ は } k \text{ 期における } i$$

と置くと，

$$B_k=C\left\{1-k\cdot\frac{C-S}{C}\cdot\frac{2n-k+1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=C-k(C-S)\cdot\frac{2n-k+1}{n(n+1)} \qquad \text{〔513〕}$$

従って，

$$D_k=B_{k-1}-B_k$$

$$=\left\{C-(k-1)(C-S)\cdot\frac{2n-(k-1)+1}{n(n+1)}\right\}$$

$$-\left\{C-k(C-S)\cdot\frac{2n-k+1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=(C-S)\cdot\frac{n-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad 〔514〕$$

$$D_{k-1}-D_k=\frac{C-S}{\frac{n(n+1)}{2}}[\{n-(k-1)+1\}-(n-k+1)]$$

$$=\frac{C-S}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

となる。

従って，減価償却額は，公差 $\frac{C-S}{\frac{n(n+1)}{2}}$ の等差数列で減少する[13]。

また，

$$\sum_{t=1}^{k}D_t=(C-S)\cdot\frac{n+(n-1)+\cdots\cdots+(n-k+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=(C-S)\cdot\frac{(2n-k+1)k}{n(n+1)}=C-B_k$$

$$B_k=C-\sum_{t=1}^{k}D_t$$

となる。

〔2〕 定率法

公式〔501〕において，$r=i$ のとき，

$$B_k=C(1+i)^k$$

となるが，

$$i=-\left\{1-\left(\frac{S}{C}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}=-r'$$

と置くと，

$$B_k=C(1-r')^k \qquad [516]$$

従って，

$$D_k=B_{k-1}-B_k=C(1-r')^{k-1}-C(1-r')^k$$
$$=C(1-r')^{k-1}r'=B_{k-1}\cdot r' \qquad [517]$$

となる。

減価償却は，各期末の帳簿価額が減少するから，公比（$1-r'$）の等比数列で減少する。

$$\sum_{t=1}^{k} D_t=\{C+C(1-r')+\cdots\cdots+C(1-r')^{k-1}\}r'$$
$$=Cr'\cdot\frac{1-(1-r')^k}{1-(1-r')}=C\{1-(1-r')^k\}$$
$$=C-B_k$$

§2 債券価格

債券価格A，額面金額C，債券利率gとして，公式〔200 B〕において，$p=m=1$ の場合において，

$$P=A \qquad S=C(1+g\cdot S_{\overline{n}|}\ at\ r)$$

とすると，

$$A=\frac{C(1+g\cdot S_{\overline{n}|})}{1+i\cdot S_{\overline{n}|}}\ at\ r \qquad [521]$$

となる。ただし，g，n，i，r は，すべて1期単位とする。

$$r=0 \qquad A=\frac{C(1+ng)}{1+ni} \qquad \text{単利債券価格} \qquad [522]$$

$$r=i \qquad A=\frac{C(1+g\cdot S_{\overline{n}|}\ at\ i)}{(1+i)^n}$$
$$=C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|}\ at\ i\} \qquad \text{複利債券価格} \qquad [523]$$

§3 Hoskold の公式

公式〔200B〕において，$p=m=1$ の場合において，

$$S=R\cdot S_{\overline{n|}}\ at\ r$$

とすると，

$$P=\frac{R\cdot S_{\overline{n|}}}{1+i\cdot S_{\overline{n|}}}\ at\ r=\frac{R}{(S_{\overline{n|}})^{-1}\ at\ r+i}$$

$$=\frac{R}{(a_{\overline{n|}})^{-1}at\ r-r+i} \qquad [531]$$

本式が鉱山評価に利用される Hoskold の公式である。

〔例7〕 取得原価 ¥700,000 耐用年数7年残存価額は原価の10%の機械がある。第6期の減価償却費，第6期末の帳簿価額を決算年2回として，次の各場合について求めよ。

a 定 額 法

b 年次数総和法

c 定 率 法

〔解〕

以下の解答は本節の諸公式によるものであって，税法に従えば少差を生ずることがある。

a 公式〔512〕，〔511〕による。

$$D_6=\frac{¥700,000-¥700,000\times 0.1}{2\times 7}=\underline{\underline{¥45,000}}$$

$$B_6=¥700,000-¥45,000\times 6=\underline{\underline{¥430,000}}$$

b 公式〔514〕，〔513〕による。

$$D_6=(¥700,000-¥700,000\times 0.1)\times\frac{14-6+1}{\frac{14\times(14+1)}{2}}$$

$$=¥630,000\times\frac{9}{105}=\underline{\underline{¥54,000}}$$

$$B_6=¥700,000-¥630,000\times 6\times\frac{2\times 14-6+1}{14\times(14+1)}$$

$$=¥700,000-¥414,000=\underline{\underline{¥286,000}}$$

c 公式〔517〕，〔516〕による。

$$r'=\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{14}}\right\}=0.1516\ 5710$$

$$D_6=¥700,000\times(1-0.1516\ 5710)^{6-1}\times0.1516\ 5710$$
$$=¥700,000\times0.4393\ 9706\times0.1516\ 5710=\underline{\underline{¥46,646}}$$

$$B_6=¥700,000\times(1-0.1516\ 5710)^{6}=\underline{\underline{¥260,932}}$$

計算については，本稿末尾を参照せられたい。

〔例 8〕 10年後に額面金額で償還される年8.2%利付の 2 期払債券を年8.3%（2 回転化）で評価すれば，額面 ¥100 についての単利および複利価格を¥0.05位まで求めよ。

〔解〕

単利債券価格　公式〔522〕による。

$$A=\frac{¥100\times\left(1+2\times10\times\dfrac{0.082}{2}\right)}{1+2\times10\times\dfrac{0.083}{2}}=\underline{\underline{¥99.45}}\ ^{14)}$$

複利債券価格　公式〔523〕による。

$$A=¥100\times\left\{1-\left(\frac{0.083}{2}-\frac{0.082}{2}\right)\times a_{\overline{2\times10}|}\ at\frac{0.082}{2}\right\}$$
$$=¥100\times(1-0.0005\times13.4707\ 7406)=\underline{\underline{¥99.35}}$$

〔例 9〕 ある鉱山は，毎年末の予想収益 2,000 万円，予想継続年数15年である。報酬利率年12%，蓄積利率年 5% として，その評価額（1 万円未満切捨）を求めよ。

〔解〕

公式〔531〕による。

$$P=\frac{2,000万円}{(a_{\overline{15}|})^{-1}\ at\,5\%-0.05+0.12}$$
$$=\frac{2,000万円}{0.0963\ 4229-0.05+0.12}=\underline{\underline{12,023万円}}$$

6.　期首払年金・据置年金・変額年金

§1　期首払年金

公式〔300〕

$$S=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np-t}|}\ at(a-1)\right\}$$

に $S_{\overline{np}|}$ を加え $S_{\overline{0}|}$ を減じたものが，期首払年金終価 $\ddot{S}$ となることは明らかであるから，

$$\ddot{\boldsymbol{S}}=\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{p}}\cdot\sum_{t=0}^{np-1}\left\{\boldsymbol{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{S}_{\overline{np-t}|}\ \boldsymbol{at(a-1)}\right\}$$

$$=\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{p}}\left[\boldsymbol{np}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\boldsymbol{S}_{\overline{np+1}|}\ \boldsymbol{at(a-1)-(np+1)}}{\boldsymbol{a-1}}\right\} \qquad 〔\mathbf{600}〕$$

また，公式〔330〕を期首払とすると，

$$\ddot{\boldsymbol{P}}=\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{p}}\cdot\sum_{t=0}^{np-1}\left\{\boldsymbol{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{S}_{\overline{t}|}\ \boldsymbol{at(a-1)}\right\}^{-1} \qquad 〔\mathbf{620}〕$$

となる。

次に，特例を示しておく。

(1) 期首払年金終価

$r=0,\quad p>1$

$$\ddot{S}=\frac{R}{p}\left[np+\frac{i}{p}\{np+(np-1)+\cdots\cdots+1\}\right]$$

$$=R\left\{n+i\cdot\frac{n\left(n+\dfrac{1}{p}\right)}{2}\right\} \qquad 〔611〕$$

$r=i,\quad p=m$

$$\ddot{S}=\frac{R}{m}\left\{mn+\frac{i}{m}(S_{\overline{mn}|}+S_{\overline{mn-1}|}+\cdots\cdots+S_{\overline{1}|})\ at\frac{i}{m}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\left(1+\frac{i}{m}\right)S_{\overline{mn}|}\ at\frac{i}{m}$$

$$=\frac{R}{m}\left\{S_{\overline{mn+1}|}\ at\frac{i}{m}-1\right\} \qquad 〔612〕$$

(2) 期首払年金現価

$r=0,\quad p>1$

$$\ddot{P}=\frac{R}{p}\left\{1+\frac{1}{1+\dfrac{i}{p}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\dfrac{i}{p}(np-1)}\right\} \qquad 〔621〕$$

$r=i,\quad p=m$

$$\ddot{P}=\frac{R}{m}\left\{1+\frac{1}{1+\frac{i}{m}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn-1}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\left(1+\frac{i}{m}\right)a_{\overline{mn}|}\ at\frac{i}{m}$$

$$=\frac{R}{m}\left\{a_{\overline{mn-1}|}\ at\frac{i}{m}+1\right\} \qquad \text{〔622〕}$$

最後に，期首払の積立賦金について，書添えておく。

公式〔611〕から，Rを求めると，

$$R=\frac{\ddot{S}}{n+i\cdot\frac{n\left(n+\frac{1}{p}\right)}{2}} \qquad \text{〔631〕}$$

公式〔612〕から，Rを求めると，

$$R=\ddot{S}\cdot m\cdot v\left\{(a_{\overline{mn}|})^{-1}\ at\frac{i}{m}-\frac{i}{m}\right\} \qquad \text{〔632〕}$$

ただし，$v=\left\{1+\frac{i}{m}\right\}^{-1}$

となる。

§2 据置年金

k年据置後nか年支払われる期末払年金現価を求める。

公式〔330〕を応用して，$(k+n)$ 年の年金現価からk年の年金現価を差引けばよい筈である。

$$P=\frac{R}{p}\left\{\sum_{t=1}^{(k+n)p}\left(1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\right)^{-1}-\sum_{t=1}^{kp}\left(1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\right)^{-1}\right\}\ at(a-1)$$

$$=\frac{R}{p}\left\{\sum_{t=kp+1}^{(k+n)p}\left(1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\ at(a-1)\right)^{-1}\right\} \qquad \text{〔640〕}$$

$r=0,\ p>1$ のとき

$$P=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}(kp+1)}+\frac{1}{1+\frac{i}{p}(kp+2)}\right.$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{i}{p}(k+n)p}\Bigg\}\qquad〔641〕$$

$r=i$, $p=m$　のとき

$$P=\frac{R}{m}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{kp+1}}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{kp+2}}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{(k+n)p}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\{a_{\overline{(k+n)p}|}-a_{\overline{kp}|}\}\quad at\frac{i}{m}\qquad〔642〕$$

また，nか年支払後k年据置の期末払年金終価は，公式〔300〕を応用して次のようになる。

$$S=\frac{R}{p}\left\{\sum_{t=1}^{(n+k)p}\left(1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{(n+k)p-t}|}-\sum_{t=1}^{kp}\left(1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{kp-t}|}\right)\right\}\quad at(a-1)\right.$$

$$=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{(n+k)p-t}|}\quad at(a-1)\right\}\qquad〔650〕$$

$r=0$, $p>1$　のとき

$$S=\frac{R}{p}\left[np+\frac{i}{p}\{(n+k)p-1+(n+k)p-2+\cdots\cdots+kp\}\right]$$

$$=R\left\{n+i\cdot\frac{\left(n-\frac{1}{p}+2k\right)\left(n-\frac{1}{p}\right)}{2}\right\}\qquad〔651〕$$

$r=i$, $p=m$　のとき

$$S=\frac{R}{m}\left\{mn+\frac{i}{m}(S_{\overline{(n+k)m-1}|}+S_{\overline{(n+k)m-2}|}+\cdots\cdots+S_{\overline{km}|})\quad at\frac{i}{m}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}(S_{\overline{(n+k)m}|}-S_{\overline{km}|})\quad at\frac{i}{m}\qquad〔652〕$$

§3　変額年金

〔1〕　毎期支払金が等比数列をなす場合

(1)　終　　価

公式〔300〕を毎期支払金が年率 g で増加または減少するとして変形すると，次のようになる。

$$S=\sum_{t=1}^{np}\frac{R\left(1+\frac{g}{p}\right)^{t-1}}{p}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np-t}|}\ at(a-1)\right\}$$

$$=\frac{R}{p}\left\{S_{\overline{np}|}\ at\frac{g}{p}+\frac{i}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left(1+\frac{g}{p}\right)^{t-1}\cdot S_{\overline{np-t}|}\ at(a-1)\right\}$$

$$=\frac{R}{p}\left[S_{\overline{np}|}\ at\frac{g}{p}+\frac{i}{p}\left\{\frac{a^{np-1}-1}{a-1}+\left(1+\frac{g}{p}\right)\frac{a^{np-2}-1}{a-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots+\left(1+\frac{g}{p}\right)^{np-2}\cdot\frac{a-1}{a-1}\right\}\right] \qquad 〔660〕$$

$g>0$……増加　　　$g<0$……減少

$g=0$……公式〔300〕

$r=0$，$p=1$　のとき

$$S=R[S_{\overline{n}|}\ at\ g+i\{(n-1)+(1+g)(n-2)$$

$$+\cdots\cdots+(1+g)^{n-2}(n-n+1)\}]$$

$$=R\left\{S_{\overline{n}|}+in\cdot S_{\overline{n-1}|}+i\cdot\frac{S_{\overline{n}|}-n(1+g)^{n-1}}{g}\right\}\ at\ g$$

$$=R\left\{S_{\overline{n}|}+\frac{i}{g}(S_{\overline{n}|}-n)\right\}\ at\ g \qquad 〔661〕$$

$r=i$，$p=m$　のとき

$$S=\frac{R}{m}\left[S_{\overline{mn}|}\ at\frac{g}{m}+\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn-1}-1\right\}\right.$$

$$+\left(1+\frac{g}{m}\right)\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn-2}-1\right\}$$

$$+\cdots\cdots+\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn-2}\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)-1\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\left[S_{\overline{mn}|}\ at\frac{g}{m}+\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn-1}\cdot\frac{\left(\dfrac{1+\frac{g}{m}}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn-1}-1}{\dfrac{1+\frac{g}{m}}{1+\frac{i}{m}}-1}\right.$$

$$-\left\{1+\left(1+\frac{g}{m}\right)+\cdots\cdots+\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn-2}\right\}\Bigg]$$

$$=\frac{R}{m}\left\{S_{\overline{mn}|}+\frac{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn-1}-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn-1}}{\dfrac{\dfrac{g}{m}-\dfrac{i}{m}}{1+\dfrac{i}{m}}}-S_{\overline{mn-1}|}\right\}\ at\frac{g}{m}$$

$$=\frac{R}{m}\left\{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn-1}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn-1}-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}}{\dfrac{g}{m}-\dfrac{i}{m}}\right\}$$

$$=R\cdot\frac{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn}-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}}{g-i}\qquad ただし，g\fallingdotseq i \qquad 〔662〕$$

$g=i$ の特別の場合 $S=nR\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn-1}$

(2) 現　価

公式〔330〕をRの変化を考慮して変形すると，次のようになる。

$$P=\sum_{t=1}^{np}\frac{R\left(1+\dfrac{g}{p}\right)^{t-1}}{p}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\ at(a-1)\right\}^{-1}$$

$$=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\dfrac{i}{p}}+\frac{\left(1+\dfrac{g}{p}\right)}{1+\dfrac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\frac{\left(1+\dfrac{g}{p}\right)^{np-1}}{1+\dfrac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}\right\}\ at(a-1)$$

〔670〕

$g=0$……公式〔330〕

$r=0,\ p=1$ のとき

$$P=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1+g}{1+2i}+\cdots\cdots+\frac{(1+g)^{n-1}}{1+ni}\right\}\qquad〔671〕$$

$r=i,\ p=m$ のとき

$$P=\frac{R}{m}\left\{\frac{1}{1+\dfrac{i}{m}}+\frac{1+\dfrac{g}{m}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{2}}+\cdots\cdots+\frac{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn-1}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}}\right\}$$

$$=R\cdot\frac{\left(\dfrac{1+\dfrac{g}{m}}{1+\dfrac{i}{m}}\right)^{mn}-1}{g-i}\qquad ただし，g\neq i \qquad 〔672〕$$

$g=i$ の特別の場合 $P=nR\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-1}$

〔2〕 毎期支払金が等差数列をなす場合

(1) 終　価

公式〔300〕において，Rが年額Qずつ増減するものとして応用する。

$$S=\sum_{t=1}^{np}\frac{R+Q(t-1)}{p}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np-t|}}\ at(a-1)\right\}$$

$$=n\left(R+Q\cdot\frac{np-1}{2}\right)+\frac{i}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\frac{R+Q(t-1)}{p}\cdot S_{\overline{np-t|}}\ at(a-1)$$

$$=n\left(R+Q\cdot\frac{np-1}{2}\right)+\frac{i}{p^{2}(a-1)}\left[R(S_{\overline{np|}}-np)\right.$$

$$\left.+Q\left\{\frac{S_{\overline{np|}}-np}{a-1}-\frac{np(np-1)}{2}\right\}\right]\ at(a-1)\qquad〔680〕$$

$Q=0$……公式〔300〕

ただし，Qは正負いずれでもよいが，支払金の性質上，

$$\frac{R+Q(np-1)}{p}>0$$

$$Q>-\frac{R}{np-1}$$

であることが条件となる。

$r=0,\ p=1$ のとき

$$S=n\left(R+Q\cdot\frac{n-1}{2}\right)+i\,[R(n-1)+(R+Q)(n-2)$$

$$+\cdots\cdots+\{R+Q(n-2)\}\{n-(n-1)\}]$$

$$=n\left(R+Q\cdot\frac{n-1}{2}\right)+i\left\{R\cdot\frac{n(n-1)}{2}+Q\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\}$$

$$=n\left(R+Q\cdot\frac{n-1}{2}\right)+i\cdot\frac{n(n-1)}{2}\left(R+Q\cdot\frac{n-2}{3}\right) \qquad 〔681〕$$

$r=i,\ p=m$　のとき

$$S=n\left(R+Q\cdot\frac{mn-1}{2}\right)+\frac{i}{m}\left\{\frac{R}{m}\cdot S_{\overline{mn-1}|}+\frac{R+Q}{m}\cdot S_{\overline{mn-2}|}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{R+Q(mn-2)}{m}\cdot S_{\overline{1}|}\right\}\ \ at\frac{i}{m}$$

$$=n\left(R+Q\cdot\frac{mn-1}{2}\right)+\frac{R}{m}(S_{\overline{mn}|}-mn)$$

$$+\frac{Q}{m}\left\{\frac{S_{\overline{mn}|}-mn}{\frac{i}{m}}-\frac{mn(mn-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left(R\cdot S_{\overline{mn}|}+Q\cdot\frac{S_{\overline{mn}|}-mn}{\frac{i}{m}}\right)\ \ at\frac{i}{m} \qquad 〔682〕$$

(2) 現　　価

公式〔330〕を変形すると，次のようになる。

$$P=\sum_{t=1}^{np}\frac{R+Q(t-1)}{p}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\ \ at(a-1)\right\}^{-1}$$

$$=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\right\}^{-1}+\sum_{t=1}^{np}\frac{Q(t-1)}{p}\left\{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\right\}^{-1}at(a-1)$$

$$=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}}+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}\right\}$$

$$+\frac{Q}{p}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{2}|}}+\frac{2}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{3}|}}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{np-1}{1+\frac{i}{p}\cdot S_{\overline{np}|}}\right\}\ \ at(a-1) \qquad 〔690〕$$

$Q=0$……公式　〔330〕

$r=0,\ p=1$ のとき

$$P=R\left\{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+2i}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+ni}\right\}$$

$$+Q\left\{\frac{1}{1+2i}+\frac{2}{1+3i}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{1+ni}\right\} \qquad [691]$$

$r=i,\ p=m$ のとき

$$P=\frac{R}{m}\left\{\frac{1}{1+\frac{i}{m}}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}\right\}$$

$$+\frac{Q}{m}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^2}+\frac{2}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^3}+\cdots\cdots+\frac{mn-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot a_{\overline{mn}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{mn}|}-mn\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{i}\quad at\,\frac{i}{m}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot a_{\overline{mn}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{mn}|}(1+ni)-mn}{i}\quad at\,\frac{i}{m} \qquad [692]$$

〔例10〕 年金年額 ¥100, 000 年利率 6% 期間 5 か年で，利息支払，転化とも 2 年回とする。次の各場合の期首払年金現価を求めよ。

a 再投資利率 年 4%

b 単　利

c 複　利

〔解〕

a 公式〔620〕による。

$$\ddot{P}=\frac{¥100,000}{2}\cdot\sum_{t=0}^{2n-1}\left\{1+\frac{0.06}{2}\cdot S_{\overline{t}|}\ at\,2\%\right\}^{-1}$$

$$=¥50,000\times\left\{1+\frac{1}{1+0.03}+\frac{1}{1+0.03S_{\overline{2}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+9.03S_{\overline{9}|}}\right\}\ at\,2\%$$

$$=¥50,000\times 8.8119\ 2421=\underline{\underline{¥440,596}}$$

b 公式〔621〕による。

$$\ddot{P}=\frac{¥100,000}{2}\times\left\{1+\frac{1}{1+0.03}+\frac{1}{1+0.03\times2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.03\times9}\right\}$$

$$=¥50,000\times8.8618\ 8066=\underline{\underline{¥443,094}}$$

c　公式〔622〕による。

$$\ddot{P}=\frac{¥100,000}{2}\times(a_{\overline{9}|}\ at\ 3\%+1)$$

$$=¥50,000\times(7.7861\ 0892+1)=\underline{\underline{¥439,305}}$$

〔例11〕　例10において，2年据置後5年支払とした場合の期末払据置年金現価を求めよ。

〔解〕

a　公式〔640〕において，$p=2$，$k=2$ とする。

$$P=\frac{¥100,000}{2}\cdot\sum_{t=5}^{14}\left\{1+\frac{0.06}{2}\cdot S_{\overline{t}|}\ at\ 2\%\right\}^{-1}$$

$$=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.03S_{\overline{5}|}}+\frac{1}{1+0.03S_{\overline{6}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.03S_{\overline{14}|}}\right\}\ at\ 2\%$$

$$=¥50,000\times7.6609\ 8410=\underline{\underline{¥383,049}}$$

b　公式〔641〕による。

$$P=\frac{¥100,000}{2}\times\left\{\frac{1}{1+0.03\times5}+\frac{1}{1+0.03\times6}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.03\times14}\right\}$$

$$=¥50,000\times7.8173\ 7671=\underline{\underline{¥390,869}}$$

c　公式〔642〕による。

$$P=\frac{¥100,000}{2}\times(a_{\overline{14}|}-a_{\overline{4}|})\ at\ 3\%$$

$$=¥50,000\times(11.2960\ 7314-3.7170\ 9840)$$

$$=\underline{\underline{¥378,949}}$$

〔例12〕　初年度年金¥50,000年利率6％期間5か年で，毎年の年金はそれぞれ前年の10％増で期末払とする。利息の支払，転化とも年1回とした，次の各場合の変額年金現価を求めよ。

a　再投資利率　年 4％

b　単　　利

c　複　　利

〔解〕

a　公式〔670〕において，$p=m=1$，$g=0.1$ とする。

$$P=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06}+\frac{1+0.1}{1+0.06S_{\overline{2|}}}+\cdots\cdots+\frac{(1+0.1)^4}{1+0.06S_{\overline{5|}}}\right\}\ at\ 4\%$$

$$=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1.06}+\frac{1.1}{1.1224}+\cdots\cdots+\frac{1.4641}{1.3249\ 7935}\right\}$$

$$=¥50,000\times5.1082\ 9687=\underline{¥255,415}$$

b　公式〔671〕による。

$$P=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06}+\frac{1+0.1}{1+0.06\times2}+\cdots\cdots+\frac{(1+0.1)^4}{1+0.06\times5}\right\}$$

$$=¥50,000\times5.1505\ 8068=\underline{¥257,529}$$

c　公式〔672〕による。

$$P=¥50,000\times\frac{\left(\dfrac{1+0.1}{1+0.06}\right)^5-1}{0.1-0.06}$$

$$=¥50,000\times\frac{1.2034\ 6676-1}{0.04}=\underline{¥254,333}$$

〔例13〕　例12において，毎年の年金を前年よりそれぞれ ¥5,000 減少するとした場合の変額年金現価を求めよ。

〔解〕

a　公式〔690〕において，$p=m=1$，$Q=¥5,000$ とする。

$$P=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06}+\frac{1}{1+0.06S_{\overline{2|}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.06S_{\overline{5|}}}\right\}$$

$$+¥5,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06S_{\overline{2|}}}+\frac{2}{1+0.06S_{\overline{3|}}}+\cdots\cdots+\frac{4}{1+0.06S_{\overline{5|}}}\right\}\ at\ 4\%$$

$$=¥50,000\times4.2282\ 7036$$

$$+¥5,000\times7.9852\ 0526=\underline{¥251,340}$$

b　公式〔691〕による。

$$P=¥50,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06}+\frac{1}{1+0.06\times2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+0.06\times5}\right\}$$

$$+¥5,000\times\left\{\frac{1}{1+0.06\times2}+\frac{2}{1+0.06\times3}+\cdots\cdots+\frac{4}{1+0.06\times5}\right\}$$

$$=¥50,000\times4.2593\ 9338$$

$$+¥5,000\times8.0840\ 5031=\underline{¥253,390}$$

c　公式〔692〕による。

$$P=¥50,000\times a_{\overline{5|}}+¥5,000\times\frac{a_{\overline{5|}}(1+5\times0.06)-5}{0.06}\quad at\ 6\%$$

$$=¥50,000\times4.2123\ 6379$$

$$+¥5,000\times\frac{4.2123\ 6379\times1.3-5}{0.06}$$

$$=¥50,000\times4.2123\ 6379+¥5,000\times7.9345\ 4878$$

$$=\underline{\underline{¥250,291}}$$

7.　割引率，利力と連続年金

§1　割　引　率

投資計算において，現価Pの１年後の終価をSとする。

いま，収益高$S-P$を現価Pと対比したものすなわち，$\dfrac{S-P}{P}=i$ が前節までに述べた利率であるが，また，収益高を終価と対比することがある。

$\dfrac{S-P}{S}=d$　　このdを割引率という。

公式〔100〕において，$i=-d$，再投資利率rも負数とし，SとPを置換えると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{p}}\cdot\sum_{t=1}^{np}\boldsymbol{a}^{np-t}\right\}\\&=\boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{S}_{\overline{np|}}\ \boldsymbol{at}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1})\right\}\end{aligned}\qquad〔\mathbf{700}〕$$

となる。

〔1〕 割引率による現価，終価

(1)　単割引

$r=0$，$p>1$

$$P=S(1-nd)\qquad〔701〕$$

本式が単割引法による現価の公式である。

$$\therefore\quad S=\frac{P}{1-nd}\qquad〔702〕$$

本式が割引率による終価の公式である。

(2)　複割引

$r=-d$ とし，特に $p=m$ とすると，

$$P=S\left\{1-\frac{d}{m}\cdot\frac{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}-1}{-\frac{d}{m}}\right\}$$

$$=S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn} \qquad 〔703〕$$

$$\therefore\quad S=P\left(1-\frac{d}{m}\right)^{-mn} \qquad 〔704〕$$

〔2〕 割引率による年金現価，年金終価，償還賦金

(1) 年金現価

公式〔700〕において，Sを年金年額Rに置換えて，期末払であることを考え，順次に公式を適用し集計する。

$$P=\frac{R}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{1-\frac{d}{p}\cdot S_{\overline{t|}}\ at(a-1)\right\}$$

$$=\frac{R}{p}\left\{np-\frac{d}{p}\cdot\frac{S_{\overline{np+1|}}\ at(a-1)-(np+1)}{a-1}\right\} \qquad 〔710〕$$

$r=0$，$p=1$ のとき

$$P=Rn\left(1-d\cdot\frac{n+1}{2}\right) \qquad 〔711〕$$

$r=-d$，$p=m$ のとき

$$P=\frac{R}{m}\left\{mn-\frac{d}{m}\cdot\frac{\frac{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+1}-1}{-\frac{d}{m}}-(mn+1)}{-\frac{d}{m}}\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\left(1-\frac{d}{m}\right)\cdot\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}}{\frac{d}{m}}$$

$$=\frac{R}{m}\left\{\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+1}}{\frac{d}{m}}-1\right\} \qquad 〔712〕$$

(2) 年金終価

公式〔700〕から

$$S=P\left\{1-\frac{d}{p}\cdot\sum_{t=1}^{np}a^{np-t}\right\}^{-1}$$

このPを年金年額Rに置換えて，期末払であることを考え順次に適用する。

$$S=\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{1-\dfrac{d}{p}\cdot S_{\overline{np-1}|}}+\frac{2}{1-\dfrac{d}{p}\cdot S_{\overline{np-2}|}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1-\dfrac{d}{p}}+1\right\}\ at(a-1) \qquad 〔720〕$$

$r=0$，$p=1$ のとき

$$S=R\left\{\frac{1}{1-(n-1)d}+\frac{1}{1-(n-2)d}+\cdots\cdots+\frac{1}{1-d}+1\right\} \qquad 〔721〕$$

$r=-d$，$p=m$ のとき

$$S=\frac{R}{m}\left\{\frac{1}{\left(1-\dfrac{d}{m}\right)^{mn-1}}+\frac{1}{\left(1-\dfrac{d}{m}\right)^{mn-2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1-\dfrac{d}{m}\right)}+1\right\}$$

$$=\frac{R}{m}\left(1-\frac{d}{m}\right)\cdot\frac{\left(1-\dfrac{d}{m}\right)^{-mn}-1}{\dfrac{d}{m}}$$

$$=\frac{R}{m}\left\{\frac{\left(1-\dfrac{d}{m}\right)^{-(mn-1)}-1}{\dfrac{d}{m}}+1\right\} \qquad 〔722〕$$

(3) 償還賦金

公式〔710〕から，Rを求める。

$$R=Pp\left[\sum_{t=1}^{np}\left\{1-\frac{d}{p}\cdot S_{\overline{t}|}\ at(a-1)\right\}\right]^{-1}$$

$$=Pp\left\{\left(1-\frac{d}{p}\right)+\left(1-\frac{d}{p}\cdot S_{\overline{2}|}\right)\right.$$

$$+\cdots\cdots+\left(1-\frac{d}{p}\cdot S_{\overline{np|}}\right)\Bigg\}^{-1}\ at(a-1) \qquad [730]$$

$r=0,\ p=1$ のとき

$$R=P\{(1-d)+(1-2d)+\cdots\cdots+(1-nd)\}^{-1}$$

$$=\frac{P}{n\left(1-d\cdot\dfrac{n+1}{2}\right)} \qquad [731]$$

$r=-d,\ p=m$ のとき

$$R=Pm\left\{\left(1-\frac{d}{m}\right)+\left(1-\frac{d}{m}\right)^2+\cdots\cdots+\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}\right\}^{-1}$$

$$=Pm\left\{\frac{1-\left(1-\dfrac{d}{m}\right)^{mn+1}}{\dfrac{d}{m}}-1\right\}^{-1} \qquad [732]$$

〔2〕 割 引 力

公式〔700〕において,

$$\frac{d}{p}=-\left\{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}$$

とし, $r=-d$ と置くと,

$$P=S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn} \qquad \text{既述〔703〕}$$

本式において, 割引率を瞬間ごとに転化する場合を求めるには, $m\to\infty$ とする。

いま,

$$\frac{d_m}{m}=-\frac{1}{x'},\quad m=-d_m x',\quad d_\infty=\delta'$$

として求める。

$$P=S\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{mn}$$

$$=S\cdot\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\right\}^{-\delta'_n}$$

$$\therefore \quad P=Se^{-\delta'_n} \qquad 〔741〕$$

$$S=Pe^{\delta'_n} \qquad 〔742〕$$

δ'を割引力といい，公式〔741〕，〔742〕は割引力による現価，終価を示す公式である。

§2 利　力

公式〔100 B〕において，

$$\frac{i}{p}=\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1$$

とし，$r=i$ と置くと，

$$S=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \qquad \text{既述〔233〕}$$

本式において，$m\to\infty$ とするため，

$$\frac{i_m}{m}=\frac{1}{x},\quad m=i_m x,\quad i_\infty=\delta$$

と置くと，

$$S=P\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mn}$$

$$=P\cdot\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\delta n}$$

$$\therefore \quad S=Pe^{\delta n} \qquad 〔751〕$$

$$P=Se^{-\delta n} \qquad 〔752〕$$

この δ を利力といい，公式〔751〕，〔752〕は，利力による複利終価，複利現価を示す。

δ に相当する i を求めると，次のようである。

$$(1+i)^n \fallingdotseq e^{\delta n}$$

$$i=e^{\delta}-1$$

また，

$$\delta=\log_e(1+i)$$

〔1〕 利力による年金終価，年金現価

(1) 期末払年金終価

公式〔321〕において，

$$\frac{i}{p}\to(e^{\frac{\delta}{p}}-1),\quad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\to e^{\frac{\delta}{p}}$$

とする。

$$S=\frac{R}{p}\left\{np+(e^{\frac{\delta}{p}}-1)\cdot\frac{\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}-np}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}\right\}$$

$$=\frac{R}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ at(e^{\frac{\delta}{p}}-1) \qquad 〔761〕$$

(2) 期末払年金現価

公式〔341〕において，本節〔1〕(1)に準ずる。

$$P=\frac{R}{p}\{e^{-\frac{\delta}{p}}+e^{-2\cdot\frac{\delta}{p}}+\cdots\cdots+e^{-n\delta}\}$$

$$=\frac{R}{p}\cdot a_{\overline{np}|}\ at(e^{\frac{\delta}{p}}-1) \qquad 〔762〕$$

〔2〕 利力と割引力

公式〔741〕と〔752〕から，

$$\delta'=\delta \qquad 〔763〕$$

と割引力と利力は一致する。すなわち，割引率と利率は転化回数が瞬間ごとの場合には差異はない[15)]。

従って，割引力による年金は，利力によるものと一致する。

§3 連続年金

連続年金とは，年金を瞬間ごとに支払うものと仮定した年金である。連続払には，期末払，期首払の区別はない[16)]。

連続年金は，公式〔321〕，〔341〕において，

$$\frac{i}{p}\to\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1$$

と置き，$p\to\infty$ の極限値を求めればよい。

$$\bar{S}=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$\bar{P}=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{p}\left\{\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}+\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{2\cdot\frac{m}{p}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}}\right\}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

上式は,

$$\bar{S}=R\cdot\lim_{p\to\infty}\frac{\dfrac{1}{p}\left\{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1\right\}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$=R\cdot\lim_{p\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{p^2}\left\{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1\right\}}{-\dfrac{m}{p^2}\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\log_e\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}$$

$$=\frac{R}{m}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\log_e\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}=R\cdot\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\delta} \qquad 〔771〕$$

となり，下式は,

$$\bar{P}=\frac{R}{m}\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{\log_e\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}=R\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{\delta} \qquad 〔772〕$$

となる。

また,

$m=1$ のとき

$$\bar{S}=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\log_e(1+i)}=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\delta}$$

$$=R\cdot S_{\overline{n}|}\cdot \bar{S}_{\overline{1}|} \qquad [773]$$

$$\tilde{P}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}$$

$$=R\cdot a_{\overline{n}|}\cdot \bar{S}_{\overline{1}|} \qquad [774]$$

$m\to\infty$　のとき

$$\bar{S}=R\cdot\frac{e^{\delta_n}-1}{\delta} \qquad [775]$$

$$\bar{P}=R\cdot\frac{1-e^{-\delta_n}}{\delta} \qquad [776]$$

参考に，割引率による連続年金現価を示しておこう。

公式〔710〕において，

$$\frac{d}{p}=-\left\{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\},\qquad r=-d$$

と置くと，

$$P=\frac{R}{p}\left\{\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+\frac{m}{p}}}{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}-1\right\}$$

従って，

$$\bar{P}=R\cdot\lim_{p\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{p}\left\{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+\frac{m}{p}}\right\}}{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}-\frac{1}{p}\right]$$

$$=R\cdot\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+\frac{m}{p}}-\frac{m}{p}\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn+\frac{m}{p}}\log_e\left(1-\frac{d}{m}\right)}{-m\left(1-\frac{d}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\log_e\left(1-\frac{d}{m}\right)}\right]$$

$$=\frac{R}{m}\cdot\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}}{-\log_e\left(1-\frac{d}{m}\right)}=R\frac{1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}}{\delta} \qquad [780]$$

$m=1$　のとき

$$\bar{P}=R\cdot\frac{1-(1-d)^{n}}{-\log_{e}(1-d)}=R\cdot\frac{1-(1-d)^{n}}{\delta} \qquad [781]$$

$m\to\infty$ のとき

$$\bar{P}=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \qquad [782]$$

〔例14〕 年金年額¥30,000期間5年の次の年金現価を求めよ。

a 年2回払，年割引率12%年2回転化

b 連続払，年割引率12%年2回転化

c 年2回払，利力年12%

d 連続払，利力年12%

〔解〕

a 公式〔712〕による。

$$P=\frac{¥30,000}{2}\times\left\{\frac{1-\left(1-\frac{0.12}{2}\right)^{10+1}}{\frac{0.12}{2}}-1\right\}$$

$$=¥15,000\times\left\{\frac{1-0.5062\ 9821}{0.06}-1\right\}$$

$$=¥15,000\times(8.2283\ 63-1)$$

$$=\underline{\underline{¥108,425}}$$

計算については，本稿末尾を参照せられたい。

b 公式〔780〕による。

$$\bar{P}=\frac{¥30,000}{2}\times\frac{1-\left(1-\frac{0.12}{2}\right)^{2\times5}}{-\log_{e}\left(1-\frac{0.12}{2}\right)}$$

$$=¥15,000\times\frac{1-0.5386\ 1511}{0.0618\ 7540}$$

$$=¥15,000\times7.4566\ 77$$

$$=\underline{\underline{¥111,850}}$$

c 公式〔762〕による。

$$P=\frac{¥30,000}{2}\times\frac{1-e^{-0.06\times10}}{e^{0.06}-1}$$

$$=¥15,000\times\frac{1-0.5488\ 1164}{1.0618\ 3655-1}$$

$$=¥15,000\times 7.2964\ 7$$

$$=\underline{¥109,447}$$

計算については，本稿末尾を参照せられたい。

d　公式〔776〕による。

$$\bar{P}=¥30,000\times\frac{1-e^{-a12\times5}}{0.12}$$

$$=¥30,000\times\frac{1-0.5488\ 1164}{0.12}$$

$$=¥30,000\times 3.7599\ 030$$

$$=\underline{¥112,797}$$

以下の電卓は，HP 38 E を利用したものを示す。

〔例 1〕 a

(1)

END

f FIN

1

ENTER

2

÷

n

6

i

1

CHS

PMT

FV

<

f 8 ……0.4927 1690

STO 1

5

n

FV ……5.6370 9296

<

.07

×

2

÷

RCL 1

÷

1

↗

+

100,000

×

f 0

¥ 140,043

(2)

END

f FIN

1.06

f $\sqrt{x}$

1

−

100

×

i

10

n

1

CHS

PMT

FV

<

f 8

.035

×

1

+

100,000

×

f 0

¥ 140,043

〔例 4〕 **a**

1.03
f $1/x$
STO 1
.03
$S_{\overline{2}|}$
×
1
+
f $1/x$
+
STO 1
⋮
.03
$S_{\overline{10}|}$
×
1
+
f $1/x$
+
STO 1
RCL 1
f 8 ……8.5646 5760
50,000
×
f 0

¥ 428,233

(注) $S_{\overline{2}|}$～$S_{\overline{10}|}$ は別途計算

〔例 7〕 **c**

1
ENTER
1
ENTER
14
÷
g y^x
<
1
$x \rightleftarrows y$
−
f 8 ……0.1516 5710
STO 1
1
$x \rightleftarrows y$
−
ENTER
5
g y^x ……0.4393 9706
<
700,000
×
RCL 1
×
f 0

¥ 46,646

〔**例 14**〕 **a**

(1)		(2)	(3)
1		END	BIGIN
ENTER		f FIN	f FIN
.06		11	10
−		n	n
ENTER		6	6
11		CHS	CHS
g y^x		i	i
	<	1	1
f 8	……0.5062 9821	CHS	CHS
1		PMT	PMT
$x \rightleftarrows y$		FV	FV
−		<	<
.06		1	15,000
÷		−	×
1		15,000	f 0
−		×	
15,000		f 0	
×			**¥ 108,425**
f 0			
		¥ 108,425	
¥ 108,425			

(注) i を負数とし，$(1-i)^n$ において
$n>0$……FV
$n<0$……PV
を利用する。

〔**例 14**〕 **c**

(1)		(2)
.06		END
g e^x		f FIN
	<	.06
f 8	……1.0618 3655	g e^x
1		<
−		1
STO 1		−
.6		100
CHS		×
g e^x	……0.5488 1164	i
	<	10
1		n
$x \rightleftarrows y$		15,000
−		CHS
RCL 1		PMT
÷	……7.2964 6764	PV
15,000		<
×		f 0
f 0		
		¥ 109,447
¥ 109,447		

1) 拙稿「投資計算の基礎公式について」本学会誌第15巻第2号，1979年12月の新拡張，整備である。

2) 普通には，$j_{(m)}$ で示し，m は転化回数を示すが，本稿では便宜単に i で示し，特に転化回数を示す必要ある場合は，その回数を添記する方法を採ることとする。

3) 公式〔100〕は，前稿(注1)の公式〔101〕の一般形に相当する。

4) Forsyth は別の立場から，定期払利息を詳細に研究している。

Forsyth, C. H.: Introduction to the Mathematical Theory of Finance '28

5) 公式〔200〕は，前稿の公式〔201〕の一般形に相当する。

6) $S_{\overline{\frac{1}{2}|}}$ 表は，

Gushee, C. H.: Financial Compound Interest and Annuities Tables 5 th ed. '76

にある。

7) 本式は，前稿の公式〔301〕の一般形に相当する。

8) $S_{\overline{np-1|}}\ at(a-1)=\dfrac{a^{np-1}-1}{a-1}$ において，$a=1$ の場合には，$\dfrac{0}{0}$ となる。この形のときは，分母，分子別々に微分して，その極限値を採ればよい。

$$\lim_{a\to 1}\frac{a^{np-1}-1}{a-1}=\lim_{a\to 1}\frac{(np-1)a^{np-2}}{1}=np-1$$

また，次のように変形して，分母子別に2度微分して第2式を求め得る。

$$\frac{i}{p}\cdot\frac{S_{\overline{np|}}\ at(a-1)-np}{a-1}=\frac{i}{p}\cdot\frac{a^{np}-1-np(a-1)}{(a-1)^2}$$

9) 本式は，前稿公式〔401〕の一般形に相当する。

10) 単利年金現価率といわれているもので，次書に詳しい。

佐藤信吉：単利計算の理論と応用 '63

11) 本式は，前稿公式〔501〕の一般形に相当する。

12) 本式は，前稿公式〔601〕の一般形に相当する。

13) わが国の「企業会計原則注解　注20」にいう等差級数法は，本法をさすものと一般に解されている。

14) わが国の実務では，本法が広く用いられている。

社債引受協会：新債券利回表 '77 によると，¥99.453 となっている。

15) 拙著：新会計数理 '77 p. 148 参照。

16) 前掲拙著 p. 141 参照。前稿〔1〕″ の公式は，積分を利用して求めている。

(1981. 9. 6 稿)