複利法における評価時点について

野　澤　孝之助

ま　え　が　き

複利法を利用する場合において評価時点が決まれば，直接に計算するも亦間接計算を行うも結果は同一となる。このことは自明の理のようにして適宜に利用されている。

本稿は，これを各場合について確認し，評価時点移動自由の原則[1)]を確立し，併せて諸公式をまとめようとすることを目的とする。

本稿に先行する次の3論文は，それぞれの立場から財務数学の諸公式をまとめようとするもの（記号は異なる）であったが，本稿もその1つである。

〃1〃　投資計算の基礎公式について

　　本学会誌第15巻第2号（1979. 12）

〃2〃　変額年金

　　同　第16巻第3号（1981. 3）

〃3〃　定期払利息の新拡張

　　同　第17巻第2号（1981. 11）

以下これらの論文を引用するときは，頭書の番号を示す。

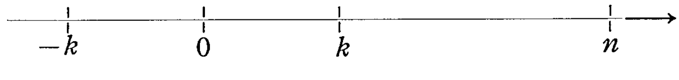
1.　一 般 公 式

t 期末ごとに R_t を　$t=0, 1, \cdots\cdots n$　と（$n+1$）期支払われる年金の1期の元利率 f における現時点の評価額 V_0 は，次のようである。

$$V_0=\sum_{t=0}^{n} R_t f^{-t} \qquad \text{〔1〕}$$

これを一般公式として，以下，諸公式を誘導する。

評価時点を次図のように定める。各時点は，それぞれ期末を示す。



さて，公式〔1〕において，n 時点における評価額 V_n は，次のようになる。

$$V_n=\sum_{t=0}^{n} R_t f^{n-t}=V_0 f^n$$
$$=V_0 f^k f^{n-k}=V_k f^{n-k} \qquad 〔2〕$$

V_n を $\sum_{t=0}^{n} R_t f^{n-t}=V_n$ と直接計算しても，いったん $V_0 f^k=V_k$ を求め，これを $V_k f^{n-k}=V_n$ と間接計算によっても同一結果を得ることは明らかである。以下についても同様であることを，逐次に確認する。

$$V_{-k}=\sum_{t=0}^{n} R_t f^{-(k+t)}=V_0 f^{-k}$$
$$=V_0 f^n f^{-(n+k)}=V_n f^{-(n+k)} \qquad 〔3〕$$

2. 複利現価・複利終価

公式〔1〕において，

$$R_0=P$$
$$R_1=R_2=\cdots\cdots=R_n=0$$

と置き， $f=1+i$ とする。

$$V_0=\sum_{t=0}^{n} R_t(1+i)^{-t}=P(1+i)^{-0}=P$$

公式〔2〕から，

$$V_n=V_0(1+i)^n=P(1+i)^n$$
$$\therefore \quad V_0=V_n(1+i)^{-n}$$

を得る。

現在，一括払Pのn期の複利現価 V_0，複利終価 V_n（これをSと置くこともある）の公式を得る。

また，年iの利率を年m回切替（転化）する利率を$i_{(m)}$[2]で示し，名目利率というに対し，年1回転化の場合 $i_{(1)}=i$ で示し，これを実効利率という。

$$f=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m$$
$$V_n=V_0\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}=P\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

上式において， $m\to\infty$ とすると，

$$f=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m$$

ここで，$\frac{m}{i_{(m)}}=x$ と置くと，$m=x\cdot i_{(m)}$ となり，$i_\infty=\delta$ と置くと，

$$f=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{i_{(m)}}=e^{i_\infty}=e^\delta \quad ^{3)}$$

となり，このδを利力という。

$$f=e^{\delta}$$

$$V_n=Pe^{\delta n}$$

$$V_0=V_n e^{-\delta n}$$

3. 年金現価・年金終価・据置年金現価

以下，第6節まで $f=1+i$ の場合について論ずる。

(1) $\left.\begin{array}{l} R_0=0 \\ R_1=R_2=\cdots\cdots=R_n=R \end{array}\right\}$ n 期期末払

公式〔1〕

$$V_0=\sum_{i=1}^{n} R(1+i)^{-t}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}{}^{4)}=R\cdot a_{\overline{n|}i}$$

（注） Σの範囲に注意。

アドオン方式

Pをアドオン（add-on）利率r（年で示されることが多いが，nに単位を揃える）でn期借入れたときは，アドオン方式は全期間の単利終価を毎期末均等払するから，上記Rは $P\left(\dfrac{1}{n}+r\right)$ となる。

$$V_0=\sum_{t=1}^{n} P\left(\frac{1}{n}+r\right)(1+i)^{-t}$$

$$P=P\left(\frac{1}{n}+r\right)a_{\overline{n|}i}$$

$$\therefore\quad (a_{\overline{n|}i})^{-1}=\frac{1}{n}+r \quad {}^{5)}$$

公式〔2〕

$$V_n=\sum_{t=1}^{n} R(1+i)^{n-t}=R\cdot a_{\overline{n|}i}(1+i)^n$$

$$=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=R\cdot S_{\overline{n|}i}$$

公式〔3〕

$$V_{-k}=\sum_{t=1}^{n} R(1+i)^{-(k+t)}=R\cdot a_{\overline{n|}i}(1+i)^{-k}=R\cdot k|a_{\overline{n|}i}$$

$$=R\cdot\frac{(1+i)^{-k}-(1+i)^{-(k+n)}}{i}=R\cdot\frac{\{1-(1+i)^{-(k+n)}\}-\{1-(1+i)^{-k}\}}{i}$$

$$=R(a_{\overline{k+n|}i}-a_{\overline{k|}i})$$

年金現価から見ると，評価時点を右へ移動（将来へ進む，f^tを乗ず）したものが年金終価であり，左へ移動（溯る，f^{-t}を乗ず）したものが据置年金現価と考えることができる。換言すれば，年金現価・年金終価・据置年金現価は，評価時点の相違に過ぎないといえるものである。

$$V_{n+k}=\sum_{t=1}^{n}R(1+i)^{n-t+k}=V_0(1+i)^{n+k}=V_n(1+i)^k$$
$$=R\cdot S_{\overline{n}|}^{i}(1+i)^k=R\cdot\frac{(1+i)^{n+k}-(1+i)^k}{i}$$
$$=R(S_{\overline{n+k}|i}-S_{\overline{k}|i})$$

本式は，n年積立後の年金をk年据置いた場合の終価であって，この種年金をforborne annuityという。

〔例1〕　毎月末￥10,000を10か月支払われ，其後2か月据置かれる年金の終価を求めよ。ただし，月利0.5％とする。

〔解〕　①　$V_{n+k}=R\cdot S_{\overline{n}|i}(1+i)^k$）による。

$V_{12}=$￥$10,000\times10.2280\ 2641\times1.0100\ 25$

$=$￥$103,306$

②　$V_{n+k}=R(S_{\overline{n+k}|i}-S_{\overline{k}|i})$　による。

$V_{12}=$￥$10,000\times(12.3355\ 6237-2.005)$

$=$￥$103,306$

(2)
$$\left.\begin{array}{l}R_0=R_1=\cdots\cdots=R_{n-1}=R\\ R_n=0\end{array}\right\}\ n\text{ 期期首払}$$

$$V_0=\sum_{t=0}^{n-1}R(1+i)^{-t}=R\{1+(1+i)^{-1}+\cdots\cdots+(1+i)^{-(n-1)}\}=R\cdot a_{\overline{n}|i}(1+i)$$
$$=R\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|i}=R(a_{\overline{n-1}|i}+1)$$
$$V_n=\sum_{t=0}^{n-1}R(1+i)^{n-t}=V_0(1+i)^n=R\cdot S_{\overline{n}|i}(1+i)$$
$$=R\cdot\ddot{S}_{\overline{n}|i}=R(S_{\overline{n+1}|i}-1)$$
$$V_{-k}=\sum_{t=0}^{n-1}R(1+i)^{-(k+t)}=V_0(1+i)^{-k}$$
$$=R\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-k}=R(a_{\overline{n+k-1}|i}-a_{\overline{k-1}|i})$$

(2)期首払年金は，(1)期末払年金において，評価時点を1期右へ移動したものと考えることができる。

4.　償還賦金・積立賦金

前節(1)——期末払——の場合におけるRを算出すると，次のようになる

$$R=V_0(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

$$R=V_{-k}(1+i)^k(a_{\overline{n}|i})^{-1}=V_{-k}(a_{\overline{n+k}|i}-a_{\overline{k}|i})^{-1}$$

これを償還賦金といい，

$$R=V_n(S_{\overline{n}|i})^{-1}=V_n\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}$$ [6)]

これを積立賦金という。

また，当然に次のような関係にある。

$$R=V_0(a_{\overline{n}|i})^{-1}=V_n(1+i)^{-n}(a_{\overline{n}|i})^{-1}=V_n(S_{\overline{n}|i})^{-1}$$

〔例2〕 いま￥100,000を借入れ，1か月据置後10か月間毎月末で償還するとき，賦金はいくらか。ただし，月利0.5%とする。

〔解〕 ① $R=V_{-k}(1+i)^k(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ による。

$R=$￥$100,000\times1.005\times0.1027\ 7057$

$=$ ￥10,328

② $R=V_{-k}(a_{\overline{n+k}|i}-a_{\overline{k}|i})^{-1}$ による。

$R=$￥$100,000\times(10.6770\ 2673-0.9950\ 2488)^{-1}$

$=$ ￥10,328

5. 変 額 年 金

本節においては，毎期末の支払金が，特別の形で変額する場合について考察する。

(1) 支払金が等比数列をなす場合

$R_t=R(1+z)^{t-1}$ 　ただし，$z>-1$

公式〔1〕

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}R(1+z)^{t-1}(1+i)^{-t}=\frac{R}{1+i}\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}{1-(1+z)(1+i)^{-1}}\qquad(z\neq i)$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}{i-z}$$

また，$\dfrac{1+i}{1+z}=1+i'$ と置くと，

$$V_0=R(1+z)^{-1}\sum_{t=1}^{n}(1+i')^{-t}=R(1+z)^{-1}a_{\overline{n}|i'}$$

と電卓利用に便利な公式を得る。$i'<0$ の場合にも支障はない[7)]。

〔例3〕 第1月￥10,000第2月￥9,000と毎月前月の10%減で毎月末に10か月支払われる年金の現価を求めよ。ただし，月利0.5%とする。

〔解〕 ① $V_0=R\cdot\dfrac{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}{i-z}$ による。

(注) $z=-0.1$

$V_0=$￥$10,000\times\dfrac{1-0.3486\ 7844\times0.9513\ 4794}{0.105}$

$=\underline{\underline{¥63,646}}$

② $V_0=R(1+z)^{-1}a_{\overline{n}|i'}$ による。

$i'=\dfrac{1+0.005}{1-0.1}-1=11\dfrac{2}{3}\%$

$V_0=¥10,000\times1.1111\ 1111\times5.7281\ 6129$

$=\underline{\underline{¥63,646}}$

公式〔2〕

$$V_n=\sum_{t=1}^{n}R(1+z)^{t-1}(1+i)^{n-t}=V_0(1+i)^n$$

$$=R\cdot\frac{(1+i)^n-(1+z)^n}{i-z}$$

$$=R(1+z)^{-1}a_{\overline{n}|i'}(1+i)^n=R(1+z)^{n-1}S_{\overline{n}|i'}$$

公式〔3〕

$$V_{-k}=\sum_{t=1}^{n}R(1+z)^{t-1}(1+i)^{-(k+t)}=V_0(1+i)^{-k}$$

$$=R\cdot\frac{(1+i)^{-k}-(1+z)^n(1+i)^{-(k+n)}}{i-z}$$

$$=R(1+z)^{-1}a_{\overline{n}|i'}(1+i)^{-k}=R(1+z)^{-(k+1)}(a_{\overline{k+n}|i'}-a_{\overline{k}|i'})$$

(2) 支払金が等差数列をなす場合

$R_t=R+Q(t-1)$ ただし，$R_t=R+Q(t-1)>0$

$$\therefore\quad Q>-\frac{R}{t-1}\qquad (t\neq1)$$

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}\{R+Q(t-1)\}(1+i)^{-t}$$

$$=(R-Q)\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}+Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+i)^{-t}$$

ここで

$$\{1-(1+i)^{-1}\}Q\cdot\sum_{t=1}^{n}t(1+i)^{-t}=Q\{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots\cdots$$
$$+(1+i)^{-n}-n(1+i)^{-(n+1)}\}$$

$$\therefore\quad Q\cdot\sum_{i=1}^{n}t(1+i)^{-t}=Q\cdot\frac{(1+i)a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=Q\cdot\frac{(1+i)a_{\overline{n}|i}-n(1-i\cdot a_{\overline{n}|i})}{i}$$

$$=Q\left\{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|i}-\frac{n}{i}\right\}$$

これを原式に代入する。

$$V_0=(R-Q)a_{\overline{n}|i}+Q\left\{\left(\frac{1}{i}+1+n\right)a_{\overline{n}|i}-\frac{n}{i}\right\}$$

$$=\left\{R+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|i}-\frac{Qn}{i}$$

$$V_n=\sum_{t=1}^{n}\{R+Q(t-1)\}(1+i)^{n-t}=V_0(1+i)^n$$

$$=\left\{R+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}S_{\overline{n}|i}-\frac{Qn}{i}(1+i)^n$$

$$=\left(R+\frac{Q}{i}\right)S_{\overline{n}|i}-\frac{Qn}{i}$$

$$V_{-k}=\sum_{t=1}^{n}\{R+Q(t-1)\}(1+i)^{-(k+t)}=V_0(1+i)^{-k}$$

$$=\left\{R+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}(a_{\overline{k+n}|i}-a_{\overline{k}|i})-\frac{Qn}{i}(1+i)^{-k}$$

$$=\left(R+\frac{Q}{i}+Qn\right)a_{\overline{n+k}|i}-\left(R+\frac{Q}{i}\right)a_{\overline{k}|i}-\frac{Qn}{i}$$

変額年金においても，評価時点移動自由の原則は成立している。

〔例４〕 １か月据置後第１月は¥10,000第２月は¥10,100と毎月¥100増で毎月末10か月支払われる年金の現価を求めよ。ただし，月利0.5%とする。

〔解〕 ① $V_{-k}=V_0(1+i)^{-k}=\left[\left\{R+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|i}-\frac{Qn}{i}\right](1+i)^{-k}$ による。

$$V_{-1}=\left[\left\{¥10,000+¥100\times\left(\frac{1}{0.005}+10\right)\right\}a_{\overline{10}|0.5\%}-\frac{¥100\times10}{0.005}\right]\times(1+0.005)^{-1}$$

$$=[¥31,000\times9.7304\ 1186-¥200,000]\times0.9950\ 2488$$

$$=\underline{\underline{¥101,137}}$$

② $V_{-k}=\left(R+\frac{Q}{i}+Qn\right)a_{\overline{k+n}|i}-\left(R+\frac{Q}{i}\right)a_{\overline{k}|i}-\frac{Qn}{i}$ による。

$$V_{-1}=\left(¥10,000+\frac{¥100}{0.005}+¥100\times10\right)a_{\overline{11}|0.5\%}-\left(¥10,000+\frac{¥100}{0.005}\right)a_{\overline{1}|0.5\%}-\frac{¥100\times10}{0.005}$$

$$=¥31,000\times10.6770\ 2673-¥30,000\times0.9950\ 2488-¥200,000$$

$$=\underline{\underline{¥101,137}}$$

(3) 特殊な変額年金

i) 債券価格公式

$$\left.\begin{array}{l}R_0=0\\R_1=R_2=\cdots\cdots=R_{n-1}=Cg\\R_n=Cg+C\end{array}\right\}$$

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}Cg(1+i)^{-t}+C(1+i)^{-n}$$

$$=Cg\cdot a_{\overline{n}|i}+C(1+i)^{-n}$$

$$=C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|i}\}$$

となり，これは額面金額C，債券利率g，償還期限nの評価利率iにおける債券価格公式である。

ii) **定期払利息の複利終価公式**

i) において，$C=P$，$g=r$ とし，V_n を求める。

$$V_0=P\{1-(i-r)a_{\overline{n}|i}\}(1+i)^n$$
$$=P\{(1+i)^n-(i-r)S_{\overline{n}|i}\}$$
$$=P(1+r\cdot S_{\overline{n}|i})$$

これは元金P，利率rの利息を毎期支払われる定期払利息の利率iにおけるn年後の複利終価公式である[8]。

i), ii) は，現価，終価の相違はあるが，本質的に同一問題であると考えることができる。

iii) **Hoskold 公式**

V_0を投資すれば，n年間毎年末Rずつ収益が得られ，なお，n年後にSが残存するものとする。このとき投資には報酬率rを要求し，$(R-V_0r)$ の蓄積には報酬率rより低い蓄積率iによるものとする。このV_0を求める。

問題を2分して考え，V_0に対する要求額と収益の各終価を求め，これを等置してV_0を求める。

$$\sum_{t=1}^{n}R(1+i)^{n-t}+S=V_0(1+r\cdot S_{\overline{n}|i})$$

（注） 右辺は，ii) の場合である。

$$\therefore\quad V_0=\frac{R\cdot S_{\overline{n}|i}+S}{1+r\cdot S_{\overline{n}|i}}$$

本式は，残価ある場合の Hoskold の公式である[9]。

iv) **旧 MAPI 方式**

G. Terborgh は，設備原価C，n期末にSの残価するものとし，毎期の最新設備に対する操業費R_tを第1期0，第2期G……と直線的に増加するとし，その原価合計の年当りAMを考え，これが最小になるnを経済寿命と考えた。

$$\left.\begin{array}{l}R_0=C\\ R_t=G(t-1),\quad R_n=G(n-1)-S\end{array}\right\}$$

$$AM=\{C+\sum_{t=1}^{n}G(t-1)(1+i)^{-t}-S(1+i)^{-n}\}(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$
$$=\left\{C+G\left(\frac{1}{i}+n\right)a_{\overline{n}|i}-\frac{Gn}{i}-S(1-i\cdot a_{\overline{n}|i})\right\}(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

$$=\left(C-\frac{Gn}{i}-S\right)(a_{\overline{n}|i})^{-1}+G\left(\frac{1}{i}+n\right)+Si$$ [10]

6. 変 額 賦 金

前節の諸公式から，賦金を算出する。

(1) $R_t=R(1+z)^{t-1}$

$$R=V_0\cdot\frac{i-z}{1-(1+z)^n(1+i)^{-n}}=V_0(1+z)(a_{\overline{n}|i'})^{-1}$$

$$R=V_n\cdot\frac{i-z}{(1+i)^n-(1+z)^n}=V_n(1+z)^{-(n-1)}(S_{\overline{n}|i'})^{-1}$$

$$R=V_{-k}\cdot\frac{i-z}{(1+i)^{-k}-(1+z)^n(1+i)^{-(k+n)}}=V_{-k}(1+z)^{k+1}(a_{\overline{k+n}|i'}-a_{\overline{k}|i'})^{-1}$$

(2) $R_t=R+Q(t-1)$

$$R=\left(V_0+\frac{Qn}{i}\right)(a_{\overline{n}|i})^{-1}-Q\left(\frac{1}{i}+n\right)$$

$$R=\left(V_n+\frac{Qn}{i}\right)(S_{\overline{n}|i})^{-1}-\frac{Q}{i}$$

$$R=\left\{V_{-k}+\frac{Qn}{i}(1+i)^{-k}\right\}(a_{\overline{k+n}|i}-a_{\overline{k}|i})^{-1}-Q\left(\frac{1}{i}+n\right)$$

7. 特 殊 な 年 金

(1) 年1回払年金

第3節から前節までは，$f=1+i$ を利用してきた。

本節では，これを拡張して次の各場合を考察する。

i) $i_{(m)}$ を利用する。 $f=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m$

公式〔1〕

$$V_0=\sum_{t=0}^{n}R_t\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mt}$$

公式〔2〕

$$V_n=\sum_{t=0}^{n}R_t\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{m(n-t)}=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}\sum_{t=0}^{n}R_t\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mt}$$

$$=V_0\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

公式〔3〕

$$V_{-k}=\sum_{t=0}^{n}R_t\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-m(k+t)}=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mk}\sum_{t=0}^{n}R_t\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mt}$$

$$=V_0\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mk}$$

n 期期末払の場合は $\sum_{t=1}^{n}$，期首払の場合は $\sum_{t=0}^{n}$ とする。

$R_t=R(1+z)^{t-1}$　　n 期期末払のとき

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}R(1+z)^{t-1}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mt}\qquad z>-1$$

$$=R(1+z)^{-1}a_{\overline{n}|i''}\qquad ただし，\frac{\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{m}}{1+z}=1+i''$$

$z=0$　　のとき

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}R\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mt}=R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{m}-1}$$

$$=R\cdot\frac{a_{\overline{mn}|}}{S_{\overline{m}|}}\quad \text{at}\ \frac{i_{(m)}}{m}$$

at 以下は，1 期の利率

ii)　利力を利用する　　$f=e^{\delta}$

公式〔1〕

$$V_0=\sum_{t=0}^{n}R_te^{-\delta t}$$

公式〔2〕

$$V_n=\sum_{t=0}^{n}R_te^{\delta(n-t)}=V_0e^{\delta n}$$

公式〔3〕

$$V_{-k}=\sum_{t=0}^{n}R_te^{-\delta(k+t)}=V_0e^{-\delta k}$$

$R_t=R+Q(t-1)$　　n 期期末払のとき

$$V_0=\sum_{t=1}^{n}\{R+Q(t-1)\}e^{-\delta t}$$

$$=(R-Q)\sum_{t=1}^{n}e^{-\delta t}+Q\cdot\sum_{t=1}^{n}te^{-\delta t}$$

$$=\left\{R+Q\left(\frac{1}{e^{\delta}-1}+n\right)\right\}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}-\frac{Qn}{e^{\delta}-1}$$

$Q=0$　　のとき

$$V_0=\sum_{t=1}^{n} Re^{-\delta t}=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=R\cdot a_{\overline{n}|}\ \text{at}\ (e^{\delta}-1)$$

iii) 割引率，割引力を利用する。

$$i=\frac{V_1-V_0}{V_0}\qquad\therefore\quad V_1=V_0(1+i)$$

よって明らかなように，1年間の増加分を現価 V_0 に対比したものが利率であるが，これを

$$d=\frac{V_1-V_0}{V_1}\qquad\therefore\quad V_0=V_1(1-d)$$

$$V_1=V_0(1-d)^{-1}$$

とすると，d は1年間の増加分を終価 V_1 に対比したものであって，これを割引率といい，利用されることがある。この場合は f を拡張して用いる。

$$1+i=(1-d)^{-1}$$

$$f=(1-d)^{-1}$$

公式〔1〕 $V_0=\sum_{t=0}^{n} R_t(1-d)^{t}$

公式〔2〕 $V_n=\sum_{t=0}^{n} R_t(1-d)^{-n+t}=V_0(1-d)^{-n}$

公式〔3〕 $V_{-k}=\sum_{t=0}^{n} R_t(1-d)^{k+t}=V_0(1-d)^{k}$

割引現価・終価

$$\left.\begin{array}{l}R_0=P\\ R_1=R_2=\cdots\cdots=R_n=0\end{array}\right\}$$

$$V_0=P$$

$$V_n=V_0(1-d)^{-n}$$

割引率による n 期期末払年金現価・終価

$$\left.\begin{array}{l}R_0=0\\ R_1=R_2=\cdots\cdots=R_n=R\end{array}\right\}$$

$$V_0=\sum_{t=1}^{n} R(1-d)^{t}$$

$$=R\cdot\frac{(1-d)\{1-(1-d)^{n}\}}{d}=R\left\{\frac{1-(1-d)^{n+1}}{d}-1\right\}$$

$$=R\{S_{\overline{n+1}|}\ \text{at}\ (-d)\quad -1\}$$

$$V_n=V_0(1-d)^{-n}=R\left\{\frac{(1-d)^{-(n-1)}-1}{d}+1\right\}=R\{a_{\overline{n-1}|}\ \text{at}\ (-d)\quad +1\}$$

〔例5〕 毎月末¥10,000を1か年支払われる年金現価および終価を求めよ。ただし，割引率を

月 0.5% とする。

〔解〕 現価$=V_0=R\{s_{\overline{n+1}|}$ at $(-d)\quad -1\}$ による。

$V_0=¥10,000\times(12.6170\ 6142-1)$

$=\underline{\underline{¥116,171}}$

終価$=V_n=R\{a_{\overline{n-1}|}$ at $(-d)\quad +1\}$ による。

$V_n=¥10,000\times(11.3372\ 7703+1)$

$=\underline{\underline{¥123,373}}$

(検) $¥116,171\times(1-0.005)^{-12}=¥123,373$

次に,

$$(1-d)^{-1}=\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{-m}$$

を考える。

ここで, $-\dfrac{m}{d_{(m)}}=x'$ と置くと, $-m=x'\cdot d_{(m)}$

となり, 上式は,

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\right\}^{d_{(m)}}=e^{d_\infty}=e^{\delta'}$$

となるが,

$$1+i=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{\delta}$$

$$=(1-d)^{-1}=\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta'}$$

$\therefore\quad \delta=\delta'$

δ' は割引力といい, 利力に等しい。

$$f=\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{-m}=e^{\delta}$$

$e^{\delta'}$ と置けば, ii) の場合と同様である。

(2) 年 p 回払年金

この場合は, その 1 支払期を単位に採る。

いま, $f=\left(1+\dfrac{i_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$ を利用する場合について論ずる。

$$\begin{cases}\text{元利率} & \left(1+\dfrac{i_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\\[2ex] \text{支払金} & \dfrac{R_t}{p}\\[2ex] \text{期　数} & np\end{cases}$$

公式〔1〕 $V_0=\sum_{t=0}^{np}\frac{R_t}{p}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}$

公式〔2〕 $V_n=\sum_{t=0}^{np}\frac{R_t}{p}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn-\frac{m}{p}\cdot t}=V_0\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}$

$\frac{R_t}{p}=\frac{R}{p}(1+z)^{\frac{1}{p}(t-1)}$ n 期期末払のとき z は年単位

$$V_0=\sum_{t=1}^{np}\frac{R}{p}(1+z)^{\frac{1}{p}(t-1)}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}$$

$$=\frac{R}{p(1+z)^{\frac{1}{p}}}\cdot\sum_{t=1}^{np}\left\{\frac{\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m}{1+z}\right\}^{-\frac{1}{p}\cdot t}$$

$$=\frac{R}{p(1+z)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{1-(1+i'')^{-n}}{(1+i'')^{\frac{1}{p}}-1}$$

ただし $\frac{\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m}{1+z}=1+i''$

$z=0$, $m=1$ のとき

$$V_0=\sum_{t=1}^{np}\frac{R}{p}(1+i)^{-\frac{1}{p}\cdot t}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

$$=\frac{R}{p}\cdot a_{\overline{np}|}\ \text{at}\ \{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}=R\cdot a_{\overline{n}|i}\cdot S_{\overline{1}|}^{(p)}$$

〔例6〕 年額 ¥120,000 を年6回払2か年間支払われ期末払年金現価を求めよ。ただし,年利率6% とする。

〔解〕 ① $V_0=\frac{R}{p}\cdot a_{\overline{np}|}$ at$\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}$ による。

$V_0=\frac{¥120,000}{6}\times a_{\overline{2\times6}|}$ at $\{(1+0.06)^{\frac{1}{6}}-1\}$

$=$¥20,000×11.2722 4922

$=$¥225,445

② $V_0=R\cdot a_{\overline{n}|i}\cdot S_{\overline{6}|}^{(p)}$ による。

$V_0=$¥120,000×1.8333 9267×1.0247 168

$=$¥225,445

$\frac{R_t}{p}=\frac{R+\frac{Q}{p}(t-1)}{p}$, $f=e^{\frac{\delta}{p}}$ n 期期末払のとき Qは年額

$$V_n=e^{\delta n}\cdot\sum_{t=1}^{np}\frac{R+\frac{Q}{p}(t-1)}{p}\cdot e^{-\frac{\delta}{p}\cdot t}$$

$$=e^{\delta n}\left\{R+\frac{Q}{p}\left(\frac{1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}+np\right)\right\}\frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}-\frac{Qn}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}$$

$$=\left\{R+\frac{Q}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}\right\}\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}-\frac{Qn}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}$$

$Q=0$ のとき

$$V_n=R\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}=R\cdot S_{\overline{n}|}^{(p)}\ \text{at}\ (e^{\delta}-1)=\frac{R}{p}\cdot S_{\overline{np}|}\ \text{at}\ (e^{\frac{\delta}{p}}-1)$$

p 回払年金においても，評価時点移動自由の原則は成立する。

(3) 連続年金

年 p 回払において，$p\to\infty$ と仮定したものを連続年金という。

公式〔1〕 $$V_0=\lim_{p\to\infty}\sum_{t=0}^{np}\frac{R_t}{p}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}$$

公式〔2〕 $$V_n=\lim_{p\to\infty}\sum_{t=0}^{np}\frac{R_t}{p}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn-\frac{m}{p}\cdot t}=V_0\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

$\frac{R_t}{p}=\frac{R}{p}(1+z)^{\frac{1}{p}(t-1)}$ n 期期末払のとき

$$V_0=\lim_{p\to\infty}\sum_{t=1}^{np}\frac{R}{p}(1+z)^{\frac{1}{p}(t-1)}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}$$

$$=R\lim_{p\to\infty}\frac{1-(1+i'')^{-n}}{p(1+z)^{\frac{1}{p}}\{(1+i'')^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

$$=R\lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{p}\{1-(1+i'')^{-n}\}}{(1+z)^{\frac{1}{p}}\{(1+i'')^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

分母子を各別に微分して極限値を採る。

$$V_0=R\cdot\frac{1-(1+i'')^{-n}}{Ln(1+i'')}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\ \text{at}\ i''$$

期首払を求めると，

$$V_0=\lim_{p\to\infty}\sum_{t=0}^{np-1}\frac{R}{p}(1+z)^{\frac{1}{p}(t-1)}\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}\cdot t}$$

$$=R\lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{p}\{1-(1+i'')^{-n}\}}{(1+z)^{\frac{1}{p}}\{(1+i'')^{\frac{1}{p}}-1\}}(1+i'')^{\frac{1}{p}}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i'')^{-n}}{Ln(1+i'')}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\ \text{at}\ i''$$

となって，期末払と一致する。すなわち連続年金においては，期首払と期末払の区別はない[11]。

$z=0,\ m=1$ のとき

$$V_0=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|i} \qquad 1+i''=1+i$$

$z=0$, $m\to\infty$ 　のとき

$$V_0=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=R\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}\text{ at }(e^{\delta}-1) \qquad 1+i''=e^{\delta}$$

$$\frac{R_t}{p}=\frac{R+\dfrac{Q}{p}(t-1)}{p},\quad f=e^{\frac{\delta}{p}} \quad \text{のとき}$$

$$V_n=\lim_{p\to\infty}\sum_{t=1}^{np}\frac{R+\dfrac{Q}{p}(t-1)}{p}\cdot e^{\delta n-\frac{\delta}{p}\cdot t}$$

前項(2)から

$$V_n=\lim_{p\to\infty}\left\{\left(R+\frac{\frac{1}{p}\cdot Q}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}\right)\frac{\frac{1}{p}(e^{\delta n}-1)}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}-\frac{\frac{1}{p}\cdot Qn}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}\right\}$$

$$=\left(R+\frac{Q}{\delta}\right)\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}-\frac{Qn}{\delta}=\left(R+\frac{Q}{\delta}\right)\bar{S}_{\overline{n}|}\text{ at }(e^{\delta}-1)-\frac{Qn}{\delta}$$

変額連続年金においても，評価時点移動自由の原則は成立する。

最後に，連続年金を求めるのに，積分を利用できることを示しておこう。

$$V_0=\int_0^n R(1+z)^t f^{-t}\,\mathrm{dt} \qquad t-1\to t$$

$$=\int_0^n R\left(\frac{f}{1+z}\right)^{-t}\mathrm{dt}=R\left[-\frac{\left(\frac{f}{1+z}\right)^{-t}}{Ln\left(\frac{f}{1+z}\right)}\right]_0^n$$

$$=R\cdot\frac{1-\left(\frac{f}{1+z}\right)^{-n}}{Ln\left(\frac{f}{1+z}\right)} \quad ^{12)}$$

$$V_0=\int_0^n(R+Qt)f^{-t}\,\mathrm{dt}=R\int_0^n f^{-t}\,\mathrm{dt}+Q\int_0^n tf^{-t}\,\mathrm{dt}$$

$$=R\left[-\frac{f^{-t}}{Ln\ f}\right]_0^n+Q\left[\frac{-f^{-t}(t\cdot L_n f+1)}{(Ln\ f)^2}\right]_0^n$$

$$=R\cdot\frac{1-f^{-n}}{Ln\ f}+Q\cdot\frac{1-f^{-n}-nf^{-n}Ln\ f}{(Ln\ f)^2}$$

$$=R\cdot\frac{1-f^{-n}}{Ln\ f}+Q\cdot\frac{\dfrac{1-f^{-n}}{Ln\ f}-nf^{-n}}{Ln\ f} \quad ^{12)}$$

1） 評価時点移動自由の原則を一応明言された最初の文献は，次の２書であろう。
久武雅夫：商業計算提要　1951年　p. 41
C. H. Franklin : The Mathematics of Finance 1951 p. 63

2） $j_{(m)}$ を用いることもある。

3） $1+i=\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)^m=e^{\delta}$　　e…自然対数の底数

$\delta=Ln(1+i)=m\cdot Ln\left(1+\frac{i_{(m)}}{m}\right)$　　Ln…自然対数

4） $\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots\cdots+(1+i)^{-n}$

$\{1-(1+i)^{-1}\}\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=(1+i)^{-1}-(1+i)^{-(n+1)}$

$\therefore\ \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}=\frac{(1+i)^{-1}-(1+i)^{-(n+1)}}{1-(1+i)^{-1}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1}$

5） アドオン方式の詳細については，次稿参照。
拙稿：消費者金融におけるデドオン方式　商業数学会誌　第21号　(1968. 12)

6） 簡単であるから，証明は省略する。

7） $i'=-d$ と置くと　$a_{\overline{n}|}i'=\frac{1-(1-d)^{-n}}{-d}=\frac{(1-d)^{-n}-1}{d}$
本稿第７節(1) iii) 割引率による年金現価　参照。

8） 拙稿："3" 参照。

9） 拙稿：会計数理の基本公式――Hoskold 公式の拡張――本学会誌第６巻第１号 (1970. 4) 参照。

10） 前注　公式〔606〕に当たる。
旧 MAPI 方式についての詳細は，次書参照。
拙著：新会計数理　1977年 p. 121～p. 124

11） 注10　拙著　p. 141 参照。

12） 拙稿 "1" p. 78—p. 79 参照。（ただし，引用稿は終価であることに注意）
拙稿 "2" p. 32 を拡張。
M. Saada : Pour s'initier aux Mathématiques financières fascicule 1 1979 p. 217, p. 219 は $f=e^{\delta}$　の場合を部分積分法で解いている。

（1984. 9. 8. 稿）