住宅ローンの数理

野沢　孝之助

まえがき

筆者は住宅ローンについて，既に次の二論文と一著書において論究している。

本稿は，その後の研究によって，これらを整備拡充せんとするものであって，なるべくこれらと説明方法を変えるようにする。

〝住宅ローンの計算〞　同志社商学　第26巻第4・5・6合併号　1975年3月

〝住宅ローンの計算――数表化と電卓の利用〞　本学会誌　第11巻第1・2・3合併号　1975年11月

新会計数理――利息算とその応用　中央経済社　1977年6月

1.　ローンに伴う雑費

住宅ローンにおいては，期間が長期にわたるので，その間の支払保証のための保証料，また，借主に対する生命保険料などその他の手数料を徴せられる。以下これらを一括して手数料という。手数料は，金融機関，融資額，融資期間などによって異なるが，本稿では融資額に対する一定歩合 f とその外に定額 F を徴する方法を示す。

借入額 P，期間 n 年，月利 $\frac{j_{(12)}}{12}$ の元利均等月払方式で償還する場合，手数料として一定歩合 f と定額 F を徴し，実質月利を k 年間は $\frac{j'_{(12)}}{12}$ 残期間は $\frac{j_{(12)}}{12}$ となるようにすると，次式が成立する。

$$P\left(1-f-\frac{F}{P}\right)=P(a_{\overline{12n}|})^{-1}a'_{\overline{12k}|}+v'^{12k}P(a_{\overline{12n}|})^{-1}a_{\overline{12(n-k)}|}$$

$$(a_{\overline{n}|})^{-1}=\frac{\dfrac{j_{(12)}}{12}}{1-\left(1+\dfrac{j_{(12)}}{12}\right)^{-n}}$$

$$a'_{\overline{n}|}=\frac{1-\left(1+\dfrac{j'_{(12)}}{12}\right)^{-n}}{\dfrac{j'_{(12)}}{12}}$$

$$v'=\left(1+\frac{j'_{(12)}}{12}\right)^{-1}$$

$$f+\frac{F}{P}=1-(a_{\overline{12n}|})^{-1}\{a'_{\overline{12k}|}+v'^{12k}a_{\overline{12(n-k)}|}\} \qquad [101]^{1)}$$

本式から，f，Fまたは $j'_{(12)}$ を求めることができる。

また，$k=n$ とおくと，公式〔101〕は次式のようになる。

$$f+\frac{F}{P}=1-(a_{\overline{12n}|})^{-1}a'_{\overline{12n}|} \qquad [102]^{2)}$$

2. 月払方式

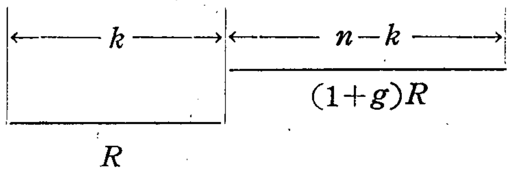
k 年間1年ごとに aR の月払，その後 $(n-k)$ 年間は bR あて月払，月利率 $\dfrac{j_{(12)}}{12}$ による基礎公式は，次のようである。

$$P=R\{a_{\overline{12}|}\cdot\sum_{t=1}^{k}av^{12(t-1)}+b\cdot a_{\overline{12(n-k)}|}\cdot v^{12k}\} \quad \text{at}\ \frac{j_{(12)}}{12}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{R=P\{a_{\overline{12}|}\cdot\sum_{t=1}^{k}av^{12(t-1)}+b(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\}^{-1}} \quad \textbf{at}\ \boldsymbol{\frac{j_{(12)}}{12}} \qquad \textbf{[200]}$$

以下，a，b が種々の形を採る場合について論ずる。

(1) $\begin{cases}a=1\\ b=1+g\end{cases}$



〔200〕式から，

$$R=P\{a_{\overline{12}|}\cdot\sum_{t=1}^{k}v^{12(t-1)}+(1+g)(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\}^{-1} \quad \text{at}\ \frac{j_{(12)}}{12}$$

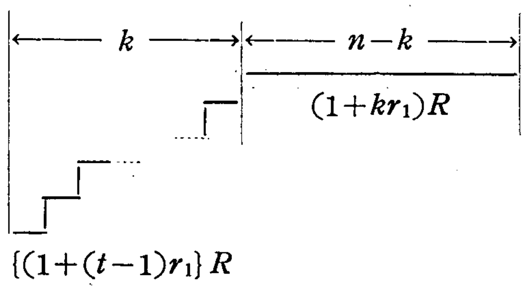
$$=P\left\{a_{\overline{12}|}\cdot\frac{a_{\overline{12k}|}}{a_{\overline{12}|}}+(1+g)(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\right\}^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P\{(1+g)a_{\overline{12n}|}-g\cdot a_{\overline{12k}|}\}^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}\qquad〔201〕$$

となる。

$g>0$……増加，$g<0$　減少

(2)　$\begin{cases}a=1+(t-1)r_1\\ b=1+kr_1\end{cases}$



〔200〕式から

$$R=P[a_{\overline{12}|}\cdot\sum_{t=1}^{k}\{1+(t-1)r_1\}v^{12(t-1)}$$

$$+(1+kr_1)(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})]^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P[a_{\overline{12}|}\{(1-r_1)\sum_{t=1}^{k}v^{12(t-1)}+r_1\cdot\sum_{t=1}^{k}tv^{12(t-1)}\}$$

$$+(1+kr_1)(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})]^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P\left[a_{\overline{12}|}\cdot(1-r_1)\cdot\frac{a_{\overline{12k}|}}{a_{\overline{12}|}}+\frac{r_1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{\frac{a_{\overline{12k}|}}{a_{\overline{12}|}}-k\left(1-\frac{j_{(12)}}{12}a_{\overline{12k}|}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+(1+kr_1)(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\right]^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P\left[(1+kr_1)a_{\overline{12n}|}+\frac{r_1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left(\frac{1}{a_{\overline{12}|}}-\frac{j_{(12)}}{12}\right)a_{\overline{12k}|}-\frac{kr_1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\right]^{-1}$$

$$\text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P\left[(1+kr_1)a_{\overline{12n}|}-\frac{r_1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{(1+k)-\frac{a_{\overline{12(k+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right]^{-1}\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

〔202〕

となる。

$r_1>0$……増加，$r_1<0$……減少

また，$r_1=\dfrac{Q}{R}$ とすると，

〔202〕式は，次式のようになる。

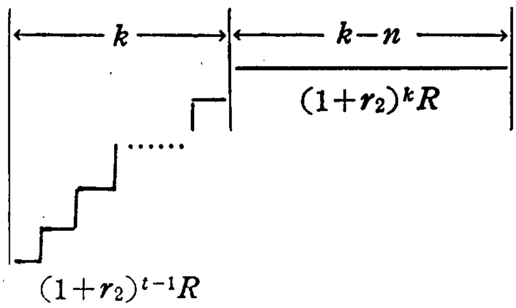
$$R=P\left[\left(1+\frac{kQ}{R}\right)a_{\overline{12n}|}-\frac{Q}{\frac{j_{(12)}}{12}\cdot R}\left\{(1+k)-\frac{a_{\overline{12(k+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right]^{-1}\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=\frac{P-Q\left[k\cdot a_{\overline{12n}|}-\frac{1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{(1+k)-\frac{a_{\overline{12(k+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right]}{a_{\overline{12n}|}}\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=\left[P+\frac{Q}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{(1+k)-\frac{a_{\overline{12(k+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right](a_{\overline{12n}|})^{-1}-Qk\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

〔202〕′

(3) $\begin{cases} a=(1+r_2)^{t-1} \\ b=(1+r_2)^{k} \end{cases}$



〔200〕式は，

$$R=P\{a_{\overline{12}|}\cdot\sum_{t=1}^{k}(1+r_2)^{t-1}v^{12(t-1)}+(1+r_2)^k(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\}^{-1}\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

$$=P\left\{a_{\overline{12}|}\cdot\frac{(1+r_2)^k v^{12k}-1}{(1+r_2)v^{12}-1}+(1+r_2)^k(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\right\}^{-1}\quad \text{at}\,\frac{j_{(12)}}{12}$$

ここで $(1+r_2)v^{12}=1+i'$ とおく[3] と，

$$R=P\{a_{\overline{12}|}\cdot S'_{\overline{k}|}+(1+r_2)^k(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\}^{-1}$$

$$=P\left[\left\{a_{\overline{12}|}\cdot a'_{\overline{k}|}+\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{12k}(a_{\overline{12n}|}-a_{\overline{12k}|})\right\}(1+i')^k\right]^{-1}$$

$$=P[\{a_{\overline{12}|}\cdot a'_{\overline{k}|}+a_{\overline{12(n-k)}|}\}(1+i')^k]^{-1}$$ 〔203〕[4]

$a_{\overline{n}|}$ at $\frac{j_{(12)}}{12}$, $a'_{\overline{k}|}$ at i'

$r_2>0$……増加，$r_2<0$……減少

(4) (1)～(3)の特例を示す。

(a) 〔201〕式において $g=0$

〔202〕式において $r_1=0$

〔202〕′式において $Q=0$

〔203〕式において $r_2=0$

とすると，いずれも

$$R=P(a_{\overline{12n}|})^{-1}\quad \text{at}\ \frac{j_{(12)}}{12}$$ 〔204〕

と周知の均等月払償還の公式となる。

(b) $k=n$ とすると，以下いずれも全期間にわたって，1年ごとに逓増（または逓減）する場合の公式となる。

〔202〕式は，

$$R=P\left[(1+nr_1)a_{\overline{12n}|}-\frac{r_1}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{(1+n)-\frac{a_{\overline{12(n+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right]^{1-}\quad \text{at}\ \frac{j_{(12)}}{12}$$

〔205〕[5]

〔202〕′式は，

$$R=\left[P+\frac{Q}{\frac{j_{(12)}}{12}}\left\{(1+n)-\frac{a_{\overline{12(n+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right](a_{\overline{12n}|})^{-1}-Qn\quad \text{at}\ \frac{j_{(12)}}{12}$$

〔205〕′

〔203〕式は，

$$R=P\{a_{\overline{12}|}\cdot a'_{\overline{n}|}(1+i')^n\}^{-1}$$

$$=P(a_{\overline{12}|})^{-1}\{(a'_{\overline{n}|})^{-1}-i'\}$$ 〔206〕[6]

3. 月払算例

〔算例1〕 住宅ローン800万円を期限20年，利率年 $j_{(12)}=8.64\%$，毎月元利均等払で借入れた。契約時に手数料として借入額の1%と5万円を徴収された。この実質利回りは何程となるか。

（解） 公式〔102〕による。

$$0.01+\frac{¥50,000}{¥8,000,000}=1-(a_{\overline{12\times20}|})^{-1}\ \text{at}\ \frac{8.64}{12}\%\times a_{\overline{12\times20}|}\ \text{at}\ \frac{j'_{(12)}}{12}$$

$$0.0162\ 5=1-0.0087\ 6704\times a_{\overline{240}|}\ \text{at}\ \frac{j'_{(12)}}{12}$$

$$a_{\overline{240}|}\ \text{at}\ \frac{j'_{(12)}}{12}=112.2100\ 504^{\ 7)}$$

$$\frac{j'_{(12)}}{12}=0.7389\ 11\%$$

$$\therefore\ j'_{(12)}=\underline{\underline{8.87\%}}$$

（注） 電卓利用は末尾参照。

〔算例2〕 住宅ローン800万円を期限20年，利率年 $j_{(12)}=8.64\%$ で借入れた。最初の5年間は R，その後は $R(1+0.2)$ の毎月均等払とする，R は何程か。

（解） 公式〔201〕において，$n=20$，$k=5$，$g=0.2$ とおけばよい。

$$R=¥8,000,000\times\{1.2a_{\overline{12\times20}|0.72\%}-0.2a_{\overline{12\times5}|0.72\%}\}^{-1}$$
$$=¥8,000,000\times\{1.2\times114.0635\ 378-0.2\times48.5812\ 5211\}^{-1}$$
$$=¥8,000,000\times0.0078\ 6411=\underline{\underline{¥62,913}}$$

（注） 1. 月利率が低いため特殊賦金表[8]を利用する場合には

$$¥8,000,000\times\left\{\frac{1.2}{(a_{\overline{240}|})^{-1}}-\frac{0.2}{(a_{\overline{60}|})^{-1}}\right\}^{-1}$$

と逆数を利用しなければならない。以下も同様である。

2. 電卓利用は末尾参照。

〔算例3〕 住宅ローン800万円を借入れ，次のように償還する場合，初年度の月賦金を求めよ。期限20年，利率年 $j_{(12)}=8.64\%$

最初の5年間 初年度 R，第2年度 $R+¥2,000$ 第3年度 $R+¥4,000$……の月払

その後15年間　$R+¥10,000$　の月払

（解）公式〔202〕′による。

$$R=\left[¥8,000,000+\frac{¥2,000}{0.0072}\times\left\{(1+5)-\frac{a_{\overline{12(5+1)}|}}{a_{\overline{12}|}}\right\}\right](a_{\overline{12\times 20}|})^{-1}$$

$$-¥2,000\times 5 \quad \text{at } 0.72\%$$

$$=\left[¥8,000,000+\frac{¥2,000}{0.0072}\times\left\{6-\frac{56.0306\ 1680}{11.4567\ 7178}\right\}\right]$$

$$\times 0.0087\ 6704-¥10,000$$

$$=\underline{\underline{¥62,838}}$$

〔算例4〕 住宅ローン800万円を借入れ，次のように償還する場合，初年度の月賦金を求めよ。期限20年，利率年 $j_{(12)}=8.64\%$

最初の5年間　初年度R，第2年度 $R(1+0.03)$，第3年度 $R(1+0.03)^2$……の月払

その後15年間　$R(1+0.03)^5$ の月払

（解）公式〔203〕による。

$$¥8,000,000\times[\{a_{\overline{12}|}\cdot a'_{\overline{5}|}+a_{\overline{12(20-5)}|}\}(1+i')^5]^{-1}$$

ただし，$i'=(1+0.03)v^{12}-1=-5.4963\ 4193\%$

$$=¥8,000,000\times[\{11.4567\ 7178\times 5.9430\ 7369+100.7086\ 690\}$$

$$\times 0.7537\ 7737\ 6]^{-1}$$

$$=¥8,000,000\times 0.0078\ 5944\ 5=\underline{\underline{¥62,876}}$$

（注）電卓利用は末尾参照。

〔算例5〕 住宅ローン800万円を期限20年，利率年 $j_{(12)}=8.64\%$ で借入れ，初年度はR，第2年度は$R+¥2,000$，第3年度は$R+¥4,000$……と1年ごとに全期にわたって逓増する月払法で償還する場合，初年度の月払額を求めよ。

（解）公式〔205〕′による。

$$\left\{¥8,000,000+\frac{¥2,000}{0.0072}\times\left(21-\frac{a_{\overline{12\times 21}|}}{a_{\overline{12}|}}\right)\right\}(a_{\overline{12\times 20}|})^{-1}$$

$$-¥2,000\times 20 \quad \text{at } 0.72\%$$

$$=\left\{¥8,000,000+\frac{¥2,000}{0.0072}\times\left(21-\frac{116.1113\ 501}{11.4567\ 7178}\right)\right\}$$

$$\times 0.0087\ 6704-¥40,000$$

$$=\underline{\underline{¥56,596}}$$

4. ボーナス払方式

わが国における住宅ローンでは，ボーナス期ごとに均等払を行う方式が，均等月払方式と併用されることが多い。この場合は，借入額の 30%～50% 程度は，均等ボーナス払方式による。

ボーナス払月は通例1月，7月（または，6月，12月）と定められているから，住宅ローンの契約月によって，第1回ボーナス払が何か月後になるかが異なる。すなわち，契約月から1か月後～6か月後の6種となるが，これらをそれぞれmか月据置（$m=1\sim6$）という。

いま，借入額のうちボーナス払による額を P_b とし，mか月据置のボーナス払額 R_b を求める基礎公式は，次のようである。

$$\boldsymbol{R_b=P_b\cdot a(n)\cdot b(m)} \qquad \text{〔400〕}$$

(1) 月利率 $\dfrac{j_{(12)}}{12}$ を用いる場合

$$\begin{cases} a(n)=(a_{\overline{12n}|})^{-1}\cdot S_{\overline{6}|} \\ b(m)=v^{6-m} \end{cases}$$

従って，

$$R_b=P_b\,(a_{\overline{12n}|})^{-1}\cdot S_{\overline{6}|}\cdot v^{6-m} \quad \text{at } \frac{j_{(12)}}{12} \quad ^{9)}$$

$$=P_b(a_{\overline{2n}|})^{-1}\cdot v^{1-\frac{m}{6}} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6-1\right\} \qquad \text{〔401〕}$$

とする。

(2) 1期（6か月）の利率 $6\times\dfrac{j_{(12)}}{12}=\dfrac{j_{(12)}}{2}$ を用いる場合

$$\begin{cases} a(n)=(a_{\overline{2n}|})^{-1} \\ b(m)=\dfrac{1+\dfrac{m\cdot j_{(12)}}{12}}{1+\dfrac{j_{(12)}}{2}} \end{cases}$$

従って，

$$R_b = P_b (a_{\overline{2n}|})^{-1} \frac{1+\dfrac{m \cdot j_{(12)}}{12}}{1+\dfrac{j_{(12)}}{2}} \quad \text{at} \frac{j_{(12)}}{2} \qquad [402]^{10)}$$

とする。

ここに，$b(m)$ については，単利割引法の1種を利用し，理論的には問題があるが，実務では広く利用されている。(2)の場合は，(1)の場合より低い利率を用いることになることに注意せられたい。

5. ボーナス併用払算例

〔算例6〕 住宅ローン800万円を借入れ，うち，500万円は均等月払，残額は均等ボーナス払と併用で償還する。ただし，期限20年，月利0.72%，ボーナス払は4か月据置とする。

（解） 均等月払額は，公式〔204〕による。

$$¥5,000,000 \times (a_{\overline{12\times20}|})^{-1} \quad \text{at } 0.72\%$$

$$= ¥5,000,000 \times 0.0087\ 6704 = \underline{\underline{¥43,835}}$$

均等ボーナス払額[11)]

(1) 公式〔401〕による。

$$¥3,000,000 \times (a_{\overline{2\times20}|})^{-1} \times v^{1-\frac{4}{6}} \quad \text{at } \{1+0.0072)^6-1\}$$

$$= ¥3,000,000 \times 0.0535\ 5824 \times 0.9857\ 5404$$

$$= \underline{\underline{¥158,386}}$$

(2) 公式〔402〕による。

$$¥3,000,000 \times (a_{\overline{2\times20}|})^{-1} \cdot \frac{1+4\times0.0072}{1+6\times0.0072} \quad \text{at } 4.32\%$$

$$= ¥3,000,000 \times 0.0529\ 5435\ 5 \times 0.9861\ 9632$$

$$= \underline{\underline{¥156,670}}$$

（注） 1. 電卓利用は末尾参照。

2. 実務では，月賦金，毎月利息は円未満切捨を行い，最終期の月賦金において調整する方法が採られることがある。

しかし，本稿ではすべて円未満4捨5入を行い，最終期の利息で調整する方法を採る。

6.　繰上償還とその算例

（I）　均等月払方式

期限n年の場合，中間において残額の一部または全部の繰上償還が金融機関の承諾を得られたときは，いくらの金額を支払えばよいか。

契約月から第T_1回支払直後においてT_2回分（第T_1回支払とは別に）繰上償還するとき，その支払額は，

$$P_b(a_{\overline{12n}|})^{-1}(a_{\overline{12n-T_1}|}-a_{\overline{12n-(T_1+T_2)}|})\quad \mathrm{at}\frac{j_{(12)}}{12}\qquad [601]^{12)}$$

$$=R_b\{T_2-\frac{j_{(12)}}{12}\cdot\sum_{t=0}^{T_2-1}a_{\overline{12n-T_1-t}|}\}\quad \mathrm{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

となる。すなわち，T_2回分の元利均等支払額（月賦金合計）から，その繰上期間の利息分合計を差引いた元金償還分の合計のみを支払えばよいことになる。この差引かれる利息分合計を戻し利息という[13)]。

この方法によれば，次月から従前通り月賦金の支払を行えばよく，ただ最終償還期がT_2か月繰上ることとなるだけである。これを中抜方式といい，実務に広く利用されている。

もし，公式〔601〕において，

$$T_2=12n-T_1$$

とおけば，残額全部を一括償還する場合の支払額を求める公式となる。

$$R_b\cdot a_{\overline{2n-T_1}|}\qquad [602]^{14)}$$

（II）　均等月払と均等ボーナス払併用方式

期限n年の場合，繰上償還を行うとき（I）の中抜方式とするには，6か月単位の制約が必要となる[15)]。

均等月払については，公式〔601〕によればよいから，以下，均等ボーナス払について考える。

(1)　月利率 $\frac{j_{(12)}}{12}$ を用いる場合

ボーナス払額は，公式〔401〕によって，

$$R_b = P_b \cdot (a_{\overline{2n}|})^{-1} \cdot v^{1-\frac{m}{6}} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6 - 1\right\}$$

であるから，第 T_1 回から m' か月後において，T_2 回分を繰上償還するとき，その支払額は，

$$R_b\left\{a_{\overline{2n-T_1}|}\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} - a_{\overline{2n-(T_1+T_2)}|}\right\} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6 - 1\right\}$$

〔603〕

となる。

(2) 1期の利率 $\frac{j_{(12)}}{12}\times 6 = \frac{j_{(12)}}{2}$ を用いる場合

ボーナス払額は，公式〔402〕によって，

$$R_b = P_b \cdot (a_{\overline{2n}|})^{-1} \cdot \frac{1+\frac{m \cdot j_{(12)}}{12}}{1+\frac{j_{(12)}}{2}} \quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{2}$$

であるから，第 T_1 回支払 m' か月後における T_2 回分繰上償還の支払額は，

$$R_b\left\{a_{\overline{2n-T_1}|}\left(1+\frac{m' \cdot j_{(12)}}{12}\right) - a_{\overline{2n-(T_1+T_2)}|}\right\} \quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{2} \qquad 〔604〕$$

となる。

もし，公式〔603〕,〔604〕において，

$$T_2 = 2n - T_1$$

とおけば，残額全部を一括償還する場合の支払額を，それぞれ求める公式となる。

$$R_b \cdot a_{\overline{2n-T_1}|} \cdot \left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6 - 1\right\} \qquad 〔605〕$$

$$R_b \cdot a_{\overline{2n-T_1}|} \cdot \left(1+\frac{m' \cdot j_{(12)}}{12}\right) \quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{2} \qquad 〔606〕$$

しかし，上記の中抜方式に代えて，返済期間を縮めないで，以後の月賦金を減額することも可能である。これを減額方式[16]という。

この場合は，Bを前払額とすると，次のようになる。

均等月払方式

$R_b \cdot a_{\overline{12n-T_1}|} - B$ を残期間（$12n-T_1$）で月払することになる。

$$\{R_b \cdot a_{\overline{12n-T_1}|} - B\}(a_{\overline{12n-T_1}|})^{-1} \quad \text{at} \frac{j_{(12)}}{12}$$

$$= R_b - B(a_{\overline{12n-T_1}|})^{-1} \quad \text{at} \frac{j_{(12)}}{12} \qquad [601]'$$

均等ボーナス払方式

(1)の場合は，$R_b \cdot a_{\overline{2n-T_1}|} \cdot \left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} - B$ を（$6-m'$）据置，（$2n-T_1$）回のボーナス払することになる。

$$\left\{R_b \cdot a_{\overline{2n-T_1}|} \cdot \left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} - B\right\}(a_{\overline{2n-T_1}|})^{-1} \cdot v^{1-\left(1-\frac{m'}{6}\right)}$$

$$\text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{6}-1\right\}$$

$$= \left\{R_b \cdot \left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} - B(a_{\overline{2n-T_1}|})^{-1}\right\} v^{\frac{m'}{6}} \qquad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{6}-1\right\}$$

$$= R_b - B(a_{\overline{2n-T_1}|})^{-1} \cdot v^{\frac{m'}{6}} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{6}-1\right\} \qquad [603]'$$

(2)の場合は同様に考えて，

$$\left\{R_b \cdot \left(1+\frac{m' \cdot j_{(12)}}{12}\right) - B(a_{\overline{2n-T_1}|})^{-1}\right\} \cdot \frac{1+(6-m') \cdot j_{(12)}}{1+\frac{j_{(12)}}{2}} \quad \text{at} \frac{j_{(12)}}{2}$$

$$[604]'$$

〔算例7〕 算例6の第19月支払直後（$m'=3$）において，12か月分前払するときは，中抜方式でその支払額はいくらとなるか。

（解） 均等月払

公式〔601〕によって，$T_1=19$，$T_2=12$ として算出する。

$$¥43,835 \times (a_{\overline{12\times20-19}|} - a_{\overline{12\times20-(19+12)}|}) \quad \text{at } 0.72\%$$

$$= ¥43,835 \times (110.4381\ 189 - 107.8802\ 553)$$

$$= \underline{\underline{¥112,124}}$$

後述の償還表（(1)，(2)とも月払については同様）によると，¥112,123 と4捨5入の関係で小差がある。

(1)　均等ボーナス払，月利率0.72%を用いる場合

この場合は，$T_1=3$，$m'=3$，$T_2=2$ に注意して，公式〔603〕による。

$$¥158,386\times\{a_{\overline{2\times20-3}|}(1+0.0072)^3-a_{\overline{2\times20-5}|}\}\quad \text{at}\ \{(1+0.0072)^6-1\}$$

$$=¥158,386\times\{18.1111\ 0370\times1.0217\ 5589-17.6953\ 9555\}$$

$$=\underline{\underline{¥128,250}}$$

後述の償還表(1)からは，

$$¥2,868,540\times(1+0.0072)^3-¥2,802,697$$

$$=¥128,251$$

となる。

(2)　1期の利率 0.72%×6=4.32% を用いる場合

公式〔604〕による。

$$¥156,670\times\{a_{\overline{2\times20-3}|}\cdot(1+0.0072\times3)-a_{\overline{2\times20-(3+2)}|}\}\quad \text{at}\ 4.32\%$$

$$=¥156,670\times(18.3073\ 6429\times1.0216-17.8800\ 8455)$$

$$=\underline{\underline{¥128,895}}$$

後述償還表(2)からは，

$$¥2,868,218\times(1+0.0072\times3)-¥2,801,277$$

$$=¥128,895$$

となって一致する。

電卓利用は末尾参照。

償　還　表　(1)

返済回数	返済予定年月日	返済額	うち利息部分	うち元金部分	返済後残高	内訳	
						毎月払分	ボーナス払分
1	55.10.25	43,835	36,000	7,835	7,992,165	4,992,165	3,000,000
2	11.25	43,835	35,944	7,891	7,984,274	4,984,274	3,000,000
3	12.25	43,835	35,887	7,948	7,976,326	4,976,326	3,000,000
4	56. 1.25	43,835 158,386	35,830 87,338	8,005 71,048	7,897,273	4,968,321	2,928,952
……							
16	57. 1.25	43,835 158,386	35,110 127,530	8,725 30,856	7,736,178	4,867,638	2,868,540
17	2.25	43,835	35,047	8,788	7,727,390	4,858,850	2,868,540
18	3.25	43,835	34,984	8,851	7,718,539	4,849,999	2,868,540
19	4.25	43,835	34,920	8,965	7,709,624	4,841,084	2,868,540
20	5.25	43,835	34,856	8,879	7,700,645	4,832,105	2,868,540
21	6.25	43,835	34,791	9,044	7,691,601	4,823,061	2,868,540
22	7,25	43,835 158,586	34,726 126,173	9,109 32,213	7,650,279	4,813,952	2,836,327
23	8.25	43,835	34,660	9,175	7,641,104	4,804,777	2,836,327
24	9.25	43,835	34,594	9,241	7,631,863	4,795,536	2,836,327
25	10.25	43,835	34,528	9,307	7,622,556	4,786,229	2,836,327
26	11.25	43,835	34,461	9,374	7,613,182	4,776,855	2,836,327
27	12.25	43,835	34,393	9,442	7,603,740	4,767,413	2,836,327
28	58. 1.25	43,835 158,386	34,325 124,756	9,510 33,630	7,560,600	4,757,903	2,802,697
29	2.25	43,835	34,257	9,578	7,551,022	4,748,325	2,802,697
30	3.25	43,835	34,188	9,647	7,541,375	4,738,678	2,802,697
31	4.25	43,835	34,118	9,717	7,531,658	4,728,961	2,802,697
32	4.25	43,835	34,049	9,786	7,521,871	4,719,175	2,802,697

〔注〕1.　返済予定年月日は仮定

2.　ボーナス支払月は，毎月分とボーナス分を便宜区別して示す。

3.　ボーナス支払分　返済第４月（ボーナス払第１回）

利息部分　¥3,000,000×{(1+0.0072)^4−1}＝¥87,338

元金部分　¥158,386−¥87,338＝¥71,048

ボーナス支払分　返済第16月（ボーナス払第３回）

利息部分　¥2,899,396×{(1+0.0072)^6−1}＝¥127,530

元金部分　¥158,386−¥127,530＝¥30,856

（¥2,899,396……返済第10月支払後残高）

償　還　表　(2)

返済回数	返済予定年月日	返済額	うち利息部分	うち元金部分	返済額残高	内訳 毎月払分	内訳 ボーナス払分
1	55. 10. 25	43, 835	36, 000	7, 835	7, 992, 165	4, 992, 165	3, 000, 000
2	11. 25	43, 835	35, 944	7, 891	7, 984, 274	4, 984, 274	3, 000, 000
3	12. 25	43, 835	35, 887	7, 948	7, 976, 326	4, 976, 326	3, 000, 000
4	56. 1. 25	{ 43, 835 156, 670	{ 35, 830 86, 400	{ 8, 005 70, 270	7, 898, 051	4, 968, 321	2, 929, 730
⋮							
16	57. 1. 25	{ 43, 435 156, 670	{ 35, 110 125, 264	{ 8, 725 31, 406	7, 735, 856	4, 867, 638	2, 868, 218
17	2. 25	43, 835	35, 047	8, 788	7, 727, 068	4, 858, 850	2, 868, 218
18	3. 25	43, 835	34, 984	8, 851	7, 718, 217	4, 849, 999	2, 868, 218
19	4. 25	43, 835	34, 920	8, 965	7, 709, 302	4, 841, 084	2, 868, 218
20	5. 25	43, 835	34, 856	8, 979	7, 700, 323	4, 832, 105	2, 868, 218
21	6. 25	43, 835	34, 791	9, 044	7, 691, 279	4, 823, 061	2, 868, 218
22	7. 25	{ 43, 835 156, 670	{ 34, 726 123, 907	{ 9, 109 32, 763	7, 649, 407	4, 813, 952	2, 835, 455
23	8. 25	43, 835	34, 660	9, 175	7, 640, 232	4, 804, 777	2, 835, 455
24	9. 25	43, 835	34, 594	9, 241	7, 630, 991	4, 795, 536	2, 835, 455
25	10. 25	43, 835	34, 528	9, 307	7, 621, 684	4, 786, 229	2, 835, 455
26	11. 25	43, 835	34, 461	9, 374	7, 612, 310	4, 776, 855	2, 835, 455
27	11. 25	43, 835	34, 393	9, 442	7, 602, 868	4, 767, 413	2, 835, 455
28	58. 1. 25	{ 43, 835 156, 670	{ 34, 325 122, 492	{ 9, 510 34, 178	7, 559, 180	4, 757, 903	2, 801, 277
29	2. 25	43, 835	34, 257	9, 578	7, 549, 602	4, 748, 325	2, 801, 277
30	3. 25	43, 835	34, 188	9, 647	7, 539, 955	4, 738, 678	2, 801, 277
31	4. 25	43, 835	34, 118	9, 717	7, 530, 238	4, 728, 961	2, 801, 277
32	5. 25	43, 835	34, 049	9, 786	7, 520, 452	4, 719, 175	2, 801, 277

〔注〕 ボーナス支払月　返済第４月
　利息部分　¥3, 000, 000×0. 0072×4＝¥86, 400
　元金部分　¥156, 670－¥86, 400＝¥70, 270
ボーナス支払月　返済第16月
　利息部分　¥2, 899, 624×0. 0432＝¥125, 264
　元金部分　¥156, 670－¥125, 264＝¥31, 406

〔算例8〕 算例7において，月払方式は12月分，ボーナス払方式は2回分を前納するとき，減額方式では以後の賦金はいくらとなるか。

（解） 均等月払方式　公式〔601〕′を $B=12R_b$ として適用する。

$$¥43,835\times\{1-12(a_{\overline{12\times20-19|}})^{-1}\}\quad \text{at } 0.72\%$$
$$=¥43,835\times\{1-12\times0.0090\ 5484\ 5\}$$
$$=\underline{\underline{¥39,072}}$$

均等ボーナス払方式　公式〔603〕′，〔604〕′を適用する。$B=2R_b$

(1)
$$¥158,386\times\{1-2(a_{\overline{2\times20-3|}})^{-1}\cdot v^{\frac{3}{6}}\}\quad \text{at}\{(1+0.0072)^6-1\}$$
$$=¥158,386\times\{1-2\times0.0552\ 1475\times0.9787\ 0735\}$$
$$=\underline{\underline{¥141,268}}$$

(2)
$$¥156,670\times\{(1+0.0072\times3)-2(a_{\overline{2\times20-3|}})^{-1}\}$$
$$\times\frac{1+0.0072\times3}{1+0.0072\times6}\quad \text{at } 4.32\%$$
$$=¥156,670\times\{1.0216-2\times0.0546\ 2283\}\times0.9792\ 9448$$
$$=\underline{\underline{¥139,979}}$$

7.　二段金利，利率変更とその算例

二段金利

契約時に借入金を P_1，P_2 と2分し，P_1 に対して k 年間月利 $\frac{j_{(12)}}{12}$ で月賦償還し，P_2 に対しては k 年間据置後，月利 $\frac{j'_{(12)}}{12}$，残期間 $(n-k)$ 年で月賦償還し，前後の月賦金の変額を図ることがある。

まず，R_1 は公式〔204〕を準用して，次のようになる。

$$R_1=P_1(a_{\overline{12k|}})^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

次に，R_2 は k 年，月利 $\frac{j_{(12)}}{12}$ で据置後であることに注意して，公式〔204〕を準用すればよい。

$$R_2=P_2\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{12k}(a_{\overline{12(n-k)|}})^{-1}\quad \text{at}\frac{j'_{(12)}}{12}\qquad〔701〕$$

$$\frac{j_{(12)}}{12}<\frac{j'_{(12)}}{12}\cdots\cdots\text{増額},\quad \frac{j_{(12)}}{12}>\frac{j'_{(12)}}{12}\cdots\cdots\text{減額}$$

〔算例9〕 借入額800万円，期限20年のローンにおいて，まず，300万円を5か年間に，次に，500万円を5年後から残期間に償還する。月利は，最初の5か年は $\frac{j_{(12)}}{12}=0.7\%$，その後は $\frac{j'_{(12)}}{12}=0.74\%$ を適用するものとする。

（解）

まず，300万円に対する月賦金 R_1 は，次のようである。

$$\begin{aligned}R_1&=¥3,000,000(a_{\overline{12\times5}|})^{-1}\quad \text{at } 0.7\%\\&=¥3,000,000\times0.0204\ 6837\\&=\underline{\underline{¥61,405}}\end{aligned}$$

次に，500万円に対する月賦金 R_2 は，公式〔701〕によればよい。

$$\begin{aligned}R_2&=¥5,000,000\times(1+0.007)^{12\times5}(a_{\overline{12\times(20-5)}|})^{-1}\quad \text{at } 0.74\%\\&=¥5,000,000\times1.5197\ 3629\times0.0100\ 7140\ 5\\&=\underline{\underline{¥76,529}}\end{aligned}$$

利率の変更

期限 n 年，月利率 $\frac{j_{(12)}}{12}$ のローンが，第 (T_1+m') 月支払直後に至って月利率を $\frac{j'_{(12)}}{12}$ と変更されれば，新賦金 R' は何程となるか。

（Ｉ） 均等月払方式

$$R=P(a_{\overline{12n}|})^{-1}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

従って，第 (T_1+m') 月支払直後の未済残高

$$R\cdot a_{\overline{12n-(T_1+m')}|}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}$$

であるから，これを $\{12n-(T_1+m')\}$ 月間に新利率で償還すればよい。

$$R'=\left\{R\cdot a_{\overline{12n-(T_1+m')}|}\quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{12}\right\}(a_{\overline{12n-(T_1+m')}|})^{-1}\quad \text{at}\frac{j'_{(12)}}{12}\qquad〔702〕$$

（II） 均等ボーナス払方式

(1) 月利率　旧 $\frac{j_{(12)}}{12}$，新 $\frac{j'_{(12)}}{12}$ を用いる場合

第 T_1 回支払直後の未済残高は，

$$R_b \cdot a_{\overline{2n-T|}} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6-1\right\}$$

であって，この m' か月後の元利合計を（$6-m'$）か月据置，残期間，新利率で償還することになるから，

$$R_b' = \left[R_b \cdot a_{\overline{2n-T|}} \cdot \left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^{m'} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j_{(12)}}{12}\right)^6-1\right\}\right]$$
$$\times (a_{\overline{2n-T|}})^{-1} \cdot v^{\frac{m'}{6}} \quad \text{at}\left\{\left(1+\frac{j'_{(12)}}{12}\right)^6-1\right\} \qquad [703]$$

となる。

(2)　1期の利率　旧 $6\times\dfrac{j_{(12)}}{12}=\dfrac{j_{(12)}}{2}$，新 $\dfrac{j'_{(12)}}{2}$ を用いる場合

(1)と同様に考えて，

$$R_b' = \left\{R_b \cdot a_{\overline{2n-T|}} \cdot \left(1+\frac{m' \cdot j_{(12)}}{12}\right) \quad \text{at}\frac{j_{(12)}}{2}\right\}$$
$$\times (a_{\overline{2n-T|}})^{-1} \cdot \frac{1+(6-m') \cdot \dfrac{j'_{(12)}}{12}}{1+\dfrac{j'_{(12)}}{2}} \quad \text{at}\frac{j'_{(12)}}{12} \qquad [704]$$

〔算例10〕　算例6において第19月支払直後から，月利0.74%と変更になったとき，以後の月払額とボーナス払額を求めよ。

（解）　新均等月払額公式〔702〕による。

$$R' = \{¥43,835 \times a_{\overline{240-19|}} \quad \text{at } 0.72\%\}(a_{\overline{240-19|}})^{-1} \quad \text{at } 0.74\%$$
$$= ¥43,835 \times 110.4381\ 189 \times 0.0092\ 0457$$
$$= \underline{\underline{¥44,560}}$$

新均等ボーナス払額

(1)　公式〔703〕による。

$$R_b' = [¥158,386 \times a_{\overline{2\times20-3|}} \times (1+0.0072)^3 \quad \text{at}\{1+0.0072)^6-1\}$$
$$\times (a_{\overline{2\times20-3|}})^{-1} \times v^{\frac{3}{6}} \quad \text{at}\{(1+0.0074)^6-1\}$$
$$= ¥158,386 \times 18.1111\ 0370 \times 1.0217\ 5589$$
$$\times 0.0561\ 5865 \times 0.9781\ 2455$$
$$= \underline{\underline{¥160,998}}$$

(2)　公式〔704〕による。

$$R_b' = \{¥156,670 \times a_{\overline{37}|} \times (1+3\times 0.0072) \quad \text{at } 4.32\%\}$$

$$\times (a_{\overline{37}|})^{-1} \times \frac{1+3\times 0.0074}{1+6\times 0.0074} \quad \text{at } 4.44\%$$

$$= ¥156,670 \times 18.3073\ 6249 \times 1.0216$$

$$\times 0.0555\ 2867 \times 0.9787\ 4378$$

$$= \underline{\underline{¥159,250}}$$

算例 1

END

f　FIN

20

g　12×

8.64

g　12÷

8,000,000

PV

PMT

<

RCL　PV

1

%

—

50,000

—

PV

i

12

×

算例 2

END

f　FIN

20

g　12×

8.64

g　12÷

1.2

CHS

PMT

PV

<

STO　1

5

g　12×

2

CHS

PMT

PV

<

↗

RCL　1

$x \rightleftarrows y$

—

f　$1/x$

8,000,000

×

f　0

¥62,913

8.87%[17]

〔注〕電卓は以下“HP 38 E”を利用する。

<印，僅かに計算時間を要する。

算例 4

(1+0.0072)		
ENTER	180	RCL 1
12	n	RCL 2
CHS	72	+
g y^X	i	RCL 3
<	PV	×
(1+0.03)	<	f $1/x$
×	STO 2	8,000,000
1	12	×
—	n	f 0
100	PV	
×	<	**¥62,876**
STO 0	STO × 1	
END	f FIN	
f FIN	5	
i	n	
5	RCL 0	
n	i	
1	1	
CHS	CHS	
PMT	PV	
PV	FV	
<	<	
STO 1	STO 3	
↗	↗	

〔注〕（1＋0.0072）は，暗算による結果を入力する。以下これに準ずる。

算例 6

均等ボーナス払方式

(1)

END

f FIN

40

n

(1+0.0072)

ENTER

6

g y^X

<

1

—

100

×

i

3,000,000

CHS

PV

PMT

<

↗

(1+0.0072)

ENTER

(6−4)

CHS

g y^X

<

×

f 0

¥158,386

(2)

END

f FIN

40

n

4.32

i

3,000,000

CHS

PV

PMT

<

(1+4×0.0072)

×

(1+0.0432)

÷

f 0

¥156,670

算例 7—1

均等月払方式	均等ボーナス払方式 (1)		(2)
END	END		END
f FIN	f FIN	37	f FIN
209	(1+0.0072)	n	35
n	ENTER	PV	n
.72	6	<	4.32
i	g y^X	(1+0.0072)	i
1	<	ENTER	1
CHS	1	3	CHS
PMT	—	g y^X	PMT
PV	100	×	PV
<	×	RCL 2	<
STO 1	i	—	STO 3
221	35	158,386	37
n	n	×	n
PV	1	f 0	PV
<	CHS		<
RCL 1	PMT	**¥128,250**	(1+0.0072×3)
—	PV		×
43,835	<		RCL 3
×	STO 2		—
f 0	↗		156,670
			×
¥112,124			f 0
			¥128,895

〔注〕 月払方式に続いて計算する場合は(1)，(2)とも，最初の END，f FIN，最終の f 0 は省略してよい。

算例 7—2

均等月払方式

END

f FIN

20

g 12×

8.64

g 12×

5,000,000

CHS

PV

PMT ……43,835.22

<

0

n

19

f AMORT

<

12

f AMORT ……413,898.10（戻し利息）

<

$x \rightleftarrows y$

f 0

¥112,125

〔注〕 均等月払方式の償還表作成には，本法を利用すると便利である。

1) Cf. P.R. Goebel, N.G. Miller: Handbook of Mortgage Mathematics & Financial Tables '81 p. 13 公式 (1—18)

2) Cf. P.R. Goebel et al.: ibid. p. 11 公式 (1—16)

なお,"Point Tables" として,契約利率を実質利率に一致させるために何 point の手数料その他(借入額に対する歩合で,1% を 1 point という)を徴すべきかの次表を与えている。わが国の実務と利率の刻みが異なるが,参考に示しておく。

$j_{(12)}$ $j'_{(12)}$ %	n 年	k 年	小数桁数
$7\left(\frac{1}{4}\right)20\frac{3}{4}$	15 (5) 35	5, 7, 9, 12, 15 n	5

(注) ( ) 内は刻みを示す。例 7%〜$20\frac{3}{4}$%で$\frac{1}{4}$%刻みの意。

3) $i'<0$ でも差支えない。

4) Cf. E.B. Greynolds et al.: Financial Analysis using Calculators: Time Value of Money '80 p. 419 (9—88) 式

5) 拙稿:住宅ローンの計算——数表化と電卓の利用 前掲 p. 58 3行目の式に相当する。

6) 注5) p. 58 10行目の公式に相当する。

7) 拙稿:「年金と利付債券の利回り算出法」経営数学会誌 第2号 1979年12月参照。

8) 九段コンピューターサービス:新元利均等償還金テーブル 1978年1月 $(a_{\overline{n}|})^{-1}$ 表を次の範囲で与えている。

利率 $j_{(12)}$	期間 月	小数桁数
1.92 (0.06) 9.96 10.00 (種々) 20.00	1 (1) 240 (2) 360	12

参考に,アメリカの金利計算表を示しておく。

J.C. Estes: Handbook of Interest and Annuity Tables '76

表別	利率%	期間 月	小数桁数
$(1+i)^n$, $S_{\overline{n}\rvert}$, $(S_{\overline{n}\rvert})^{-1}$ $(1+i)^{-n}$, $a_{\overline{n}\rvert}$, $(a_{\overline{n}\rvert})^{-1}$	$j_{(12)}/12$ $5\left(\frac{1}{4}\right)22\frac{3}{4}$	1（1） 11 12（12） 600	10
$(1+i)^n$, $S_{\overline{n}\rvert}$, $(S_{\overline{n}\rvert})^{-1}$ $(1+i)^{-n}$, $a_{\overline{n}\rvert}$, $(a_{\overline{n}\rvert})^{-1}$	$j_{(12)}/2$ $5\left(\frac{1}{4}\right)22\frac{3}{4}$	2（2） 120	10

9） 拙著：前掲 p. 85 公式〔8.36〕で本式を用いているが，後述の繰上償還，電卓利用を考えると，公式〔401〕を利用する方が便であるので，今後，公式〔401〕を利用することに改める。

10） 拙稿：住宅ローンの計算　前掲 p. 287 16行目の式に相当する。

11） 注10)に(1)第1表，(2)第2表を掲載している。
なお，(2)については，注8)に詳細な表がある。

12） 注5） p. 63 10行目の式に相当する。

13） 手数料を徴せられることもある。これを penalty clause という。
Cf. R. E. Wheeler, W. D. Peeples : Modern Mathematics with application to Business and Social Science 2nd ed. '75 p. 184

14） 注1)には，この場合の未済残高を示す数表を掲げている。わが国と利率の刻み方が異なるが参考に示しておく。

利率 $j_{(12)}$%	期間 年 契約　　支払済	小数桁数
$7.0\left(\frac{1}{4}\right)25.0$（1）30.0	1（1）10——1（1）9 11（1）15（5）40——1（1）39	5

15） 拙著：前掲には，この場合が論究されていない。ここに拡充しておく。

16） 注15） 同　上。

17） Cf. J. M. Smith : Financial Analysis & Business Decisions on the Pocket Calculator '76 p. 176.

（1982.3.3 稿）