割賦払債権の評価

野澤　孝之助

1　緒言と一般公式

従前は負債の**元利**割賦償還について，均等払，等比数列払，等差数列払が論究されている。本稿はこれを立場を換えて債権者の側から希望利益率で評価せんとするものであるとともに，**元金**割賦償還の場合についても論究せんとするものである。

なお，**元金**割賦償還については，末尾注[1]に示す諸文献からヒントを得たものであることを付記する。

いま，貸付額P，貸付利率i，貸付期間n，t期末払元利割賦金R_tとする債権の評価利率yにおけるV_0（0時点における評価額—現価）を求める一般公式は，

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}R_t(1+y)^{-t} \qquad 〔1〕$$

である。

2　元利均等払

公式〔1〕において，毎期元利割賦金を均等払とすると，

$$R_t=R$$

$$\therefore \quad V_0=\sum_{t=1}^{n}R(1+y)^{-t}=R\cdot\sum_{t=1}^{n}(1+y)^{-t}=R\cdot\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}=R\cdot a_{\overline{n}|}^{y}$$

$a_{\overline{n}|}^{y}$においてyを明らかにするため，その書入れ場所を通例の記号と異にした。以下同様。

ここで，Rは負債の元利均等払賦金であるから，従前から明らかに，

$$R=P(a_{\overline{n}|}^{i})^{-1}\ ^{2)}$$

であるから，上式は，

$$V_0=P(a_{\overline{n}|}^{i})^{-1}a_{\overline{n}|}^{y}=P\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\cdot\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} \qquad 〔2〕$$

ただし，i，y，nは，同一期間単位とする。以下同様

となる。

なお，明らかに，

$$i<y \quad \text{なれば} \quad V_0<P$$

$$i=y \quad \text{なれば} \quad V_0=P$$

$$i>y \quad \text{なれば} \quad V_0>P$$

となる。以下同様。

〔例1〕 ¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年の元利均等期末払割賦償還の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。

〔解〕 公式〔2〕による。

$$V_0=¥10,000,000\times\frac{0.085}{1-(1+0.085)^{-10}}\times\frac{1-(1+0.1)^{-10}}{0.1}$$

$$=¥10,000,000\times0.1524\ 0770\ 5\times6.1445\ 6711=\underline{\underline{¥9,364,794}}$$

いま，特別の場合として，

$$R_1=R_2=\cdots\cdots=R_{n-1}=Pi \qquad R_n=P(1+i)$$

を考えると，

$$V_0=Pi\cdot a_{\overline{n-1}|}^{y}+P(1+i)(1+y)^{-n}=Pi\cdot a_{\overline{n}|}^{y}+P(1+y)^{-n}$$

$$=Pi\cdot a_{\overline{n}|}^{y}+P(1-y\cdot a_{\overline{n}|}^{y})=P\{(i-y)a_{\overline{n}|}^{y}+1\} \qquad 〔3〕$$

本式は毎期利息のみ支払い，最終期末に元金を一時に支払うものである。

ここで，$P\rightarrow C$, $i\rightarrow g$, $y\rightarrow i$, $V_0\rightarrow A$ と記号を置換えると，通例利用する債券価格公式となる。

$$A=C\{(g-i)a_{\overline{n}|}^{i}+1\}=C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|}^{i}\}$$ [3)]

3 元利等比数列払

公式〔1〕において，毎期元利割賦金を等比数列払（公比を $1+z$ zは増減率）とすると，

$$R_t=R_1(1+z)^{t-1} \qquad \text{ただし，} z>-1$$

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}R_1(1+z)^{t-1}(1+y)^{-t}=\frac{R_1}{1+y}\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{1-(1+z)(1+y)^{-1}} \qquad (z\neq y)$$

$$=R_1\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z}$$

ここで，R_1は，

$$P=\sum_{t=1}^{n}R_1(1+z)^{t-1}(1+i)^{-t}=R_1\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}{i-z} \qquad (z\neq i)$$

$$\therefore \quad R_1=P\cdot\frac{i-z}{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}$$ [4)]

これを上式に入れると，

$$V_0=P\cdot\frac{i-z}{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z} \qquad 〔4〕$$

となる。

ここで,

$$\frac{1+i}{1+z}=1+i'$$

$$\therefore \quad i'=\frac{i-z}{1+z}$$

とおくと,

$$\frac{i-z}{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}=(1+z)\cdot\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}$$

同様に,

$$\frac{1+y}{1+z}=1+y'$$

$$\therefore \quad y'=\frac{y-z}{1+z}$$

とおくと,

$$\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z}=\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1-(1+y')^{-n}}{y'}$$

となるから,

$$V_0=P\cdot\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}\cdot\frac{1-(1+y')^{-n}}{y'} \qquad 〔4〕'$$

と電卓利用に便な形となる。$i<z$, $y<z$ の場合も支障はない。

特に, $z=0$ のとき,

$$V_0=P\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\cdot\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}$$

と, 公式〔2〕と一致する。

〔例2〕 ¥10,000,000を年利 $8\frac{1}{2}$%, 10か年, 元利期末払割賦金は, 毎期前期の5%増の契約で貸付けた。これを年10%で評価すれば現価はいくらとなるか。

〔解〕 公式〔4〕による。

$$V_0=¥10,000,000\times\frac{0.085-0.05}{1-(1+0.05)^{10}(1+0.085)^{-10}}\times\frac{1-(1+0.05)^{10}(1+0.1)^{-10}}{0.1-0.05}$$

$$=¥10,000,000\times0.1251\ 9510\times7.4398\ 1215=\underline{\underline{¥9,314,280}}$$

公式〔4〕'による。

$$i'=\frac{1+0.085}{1+0.05}-1=3.3333\ 3333\%$$

$$y'=\frac{1+0.1}{1+0.05}-1=4.7619\ 0476\%$$

$$V_0=¥10,000,000\times0.1192\ 3343\times7.8118\ 0276=\underline{\underline{¥9,314,280}}$$

4　元利等差数列払

公式〔1〕において，毎期元利割賦金を等差数列払（公差Q　　Qは増減額）とすると，

$$R_t=R_1+Q(t-1)$$

ただし，$R_t=R_1+Q(t-1)>0$

$$\therefore\quad Q>-\frac{R_1}{t-1}\qquad(t\neq1)$$

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}\{R_1+Q(t-1)\}(1+y)^{-t}=(R_1-Q)\sum_{t=1}^{n}(1+y)^{-t}+Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}$$

ここで，

$$Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}-(1+y)^{-1}Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}=Q\{a_{\overline{n}|}^{y}-n(1+y)^{-(n+1)}\}$$

$$\therefore\quad Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}=Q\left\{\frac{1+y}{y}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}-\frac{n}{y}(1+y)^{-n}\right\}$$

$$=Q\left\{\frac{1+y}{y}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}-\frac{n}{y}(1-y\cdot a_{\overline{n}|}^{y})\right\}=Q\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y}-\frac{n}{y}\right\}$$

これを原式に代入して，

$$V_0=(R_1-Q)a_{\overline{n}|}^{y}+Q\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y}-\frac{n}{y}\right\}=\left\{R_1+Q\left(\frac{1}{y}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|}^{y}-Q\cdot\frac{n}{y}$$ [5)]

ところが，R_1は，

$$P=\sum_{t=1}^{n}\{R_1+Q(t-1)\}(1+i)^{-t}=\left\{R_1+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|}^{i}-Q\cdot\frac{n}{i}$$

$$\therefore\quad R_1=\left(P+Q\cdot\frac{n}{i}\right)(a_{\overline{n}|}^{i})^{-1}-Q\left(\frac{1}{i}+n\right)$$ [6)]

$$\therefore\quad V_0=\left\{\left(P+Q\cdot\frac{n}{i}\right)(a_{\overline{n}|}^{i})^{-1}-Q\left(\frac{1}{i}+n\right)+Q\left(\frac{1}{y}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|}^{y}-Q\cdot\frac{n}{y}$$

$$=\left\{\left(P+Q\cdot\frac{n}{i}\right)(a_{\overline{n}|}^{i})^{-1}-Q\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{y}\right)\right\}a_{\overline{n}|}^{y}-Q\cdot\frac{n}{y}\qquad〔5〕$$

特に，$Q=0$ のとき，公式〔2〕と一致する。

また，

(1)　$Q=R_1$　　のとき

$$R_t=R_1+R_1(t-1)=R_1t$$

$$P=\sum_{t=1}^{n}R_1t(1+i)^{-t}=R_1\left\{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{i}-\frac{n}{i}\right\}$$

$$\therefore\quad R_1=P\left\{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{i}-\frac{n}{i}\right\}^{-1}$$

$$\therefore\quad V_0=R_1\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}=P\cdot\frac{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y}-\frac{n}{y}}{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{i}-\frac{n}{i}}\qquad〔5〕'$$

(2)　$R_t=R(n-t+1)$　　のとき

$$P=\sum_{t=1}^{n}R(n-t+1)(1+i)^{-t}=R(n+1)a_{\overline{n}|}^{i}-R\left\{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{i}-\frac{n}{i}\right\}$$

$$=\frac{R}{i}(n-a_{\overline{n}|}^{i})$$

$$\therefore\quad R=\frac{Pi}{n-a_{\overline{n}|}^{i}}$$

$$\therefore\quad V_0=\sum_{t=1}^{n}R(n-t+1)(1+y)^{-t}=\frac{R}{y}(n-a_{\overline{n}|}^{y})=P\cdot\frac{i}{y}\cdot\frac{n-a_{\overline{n}|}^{y}}{n-a_{\overline{n}|}^{i}}\qquad〔5〕''$$

〔例3〕　貸付額¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年，元利期末払割賦金は毎期¥60,000あて減額する契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。

〔解〕　公式〔5〕による。

$$V_0=\left\{\left(¥10,000,000-¥60,000\times\frac{10}{0.085}\right)(a_{\overline{10}|}^{8.5\%})^{-1}+¥60,000\times\left(\frac{1}{0.085}-\frac{1}{0.1}\right)\right\}a_{\overline{10}|}^{10\%}+¥60,000\times\frac{10}{0.1}$$

$$=\{¥2.941,176.5\times0.1524\ 0770\ 5+¥105,882.4\}\times6.1445\ 6711+¥6,000,000$$

$$=\underline{\underline{¥9,404,953}}$$

〔例4〕　貸付額¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年，元利期末払割賦金は，第1期Rnで毎期Rあて減額する契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また，割賦償還表も示せ。

〔解〕　公式〔5〕″による。

$$R=\frac{Pi}{n-a_{\overline{n}|}^{i}}=\frac{¥10,000,000\times0.085}{10-a_{\overline{10}|}^{8.5\%}}=\frac{¥850,000}{10-6.5613\ 4806}=¥247,189.9$$

$R_1=¥247,189.9\times10=¥2,471,899$

$R_2=¥2,471,899-¥247,190=¥2,224,709$

⋮

$$V_0=¥10,000,000\times\frac{0.085}{0.1}\times\frac{10-a_{\overline{10}|}^{10\%}}{10-a_{\overline{10}|}^{8.5\%}}$$

$$=¥10,000,000\times0.85\times\frac{10-6.1445\ 6711}{10-6.5613\ 4806}=\underline{\underline{¥9,530,240}}$$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	1,621,899	2,471,899
2	8,378,101	712,139	1,512,570	2,224,709
3	6,865,531	583,570	1,393,949	1,977,519

4	5,471,582	465,084	1,265,245	1,730,329
5	4,206,337	357,539	1,125,600	1,483,139
6	3,080,737	261,863	974,086	1,235,949
7	2,106,651	179,065	809,694	988,759
8	1,296,957	110,241	631,328	741,569
9	665,629	56,578	437,801	494,379
10	227,828	* 19,361	227,828	247,189
計	—	3,595,440	10,000,000	13,595,440

* ¥4調整

（4） $R_1, R_3, \cdots\cdots$は，上式で算出する。

（2） （1）$\times i$

（3） （4）−（2）

（1） 前期首未済元金（1）−前期元金償還高（3）

最後は，利息高で調整する方法を採る。

参考に，等比数列と等差数列を組合せたものについて述べておく。

$$R_t = R_{t-1}(1+z)+Q \qquad \text{ただし，} t=1 \text{ のときは，} R_1$$

$$= R_1(1+z)^{t-1} + Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}$$

$$P = \sum_{t=1}^{n}\left\{R_1(1+z)^{t-1}+Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}\right\}(1+i)^{-t}$$

$$= \left(R_1+\frac{Q}{z}\right)\frac{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}{i-z} - \frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{i}$$

$$\therefore\quad R_1 = \left(P+\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{i}\right)\frac{i-z}{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}} - \frac{Q}{z} = \left(P+\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{i}\right)(1+z)(a_{\overline{n}|}^{i'})^{-1} - \frac{Q}{z}$$

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n}\left\{R_1(1+z)^{t-1}+Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}\right\}(1+y)^{-t}$$

$$= \left(R_1+\frac{Q}{z}\right)\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z} - \frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}$$

$$= \left(P+\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{i}\right)(1+z)(a_{\overline{n}|}^{i'})^{-1}\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z} - \frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}$$

$$= \left(P+\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{i}\right)(a_{\overline{n}|}^{i'})^{-1}a_{\overline{n}|}^{y'} - \frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y} \qquad [6]$$

〔例5〕 貸付額¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年，元利期末払割賦金は，第1期R_1第2期以降は第t期 $\{R_{t-1}(1-0.05)+¥70,000\}$ 払の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また，割賦償還表も示せ。

〔解〕 公式〔6〕による。

$$V_0 = \left(¥10,000,000-\frac{¥70,000}{0.05}\cdot a_{\overline{10}|}^{8.5\%}\right)a_{\overline{10}|}^{i'})^{-1}a_{\overline{10}|}^{y'} + \frac{¥70,000}{0.05}\cdot a_{\overline{10}|}^{10\%}$$

ただし，$i'=\dfrac{0.085+0.05}{1-0.05}=14.2105\ 2632\%$

$y'=\dfrac{0.1+0.05}{1-0.05}=15.7894\ 7368\%$

$V_0=$(¥10,000,000−¥1,400,000×6.5613 4806)×0.1932 9122

×4.8713 5294+¥1,4000,000×6.1445 6711=¥9,368,954

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	699,493	1,549,493
2	9,300,507	790,543	751,475	1,542,018
3	8,549,032	726,668	808,249	1,534,917
4	7,740,783	657,967	870,204	1,528,171
5	6,870,579	583,999	937,763	1,521,762
6	5,932,816	504,289	1,011,385	1,515,674
7	4,921,431	418,322	1,091,568	1.509,890
8	3,829,863	325,538	1,178,858	1,504,396
9	2,651,005	225,335	1,273,841	1,499,176
10	1,377,164	* 117,053	1,377,164	1,494,217
計	—	5,199,714	10,000,000	15,199,714

* ¥6 調整

(4) $\left(¥10,000,000-\dfrac{¥70,000}{0.05}\cdot a_{\overline{10}|}^{8.5\%}\right)(1-0.05)(a_{\overline{10}|}^{i'})^{-1}+\dfrac{¥70,000}{0.05}$

=(¥10,000,000−¥1,400,000×6.5613 4806)×0.95

×0.1932 9122+¥1,400,000=¥1,549,493

第2期以降は，〔前期×0.95+¥70,000〕と順次算出する。

5 元金均等払

以下，毎期末支払われる利息分と，元金償還分とに分けて考察する。

利息を各期 I_t，その現価総額 U

元金を各期 K_t，その現価総額 W

とすると，公式〔1〕から，

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}(I_t+K_t)(1+y)^{-t}$$

$$U=\sum_{t=1}^{n}I_t(1+y)^{-t}$$

$$W=\sum_{t=1}^{n}K_t(1+y)^{-t}$$

ここで，毎期末未済元金を $D_0, D_1, D_2, \cdots\cdots, D_n$ とすると，

$D_0-K_1=D_1$ $\qquad$ $I_1=Pi=D_0 i$

$$D_1 - K_2 = D_2 \qquad I_2 = D_1 i$$
$$\vdots$$
$$D_{n-1} - K_n = D_n = 0 \qquad I_n = D_{n-1} i$$

となり，更に，

$$u = \frac{U}{Pi} \qquad w = \frac{W}{P}$$

とおくと，

$$u = \frac{1}{Pi} \cdot \sum_{t=1}^{n} I_t (1+y)^{-t} = \frac{1}{P} \cdot \sum_{t=1}^{n} D_{t-1} (1+y)^{-t}$$

$$u(1+y) = \frac{1}{P} \{D_0 + D_1(1+y)^{-1} + D_2(1+y)^{-2} + \cdots\cdots + D_{n-1}(1+y)^{-(n-1)}\}$$

$$w = \frac{1}{P} \{K_1(1+y)^{-1} + K_2(1+y)^{-2} + \cdots\cdots + K_n(1+y)^{-n}\} \tag{a}$$

$$u(1+y) + w = \frac{1}{P} \{D_0 + (D_1 + K_1)(1+y)^{-1} + (D_2 + K_2)(1+y)^{-2}$$
$$+ \cdots\cdots + K_n(1+y)^{-n}\}$$
$$= \frac{1}{P} \{D_0 + D_0(1+y)^{-1} + D_1(1+y)^{-2} + \cdots\cdots + D_{n-1}(1+y)^{-n}$$
$$= \frac{1}{P} \{P + Pu\} = 1 + u$$

$$\therefore \quad u = \frac{1-w}{y}$$

$$V_0 = U + W = Piu + Pw = Pi \cdot \frac{1-w}{y} + Pw = P\left\{\frac{i}{y} + \left(1 - \frac{i}{y}\right) w\right\} \tag{7}$$

これが元金割賦法の一般公式である。

さて，

$$K_t = K = \frac{P}{n} \qquad \text{元金均等払}$$

の場合は，(a)式から，

$$w = \frac{1}{P} \cdot \frac{P}{n} \cdot a_{\overline{n}|}^{y} = \frac{a_{\overline{n}|}^{y}}{n}$$

この値を公式〔7〕に代入すると，次のようになる。

$$V_0 = P\left\{\frac{i}{y} + \left(1 - \frac{i}{y}\right) \frac{a_{\overline{n}|}^{y}}{n}\right\} \tag{8}$$

また，この元金均等払は，

利息分　$I_1 = Pi$

$$I_2=\left(P-\frac{P}{n}\right)i=Pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$I_3=\left(P-\frac{2P}{n}\right)i=Pi\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

元金分は毎期 $\frac{P}{n}$ であるから，毎期の賦金

第1期　$Pi+\frac{P}{n}=P\left(i+\frac{1}{n}\right)$

第2期　$Pi\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{P}{n}=P\left(i+\frac{1}{n}\right)-\frac{Pi}{n}$

第3期　$Pi\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{P}{n}=P\left(i+\frac{1}{n}\right)-\frac{2Pi}{n}$

$$\vdots$$

で公差 $-\frac{Pi}{n}$ の元利等差数列払をなす，公式〔5〕の特別の場合に当たる[7]。

〔例6〕 貸付額¥10,000,000を年利 $8\frac{1}{2}$%，10か年，元金均等期末払の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また，割賦償還表も示せ。

〔解〕 公式〔8〕による。

$$V_0=¥10,000,000\times\left\{\frac{0.085}{0.1}+\left(1-\frac{0.085}{0.1}\right)\times\frac{a_{\overline{10}|}^{10\%}}{10}\right\}$$

$$=¥10,000,000\times\left\{0.85+0.15\times\frac{6.1445\ 6711}{10}\right\}=\underline{\underline{¥9,421,685}}$$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	1,000,000	1,850,000
2	9,000,000	765,000	1,000,000	1,765,000
3	8,000,000	680,000	1,000,000	1,680,000
4	7,000,000	595,000	1,000,000	1,595,000
5	6,000,000	510,000	1,000,000	1,510,000
6	5,000,000	425,000	1,000,000	1,425,000
7	4,000,000	340,000	1,000,000	1,340,000
8	3,000,000	255,000	1,000,000	1,255,000
9	2,000,000	170,000	1,000,000	1,170,000
10	1,000,000	85,000	1,000,000	1,085,000
計	—	4,675,000	10,000,000	14,675,000

(3) 第1期～第10期を書入れる。

(4) (2)+(3)

6 元金等比数列払

元金等比数列払を考えると，各期末元金償還分は，次のようである。

$$K_t=K_1(1+z)^{t-1}$$

$$P=\sum_{t=1}^{n}K_1(1+z)^{t-1}=K_1\cdot\frac{(1+z)^n-1}{z}=K_1\cdot S_{\overline{n|}}^{z}$$

$$\therefore\quad K_1=P(S_{\overline{n|}}^{z})^{-1} \qquad \text{(b)}$$

次に，(a)式から，

$$w=\frac{1}{P}\cdot\sum_{t=1}^{n}K_1(1+z)^{t-1}(1+y)^{-t}$$

これに(b)式を代入すると，

$$w=(S_{\overline{n|}}^{z})^{-1}(1+y)^{-1}\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{1-(1+z)(1+y)^{-1}}=(S_{\overline{n|}}^{z})^{-1}\frac{1-(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z}$$

この値を公式〔7〕に，代入すると，

$$V_0=P\left\{\frac{i}{y}+\left(1-\frac{i}{y}\right)(S_{\overline{n|}}^{z})^{-1}\frac{1+(1+z)^n(1+y)^{-n}}{y-z}\right\} \qquad 〔9〕$$

となる。

また，

$$V_0=P\left\{\frac{i}{y}+\left(1-\frac{i}{y}\right)(S_{\overline{n|}}^{z})^{-1}\frac{1}{1+z}\cdot a_{\overline{n|}}^{y'}\right\} \qquad 〔9〕'$$

特に，$z=0$ のときは，明らかに公式〔8〕となる。

〔例7〕 貸付額¥10,000,000を年利 $8\frac{1}{2}$%，10か年，元金を毎期末前期の5%増払の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また，割賦償還表も示せ。

〔解〕 公式〔9〕'による。

$$y'=\frac{1+0.1}{1+0.05}-1=4.7619\ 0476\%$$

$$V_0=¥10,000,000\times\left\{\frac{0.085}{0.1}+\left(1-\frac{0.085}{0.1}\right)\times(S_{\overline{10|}}^{5\%})^{-1}\times\frac{1}{1+0.05}\cdot a_{\overline{10|}}^{y'}\right\}$$

$$=¥10,000,000\times\{0.85+0.15\times0.0795\ 0457\ 5\times0.9523\ 8095\times7.8118\ 0276\}$$

$$=\underline{\underline{¥9,387,249}}$$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	795,046	1,645,046
2	9,204,954	782,421	834,798	1,617,219
3	8,370,156	711,463	876,538	1,588,001
4	7,493,618	636,958	920,365	1,557,323
5	6,573,253	558,727	966,383	1,525,110

6	5,606,870	476,584	1,014,702	1,491,286
7	4,592,168	390,334	1,065,437	1,455,771
8	3,526,731	299,772	1,118,709	1,418,481
9	2,408,022	204,682	1,174,644	1,379,326
10	1,233,378	104,837	*1,233,378	1,338,215
計	—	5,015,778	10,000,000	15,015,778

* ¥2調整

（3） 第1期は，（b）式から

$K_1=¥10,000,000(S^{5\%}_{\overline{10}|})^{-1}=¥10,000.000\times 0.0795\ 0457\ 5=¥795,046$

第2期以降は，これに（1+0.05）を逐乗する。

以下は，最後の元金償還高で調整する方法を採る。

7 元金等差数列払

元金等差数列払を考えると，各期末元金償還分は，次のようである。

$$K_t=K_1+Q(t-1)$$

$$P=\sum_{t=1}^{n}\{K_1+Q(t-1)\}=n(K_1-Q)+Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t=n\left(K_1+Q\cdot\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad K_1=\frac{P}{n}-Q\cdot\frac{n-1}{2} \qquad \text{(c)}$$

（a）式から，

$$w=\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}(K_1-Q)(1+y)^{-t}+Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+y)^{-t}\right]$$

$$=\frac{1}{P}\left[(K_1-Q)a^{y}_{\overline{n}|}+Q\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a^{y}_{\overline{n}|}-\frac{n}{y}\right\}\right]$$

（c）式の値を代入すると，

$$w=\frac{1}{P}\left[\left\{\frac{P}{n}+Q\left(\frac{1}{y}+\frac{n+1}{2}\right)\right\}a^{y}_{\overline{n}|}-Q\cdot\frac{n}{y}\right]$$

この値を公式〔7〕に代入する。

$$V_0=\frac{Pi}{y}+\left[\left\{\frac{P}{n}+Q\left(\frac{1}{y}+\frac{n+1}{2}\right)\right\}a^{y}_{\overline{n}|}-Q\cdot\frac{n}{y}\right]\left(1-\frac{i}{y}\right) \qquad 〔10〕$$

となる。

また，

(1) $Q=K_1$ のとき

$$K_t=K_1+K_1(t-1)=K_1t$$

$$P=K_1\cdot\sum_{t=1}^{n}t=K_1\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad K_1 = P \cdot \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{(d)}$$

(a)式から,

$$w = \frac{K_1}{P} \cdot \sum_{t=1}^{n} t(1+y)^{-t} = \frac{K_1}{P}\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y} - \frac{n}{y}\right\}$$

ここで, (d)式を代入すると,

$$w = \frac{2}{n(n+1)}\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y} - \frac{n}{y}\right\}$$

この値を公式〔 7 〕に代入する。

$$V_0 = P\left[\frac{i}{y} + \left(1-\frac{i}{y}\right)\frac{2}{n(n+1)}\left\{\left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y} - \frac{n}{y}\right\}\right] \qquad \text{〔10〕}'$$

(2) $K_t = K(n-t+1)$ のとき

$$P = \sum_{t=1}^{n} K(n-t+1) = \sum_{t=1}^{n} K(n+1) - K \cdot \sum_{t=1}^{n} t = K \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$K = P \cdot \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{(e)}$$

(a)式から

$$w = \frac{K}{P} \cdot \sum_{t=1}^{n}(n-t+1)(1+y)^{-t} = \frac{K}{P}\{(n+1)\sum_{t=1}^{n}(1+y)^{-t} - \sum_{t=1}^{n} t(1+y)^{-t}\}$$

$$= \frac{K}{P}\left\{(n+1)a_{\overline{n}|}^{y} - \left(\frac{1}{y}+1+n\right)a_{\overline{n}|}^{y} + \frac{n}{y}\right\} = \frac{K}{Py}(n - a_{\overline{n}|}^{y})$$

(e)式の値を代入すると,

$$w = \frac{2}{n(n+1)y}(n - a_{\overline{n}|}^{y})$$

この値を公式〔 7 〕に代入する。

$$V_0 = P\left\{\frac{i}{y} + \left(1-\frac{i}{y}\right)\frac{2}{n(n+1)y}(n - a_{\overline{n}|}^{y})\right\} \qquad \text{〔10〕}''$$

特に, $Q=0$ のときは, 明らかに公式〔 8 〕と一致する。

〔例 8 〕 貸付額¥10,000,000を年利 $8\frac{1}{2}$%, 10か年, 元金は毎期末¥60,000あて減額払の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また, 割賦金表も示せ。

〔解〕 公式〔10〕による。

$$V_0 = \frac{¥10,000,000 \times 0.085}{0.1} + \left[\left\{\frac{¥10,000,000}{10} - ¥60,000 \times \left(\frac{1}{0.1} + \frac{11}{2}\right)\right\}\right.$$

$$\left. \times a_{\overline{10}|}^{10\%} + \frac{¥60,000 \times 10}{0.1}\right] \times \left(1 - \frac{0.085}{0.1}\right)$$

$$= ¥8,500,000 + [\{¥1,000,000 - ¥60,000 \times 15.5\}$$

$\times 6.1445\ 6711 + ¥6,000,000] \times 0.15 = \underline{\underline{¥9,464,518}}$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	1,270,000	2,120,000
2	8,730,000	742,050	1,210,000	1,952,050
3	7,520,000	639,200	1,150,000	1,789,200
4	6,370,000	541,450	1,090,000	1,631,450
5	5,280,000	448,800	1,030,000	1,478,800
6	4,250,000	361,250	970,000	1,331,250
7	3,280,000	278,800	910,000	1,188,800
8	2,370,000	201,450	850,000	1,051,450
9	1,520,000	129,200	790,000	919,200
10	730,000	62,050	730,000	792,050
計	—	4,254,250	10,000,000	14,254,250

(3) (c)式から

$$K_1 = \frac{¥10,000,000}{10} + ¥60,000 \times \frac{9}{2} = ¥1,270,000$$

K_2 以降は，順次¥60,000を減額する。

〔例9〕 貸付額¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年，元金を第1期末Kn毎期Kあて減額払の契約で貸付けた。これを年利10%で評価すれば現価はいくらとなるか。また，割賦償還表を示せ。

〔解〕 公式〔10〕″による。

$$V_0 = ¥10,000,000 \times \left\{\frac{0.085}{0.1} + \left(1 - \frac{0.085}{0.1}\right) \times \frac{2}{10 \times 11 \times 0.1} \times (10 - a_{\overline{10}|}^{10\%})\right\}$$

$$= ¥10,000,000 \times \left\{0.85 + 0.15 \times \frac{1}{5.5} \times (10 - 6.1445\ 6711)\right\} = \underline{\underline{¥9,551,482}}$$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	1,818,182	2,668,182
2	8,181,818	695,455	1,636,364	2,331,819
3	6,545,454	556,364	1,454,546	2,010,910
4	5,090,908	432,727	1,272,728	1,705,455
5	3,818,180	324,545	1,090,910	1,415,455
6	2,727,270	231,818	909,092	1,140,910
7	1,818,178	154,545	727,274	881,819
8	1,090,904	92,727	545,456	638,183
9	545,448	46,363	363,638	410,001
10	181,810	15,454	* 181,810	197,264
計	—	3,399,998	10,000,000	13,399,998

* ¥10調整

（3） 第1期 $K=P\cdot\dfrac{2}{n(n+1)}=¥181,818.18$

$K_1=¥181,818.18\times10=¥1,818,182$

第2期以降は，¥181,818あて漸減する。

参考に，等比数列と等差数列を組合せたものについて述べておく。

$$K_t=K_{t-1}(1+z)+Q \qquad \text{ただし，} t=1 \text{ のときは } K_1$$

$$=K_1(1+z)^{t-1}+Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}$$

$$P=\sum_{t=1}^{n}\left\{K_1(1+z)^{t-1}+Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}\right\}=K_1\cdot S_{\overline{n}|}^{z}+\frac{\theta}{z}(S_{\overline{n}|}^{z}-n)$$

$$\therefore\quad K_1=\left\{P-\frac{\theta}{z}(S_{\overline{n}|}^{z}-n)\right\}(S_{\overline{n}|}^{z})^{-1} \qquad \text{(f)}$$

（a）式から

$$w=\frac{1}{P}\cdot\sum_{t=1}^{n}\left\{K_1(1+z)^{t-1}+Q\cdot\frac{(1+z)^{t-1}-1}{z}\right\}(1+y)^{-t}$$

$$=\frac{1}{P}\left\{\left(K_1+\frac{Q}{z}\right)\frac{1}{1+z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y'}-\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}\right\}$$

（f）の値を代入すると，

$$w=\frac{1}{P}\left(\left[\left\{P-\frac{Q}{z}(S_{\overline{n}|}^{z}-n)\right\}(S_{\overline{n}|}^{z})^{-1}+\frac{Q}{z}\right]\frac{1}{1+z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y'}-\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}\right)$$

$$=\frac{1}{P}\left\{\left(P+\frac{Qn}{z}\right)(S_{\overline{n}|}^{z})^{-1}\frac{1}{1+z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y'}-\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}\right\}$$

この値を公式〔7〕に代入する。

$$V_0=\frac{Pi}{y}+\left\{\left(P+\frac{Qn}{z}\right)(S_{\overline{n}|}^{z})^{-1}\frac{1}{1+z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y'}-\frac{Q}{z}\cdot a_{\overline{n}|}^{y}\right\}\left(1-\frac{i}{y}\right) \qquad [11]$$

〔例10〕 貸付額¥10,000,000を年利$8\frac{1}{2}$%，10か年，元金を第1期K_1，第2期以降は第t期に $\{K_{t-1}(1-0.05)+¥70,000\}$ 払の契約で貸付けた。これを年利10％で評価すれば，現価はいくらとなるか。また，割賦償還表も示せ。

〔解〕 公式〔11〕による。

$$V_0=\frac{¥10,000,000\times0.085}{0.1}+\left\{\left(¥10,000,000-\frac{¥70,000\times10}{0.05}\right)(S_{\overline{10}|}^{-5\%})^{-1}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{1-0.05}\cdot a_{\overline{10}|}^{y'}+\frac{¥70,000}{0.05}\cdot a_{\overline{10}|}^{10\%}\right\}\left(1-\frac{0.085}{0.1}\right)$$

$=¥8,500,000+\{-¥4,000,000\times0.1246\ 0654\times1.0526\ 3158$

$\times4.8713\ 5294+¥1,400,000\times6.1445\ 6711\}\times0.15=\underline{\underline{¥9,406,989}}$

$$(S_{\overline{10|}}^{-5\%})^{-1}=\frac{-0.05}{(1-0.05)^{10}-1}$$

期	(1) 期首未済元金	(2) 利息高	(3) 元金償還高	(4) 賦金
1	10,000,000	850,000	901,574	1,751,574
2	9,098,426	773,366	926,495	1,699,861
3	8,171,931	694,614	950,170	1,644,784
4	7,221,761	613,850	972,662	1,586,512
5	6,249,099	531,173	994,029	1,525,202
6	5,255,070	446,681	1,014,328	1,461,009
7	4,240,742	360,463	1,033,612	1,394,075
8	3,207,130	272,606	1,051,931	1,324,537
9	2,155,199	183,192	1,069,334	1,252,526
10	1,085,865	92,299	*1,085,865	1,178,164
計	—	4,818,244	10,000,000	14,818,244

* ￥2調整

(3) $K_1=\left\{¥10,000,000+\frac{¥70,000}{0.05}(S_{\overline{10|}}^{-5\%}-10)\right\}(S_{\overline{10|}}^{-5\%})^{-1}$

$=\{¥10,000,000+¥1,400,000\times(8.0252\ 6121\ 5-10)\}\times 0.1246\ 0654$

$=\underline{\underline{¥901,574}}$

K_2 以降は，{前期×(1−0.05)+￥70,000} と順次算出する。

---

1) Fernand Samson : Mathématiques Financières 6e édition 1960.
W. Masiéri : Notions Essntielles de Mathématiques Financières 3e édition 1974.
Pierre Bonneau : Les Mathématiques Financières 1976.
Maurice Saada : Pour s'initier aux Mathématiques Financières fascicule 2 1979.

2) 拙著：新会計数理 p. 25 公式〔4.21〕に当たる。

3) 拙著：前掲書 p. 54 公式〔7.36〕に当たる。

4) 拙著：前掲書 p. 33 公式〔4.53〕に当たる。

5) 拙著：前掲書 p. 21 第1行の公式に当たる。

6) 拙著：前掲書 p. 32 第1行の公式に当たる。

7) 拙著：前掲書 p. 32 第17行以下参照，

本誌第19巻第1号拙稿に対する訂正　第11ページ15行

この値は利用電卓ではこのようになるが，末位が1大きいものが正しい。

全体に10桁の電卓で第9位まで算出したものがあるが，これは利息関数電卓は，i 単位で求めるので，本例では12桁まで算出されるので，この答数を参考としたことを付記しておく。

(1984.3.30 稿)