電卓による年金現価，利付債券の利回り

野　沢　孝之助

1

由来，年金現価あるいは利付債券の利回りについては，系統的にでも西暦1800年初頃[1]から諸先学によって進められ現在に及んでいるものである。しかし，多くが金利計算表，対数表を利用するものが中心であり，それが金利計算表の精密化を促進した理由の１つでもあろう。

利回りを精密に算出することは理論的には充分興味のあることである。しかし，利回りの値は実務にも関連を有することであるから，必要精度の値（小数６桁）を速やかに算出することも大切であるといわなければならない。

筆者はこの点を考え既に電卓利用を加味した著書・論文[2]を発表している。今回は逆に電卓利用を中心として実務値を求める方法を見直したとき，どのようになるかの私見を発表せんと本稿を起す次第である。

2

年金現価率 $a_{\overline{n|}}$ の公式は，周知のように，利率 i，期間 n とすると，

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

である。

いま，$a_{\overline{n|}}$ を a と略記し，その逆数を採って，i にについて展開すると，

$$a^{-1}=\frac{1}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i+\frac{n^2-1}{12}\cdot i^2-\frac{n^2-1}{24}\cdot i^3+\cdots\cdots\right\}^{3)}$$

これを変形し，次式を原式とする。

$$\frac{n}{a}-1=\frac{n+1}{2}\cdot i+\frac{n^2-1}{12}\cdot i^2-\frac{n^2-1}{24}\cdot i^3+\cdots\cdots$$

ここで，$\frac{n}{a}-1=p$　とおき，

まず，原式右辺第１項まで採り，i の第１近似値 i_1 を求める。

$$i_1=\frac{2p}{n+1}$$

次に，原式右辺第２項まで採って，i^2 の項の１つに i_1 を入れて，i_2 を求める。

$$p=\frac{n+1}{2}\cdot i_2+\frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{2p}{n+1}\cdot i_2 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad i_2=\frac{6p}{3(n+1)+(n-1)p}$$

ここで，p は n に比較して小さい数であるから，$(n-1)p \fallingdotseq (n+1)p$ とおいて，

$$i_2=\frac{6p}{(n+1)(3+p)}$$

とし，これを(１)式の $\frac{2p}{n+1}$ に代入すると，

$$p=\frac{n+1}{2}\cdot i_2+\frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{6p}{(n+1)(3+p)}\cdot i_2$$

$$\therefore \quad i_2=\frac{2p(3+p)}{3(n+1)+2np} \qquad ただし\quad p=\frac{n}{a}-1 \qquad 〔1〕^{4)}$$

となる。

本式は Karpin の公式であるが，わが国に於いてあまり知られていないようである。本式の値は，このままでは実用に不適であるから，本稿はこれを単独に用いず，後述の〔２〕〜〔４〕の公式に於ける i_1 として利用しようとするものである。従来は金利計算表に掲げられる値を利用していたが，電卓を利用することによって前記のことが簡単に可能となったのである。

なお，公式〔２〕〜〔４〕は必ずしも新しいものではないが，必要の程度を考え

簡便なものを利用したものであって，大切なのは i_1 の値にあることを知らなければならない。

3

(1) 年金現価率に於いて，$i=i_1+\rho$ とおき変形する。

$$a(i_1+\rho)=1-(1+i_1+\rho)^{-n}$$
$$=1-(v_1{}^{-1}+\rho)^{-n} \qquad v_1=(1+i_1)^{-1}$$

本式の右辺を展開し，

$$a(i_1+\rho)=1-\left\{v_1{}^n-nv_1{}^{n+1}\rho+\frac{n(n+1)}{2}\cdot v_1{}^{n+2}\rho^2-\cdots\cdots\right\}$$

右辺の ρ 1次の項まで採ると，

$$a(i_1+\rho)=1-v_1{}^n+nv_1{}^{n+1}\rho$$
$$\rho=\frac{1-v_1{}^n-ai_1}{a-nv_1{}^{n+1}}=\frac{a_1i_1-ai_1}{a-nv_1{}^{n+1}}$$
$$=i_1\cdot\frac{a_1-a}{a-nv_1{}^{n+1}}$$
$$\therefore \quad i_2=i_1+i_1\cdot\frac{a_1-a}{a-nv_1{}^{n+1}} \qquad [\,\mathbf{2}\,]^{5)}$$

となる。

(2) (1)に於ける a の逆数を採る。

$$a^{-1}=\frac{i_1+\rho}{1-(1+i_1+\rho)^{-n}}=\frac{i_1\left(1+\dfrac{\rho}{i_1}\right)}{1-(v_1{}^{-1}+\rho)^{-n}}$$
$$=\left(1+\frac{\rho}{i_1}\right)\left\{\frac{1-v_1{}^n+nv_1{}^{n+1}\rho-\cdots\cdots}{i_1}\right\}^{-1}$$
$$=\left(1+\frac{\rho}{i_1}\right)\left\{a_1\left(1+\frac{nv_1{}^{n+1}\rho}{a_1i_1}-\cdots\cdots\right)\right\}^{-1}$$

ρ^2 を含む項以下を省略して，

$$a^{-1}=a_1{}^{-1}+\frac{\rho}{i_1}(a_1{}^{-1}-nv^{n+1}a_1{}^{-2})$$

$$\rho=i_1\cdot\frac{a^{-1}-a_1^{-1}}{a_1^{-1}-nv_1^{n+1}a_1^{-2}}$$

$$\therefore\quad i_2=i_1+i_1\cdot\frac{a^{-1}-a_1^{-1}}{a_1^{-1}-nv_1^{n+1}a_1^{-2}}$$ 6)

$$=i_1+i_1\cdot\frac{\dfrac{a^{-1}}{a_1^{-1}}-1}{1-nv_1^{n+1}a_1^{-1}} \qquad [3]$$

とする。

4

$f(i_1+\rho)$ の展開式は，

$$f(i_1+\rho)=f(i_1)+\rho f'(i_1)+\frac{\rho^2}{2!}\cdot f''(i_1)+\cdots\cdots=0$$

ただし，$f'(i_1)$，$f''(i_1)$ は，微分を示す。

ρ の１次項まで採って，

$$\rho=-\frac{f(i_1)}{f'(i_1)}$$

$$\therefore\quad i_2=i_1-\frac{f(i_1)}{f'(i_1)} \qquad [4]$$

となる。

本式を反復する方法が Newton 法といわれることは周知のところである。

5

〔算例 1〕 期限20年の年金現価率が 13.7804 であるとき，利率を求めよ。

（解）

公式〔1〕による。

$$p=\frac{20}{13.7804}-1=0.4513\ 3668$$

$$i_2=\frac{2\times0.4513\ 3668\times(3+0.4513\ 3668)}{3\times21+2\times20\times0.4513\ 3668}$$

$=\underline{\underline{0.0384\ 367}}$　小数第7位未満4捨5入

公式〔2〕による。　$i_1=0.0384\ 367$

a_1，v_1^{21} の計算には，普通電卓としてカシオ J-3，関数電卓としてシャープ EL 5000 を利用し（特記なき限り以下同様で，同一機種の使用法は大同小異）末尾に示す。

$$i_2=0.0384\ 367+0.0384\ 367\times\frac{\dfrac{1-(1+0.0384\ 367)^{-20}}{0.0384\ 367}-13.7804}{13.7804-20\times(1+0.0384\ 367)^{-21}}$$

$$=\underline{\underline{0.0384\ 3678\ 8}}$$

公式〔3〕による。

$$a_1^{-1}=\frac{0.0384\ 367}{1-(1+0.0384\ 367)^{-20}}=0.0725\ 6677\ 7$$

$$i_2=0.0384\ 367+0.0384\ 367\times\frac{\dfrac{\dfrac{1}{13.7804}}{0.0725\ 6677\ 7}-1}{1-20\times(1+0.0384\ 367)^{-21}\times0.0725\ 6677\ 7}$$

$$=\underline{\underline{0.0384\ 3678\ 8}}$$

公式〔4〕による。

$$f(i_1)=1-(1+0.0384\ 367)^{-20}-13.7804\times0.0384\ 367$$

$$=0.0000\ 0041\ 77$$

$$f'(i_1)=20\times(1+0.0384\ 367)^{-21}-13.7804$$

$$=-4.7220\ 4369\ 14$$

$$i_2=0.0384\ 367-\frac{0.0000\ 0041\ 77}{-4.7220\ 4369\ 14}$$

$$=\underline{\underline{0.0384\ 3678\ 8}}$$

計算所要時間は，末尾に示した所要時間(約)から簡単に知ることができる。例えば，公式〔3〕による場合（〔1〕を含む）

電卓カシオ J-3―カシオ J-3　　3分間

電卓カシオ J-3―シャープ EL 5000　　2.5分間強

となるであろう。

以上，近似式はn，iの大小によって，その近似度は影響を受けることが予想される。下記に参考に試算を示しておく。

公　式	期　間	真値3.5%に対する近似値	誤差/真値	真値7.0%に対する近似値	誤差/真値
〔1〕	20	0.0349 9846	−0.0044%	0.0700 7849	0.1121%
	40	0.0350 6984	0.1995	0.0706 8216	0.9745
	60	0.0352 1159	0.6045	0.0713 3353	1.9050
〔2〕	20	0.0350 0000	0	0.0700 0005	0.0001
	40	0.0350 0008	0.0002	0.0700 0201	0.0029
	60	0.0350 0054 5	0.0016	0.0700 0355	0.0051
〔3〕	20	0.0350 0000	0	0.0700 0001	0
	40	0.0350 0002	0.0001	0.0700 0080	0.0011
	60	0.0350 0017	0.0005	0.0700 0193	0.0028
〔4〕	20	0.0350 0000	0	0.0700 0005	0.0001
	40	0.0350 0008	0.0002	0.0700 0201	0.0029
	60	0.0350 0054 5	0.0016	0.0700 0355	0.0051

$a_{\overline{n}|}$3 5%，$a_{\overline{n}|}$7% の小数10桁を用い，シャープ EL 5000 を利用して求めた。

〔1〕，〔3〕を併用する方法は，充分に実用に供することができるであろう。

利息関数電卓には，HP，TI の米国系会社のものなどがある。本例を HP 38Eを利用したものを末尾に示す。 0.0384 3678 845

6

額面金額（償還金額）C，債券利率g，償還期限n，評価利率iの債券価格Aは，周知のように，

$$A=C-C(i-g)a_{\overline{n}|}$$

ただし，i，g，nはすべて1期単位

$$\frac{C-A}{C}=(i-g)a_{\overline{n}|}$$

ここで，$\frac{C-A}{C}=k$，$a_{\overline{n}|}$ をaと略記すると，

$$k=(i-g)a$$

$$i=ka^{-1}+g \tag{2}$$

$$=\frac{k}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i+\frac{n^2-1}{12}\cdot i^2-\cdots\cdots\right\}+g$$

｛　｝内の i の１次の項まで採ると，

$$i_1\left(1-\frac{n+1}{2n}\cdot k\right)=g+\frac{k}{n}$$

$$i_1=\frac{g+\dfrac{k}{n}}{1-\dfrac{n+1}{2n}\cdot k} \qquad 〔5〕^{7)}$$

となる。

この i_1 の値を（２）式に代入して，

$$i_2=ka_1{}^{-1}+g \qquad 〔6〕^{8)}$$

7

〔算例 2〕 額面金額（償還金額）¥100　6分8厘利付，償還期限12年の２期払債券の発行価格¥99.50のとき，その利回りを求めよ。

（注）与値が現状と異なるが，比較のため前論文のままとする[9]。

（解）

公式〔5〕による。

$$i=0.068\div2=0.034$$

$$n=2\times12=24$$

$$k=\frac{100-99.50}{100}=0.005$$

$$i_1=\frac{0.034+\dfrac{0.005}{24}}{1-\dfrac{24+1}{2\times24}\times0.005}=0.0342\ 98$$

$$j_{(2)}=2\times0.0342\ 98=\underline{\underline{0.0686\ 0}}$$

（注）年利回り $j_{(2)}$ を用いる慣行に従う[10]。

公式〔6〕による。

$$i_2=0.005\times\frac{0.0342\ 98}{1-(1+0.0342\ 98)^{-24}}+0.034$$
$$=0.0343\ 0907$$
$$j_{(2)}=\underline{\underline{0.0686\ 18}}$$

公式〔4〕は

$$f(i)=(i-g)a-k$$

として利用することができる。 $i_1=0.0342\ 98$

$$i_2=0.0343\ 091$$
$$j_{(2)}=\underline{\underline{0.0686\ 18}}$$

本例に利息関数電卓を利用したものを末尾に示す。 $\underline{\underline{6.86\ 1821\ 822\%}}$

わが国の実務では，次式の単利利回りを用いている現状（理論的には問題がある）であることを付記する。

$$\frac{年利息+\dfrac{償還金額-買入価格}{残存期間}}{買入価格}$$ [11]

〔算例 1〕

〔公式 1〕

カシオ J 3

F
MRC
MRC
20
÷
13.7804
−
1
M+
×
(2×20)
+
3(20+1)
=……81.0534 6724 32
3
+
MRC
×
2
×
MRC
÷
△ 81.0534 6724 32
=
小数第7位未満4捨5入

0.0384 369

（注） 1. (2×20) …暗算
2. △ …再入
3. 所要時間…1分間強

シャープ EL 5000

C
$x\overrightarrow{M}$
20
÷
13.7804
−
1
=
$x\overrightarrow{M}$
+
3
×
RM
×
2
÷
((
(2×20)
×
RM
+
3(20+1)
))
=
小数第7位未満4捨5入

0.0384 367

（注） 所要時間…1分間

〔公式 2〕

カシオ J 3

F	
MRC	=
MRC	=
1	=
÷	=
$(1+i_1)$	=
=	×
=	=
=	=
=	=
=	+/−
=	+
=	1
×	÷
=	i_1
=	−
×	13.7804
20	×
=	i_1
+/−	÷
+	MRC
13.7804	+
M+	i_1
1	=
−	小数第 9 位未満 4 捨 5 入
$(1+i_1)$	

0.0384 3678 8

↗

（注） 所要時間… 2 分間弱

シャープ EL 5000

C	
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$	y^{x}
i_1	21
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$	+⇄−
+	=
1	×
=	20
$y^{\wedge}$	=
20	+⇄−
+⇄−	+
=	13.7804
+⇄−	))
+	×
1	RM
÷	+
RM	RM
−	=
13.7804	小数第 9 位未満 4 捨 5 入
−	
((	**0.0384 3678 8**
1	
+	
RM	（注） 所要時間…1.5分間
=	

↗

〔公式 3〕

カシオ J 3

F		
MRC	=	MRC
MRC	=	÷
1	=	i_1
÷	=	÷
$(1+i_1)$	=	13.7804
=	=	−
=	=	1
=	×	×
=	=	i_1
=	=	÷
×	×	△ 0.03426 6427 934
=	20	+
=	×	i_1
=	i_1	=
+/−	÷	小数第 9 位未満 4 捨 5 入
+	MRC	
1	=	**0.0384 3678 8**
M+…$1-v_1^{20}$	+/−	
1	+	
÷	1	（注） 所要時間… 2 分間弱
$(1+i_1)$	=…0.3426 6427 934	
↗	↗	

シャープ EL 5000

C	
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$	((
$(1+i_1)$	$(1+i_1)$
y^x	y^x
20	21
+−	+−
=	=
+−	×
+	20
1	×
÷	RM
i_1	=
=	+−
F 1/x	+
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$	1
1	))
÷	×
13.7804	i_1
÷	+
RM	i_1
−	=
1	小数第9位未満4捨5入
÷	
	0.0384 3678 8
↗	

（注）　所要時間…1.5分間

〔公式 4〕

カシオ J 3

F
MRC
MRC
1
÷
$(1+i_1)$
=
=
=
=
=
=
=
×
=
=
×
20
−
13.7804
M+
1
÷
$(1+i_1)$
=
=
=
=
=
↗

×
=
=
=
+/−
+
1
*{ ÷
i_1 }
−
13.7804
*{ ×
i_1 }
÷
MRC
=
+/−
+
i_1
=
小数第9位未満4捨5入

0.0384 3678 8

(注)1. * は変形
2. 所要時間…1.5分間

シャープ EL 5000

C
$\overrightarrow{xM}$
i_1
$\overrightarrow{xM}$
+
1
=
y^x
20
+−
=
+−
+
1
−
((
13.7804
×
RM
))
=
÷
((
1
+
RM
=
↗

y^x
21
+−
=
×
20
−
13.7804
))
+−
+
RM
=
小数第9位未満4捨5入

0.0384 3678 8

(注) 所要時間…1.5分間

〔算例 2〕

〔公式 5〕

カシオ J 3

F
MRC
MRC
(24+1)
×
.005
÷
(2×24)
=
+/−
+
1
M+
.005
÷
24
+
.034
÷
MRC
×
2
=
小数第５位未満
４捨５入

0.0686 0

（注） 所要時間
…１分間弱

シャープ EL 5000

.005
÷
24
+
.034
÷
((
(24+1)
×
.005
÷
(2×24)
=
+−
+
1
))
×
2
=
小数第５位未満
４捨５入

0.0686 0

（注） 所要時間
…0.5分間

〔公式 6〕

カシオ J 3

F
MRC
MRC
1
÷
(1+0.0342 98)
=
=
=
×
=
×
=
=
=
+/−
+
1
M+
.005
×
.0342 98
÷
MRC
+
.034
×
2
=
小数第６位未満
４捨５入

0.0686 18

（注） 所要時間
…１分間

シャープ EL 5000

C
$\overrightarrow{xM}$
.0342 98
$\overrightarrow{xM}$
+
1
=
y^x
24
+−
=
+−
+
1
÷
RM
=
F 1/x
×
.005
+
.034
×
2
=
小数第６位未満
４捨５入

0.0686 18

（注） 所要時間
…0.5分間強

利息関数電卓（HP 38 E）

〔算例 1〕

END

f　FIN

20

n

1

CHS

PMT

13.7804

PV

i

<

f　9

3.84 3678 845%

（注）所要時間…0.5分間強

〔算例 2〕

END

f　FIN

24

n

99.5

CHS

PV

(100×0.034)

PMT

100

FV

i

<

2

×

f　9

6.86 1821 822%

（注）所要時間…1分間

1） Cf. Gabriel A. Hawawini et al.: The History of Interest Approximations 1980.
2） 拙稿：利付債券の価格と利回り　本誌第9巻　第2号　1973
　　利付債券の利回り　商業数学会誌　第24号　1973
　拙著：新会計数理　1977
　拙稿：年金と利付債券の利回り算出法　経営数学会誌　第2号　1979
3） 拙著：利回りを中心とした商業数学　1952　p. 153 参照
4） Cf. H. Karpin: Simple Algebraic Formulae for Estimatng the Rate of Interest Journal of the Institute of Actuaries Vol. 93 1967
5） Cf. Francis Baily: The Doctrine of Interest and Annuities 1808（復刻 1980） p. 132
6） Cf. Ralph Todhunter: Text book on Compound Interest and Annuities-certain 4 th ed. 1937 p. 178（初版 1915 p. 108 に既にあった由，注1　参照）
7） Cf. Ralph Todhunter: On an Approximation to the Rate of Interest Yielded by a Bond at a Premium Journal of the Institute of Actuaries Vol. 33 1897 p. 358
8） 注6　p. 188 参照
9） 拙稿：年金と利付債券の利回り算出法　経営数学会誌　第2号　1979
10） $j_{(2)}$ は年2回転化の名目利率で，利息年2回払の場合に，わが国，アメリカでは広く用いられている。しかし，ヨーロッパでは年の実利率 $\left(1+\frac{j_{(2)}}{2}\right)^2-1$ を用いることが多い。
11） 公社債引受協会：公社債利回表　1965　改訂版

（1982. 9. 4 稿）