【資　料】

経済分析と数式処理—REDUCEの紹介[1)]

藤　森　頼　明

1.　はじめに

電子計算機が登場してから大分年月を経ている。当初は事務処理と技術計算とが主たる用途と考えられているようだが，表面的な受けとめられ方と異なり，これ以外の方向での応用が初期の段階から模索され続けている。

現代の計算機とは，膨大な数のスイッチの集積であって，その on と off を1と0とに対応させれば2進数を表し得るから，その2進数によって代表されるような集合の取扱が可能になる。重要なことは，そのような集合は決して数に限定されず，例えばコード番号で識別されるような文字の類であっても構わないということである。このように考えてくると，実に様々な対象が計算機によって取り扱われ得ることが判る。

さて，計算機を応用するというと，それを駆動する言語を抜きにしては語り得ない。勿論，言語は限定されることはないが，それでも目的に適した言語の存在は無視できない。計算機の出現の初期の段階で，LISP と呼ばれる言語の開発が開始される。その言語は極めて数学的な色彩の濃い言語であって，巧まずして記号処理の可能なものであった。これをベースにした数式処理のシステムが様々に開発されてきている。ここで数式処理とは，計算機による式の記号的な計算を意味するものと考えて良い。そのようなシステムの中で，比較的旧いものであるが，それだけ多くの教育研究機関で利用されているものとして REDUCE を挙げることができる[2)]。

REDUCE が適用可能な数学の応用領域は，多項式や有理式の処理，記号行列関係の計算，任意多倍長精度の整数と実数演算，微分と積分，因数分解，高エネルギー物理学の諸計算，微分幾

1)　これは筆者が数年来行っている経済分析への計算機の応用に関する基礎研究の一環をなすもので，計画中の *REDUCE Primer for Economists* の一部を邦文にしたものである。しかし，本稿の範囲は，従来からよく知られていることを別の手法で展開してみると云う範囲に限定されている。また，計算機の応用に関する事柄は，計算機センター等の発行する紀要，報告集に掲載されるのが常であって，それだけ経済学研究者の目に触れる機会が少なかったように思われる。それ故，技術的な内容のものであるが，資料として公開することにした。なお，本研究は1987年度城西大学学長所管研究費に基づく研究の一部である。

2)　計算機の発展と LISP，数式処理システム等の関連については末尾の文献を参照されたい。数式処理システムの研究が天文学や素粒子物理の研究上の必要性から生まれたことは興味深いことである。

何学，ある種の偏微分方程式の処理，数値計算プログラムの作成，等々，相当広範囲にわたるものであって，他の汎用数式処理システムでも大同小異である。

さらに，REDUDE を含む一般の数式処理システムは一種のプログラミング言語であって，組み込まれていない機能を独自に定義し，その機能を拡張して応用することが可能である。

本資料は経済学の研究者に取って余り知られていない数式処理システム REDUCE の概要を紹介するものである。

2.　利潤最大化問題の REDUCE による解法例

REDUCE が一体どのようなものであるか，まず実例を紹介することにしよう。

やや形式的な計算の例として，企業の需要関数，供給関数に関する教科書的な問題を取り上げよう。

生産関数 $z=f(x,y)$ をもつ企業の利潤最大化問題を考える。製品価格を p_0，2種類の投入要素の価格をそれぞれ p_1, p_2 とする。企業の利潤は

$$\pi=p_0z-p_1x-p_2y$$

で定められるから，企業の目的は，“$z=f(x,y)$ の下で π を最大化すること”である。

$\pi(x,y)$ の極値に関する1階の必要条件は

$$\frac{\partial\pi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\pi}{\partial y}=0,$$

であるが，これらは陰伏的に利潤最大化企業の需要関数

$$x=\alpha(p_0,p_1,p_2),\quad y=\beta(p_0,p_1,p_2)$$

と供給関数

$$z=\gamma(p_0,p_1,p_2)$$

を定めている。ここで，2階の十分条件は，行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\pi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

の首座小行列式が負値定符号条件を満たすことである。

1階の必要条件はこれらの関数に付いての全情報を含んでいるから，これらから重要な比較静学的結論が導出される。すなわち，

命題 1.

$$\gamma_1>0\quad\left(\frac{\partial z}{\partial p_0}>0\right).$$

命題 2.

$$\gamma_2=-\alpha_1,\quad \gamma_3=-\beta_1,\quad \alpha_3=\beta_2.\ \left(\frac{\partial z}{\partial p_1}=-\frac{\partial x}{\partial p_0},\ \frac{\partial z}{\partial p_2}=-\frac{\partial y}{\partial p_0},\ \frac{\partial x}{\partial p_2}=\frac{\partial y}{\partial p_1}\right).$$

さて，企業は所与の生産量 z_0 を生産するのに必要な費用を最小化するものとしよう。これを費用最小化企業と呼ぶ。問題は，

$$\text{minimise}\quad p_1x+p_2y$$
$$\text{subject to}\quad z_0=f(x,y)$$

となるから，ラグランジュの乗数を μ とすると

$$L(x,y,\mu)=p_1x+p_2y+\mu(z_0-f(x,y))$$

の極値を求めることに帰着する。1階の必要条件は

$$\frac{\partial L}{\partial \mu}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,$$

であり，またここで，2階の十分条件は，行列

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial k_i \partial k_j}\right),\ (k_i,k_j=\mu,x,y)$$

の2次以上の首座小行列式がすべて正という符号条件を満たすことである。

費用最小化企業の需要関数 $x_c=\varphi(p_1,p_2,z_0),\ y_c=\psi(p_1,p_2,z_0)$ の性質はこれらから導出される。すなわち，

命題 3.

$$\varphi_2=\psi_1;\quad \varphi_1<0,\quad \psi_2<0.\ \left(\frac{\partial x_c}{\partial p_2}=\frac{\partial y_c}{\partial p_1};\ \frac{\partial x_c}{\partial p_1}<0,\ \frac{\partial y_c}{\partial p_2}<0\right).$$

以上で z_0 に応じた需要関数が求められるならば，利潤は z_0 のみの関数として考えることが出来るから，それを z_0 について最大化すればやはり利潤最大化問題が解かれることになる。

最後に，直接的な利潤最大化と費用最小化を通じて二段階的に利潤最大化を考察した場合とを比較すると，次のような結論が予測される。つまり，最適な生産状況においては

$$\alpha(p_0,p_1,p_2)=\varphi(p_1,p_2,z),$$
$$\beta(p_0,p_1,p_2)=\psi(p_1,p_2,z),$$

であろうから，次の2命題が成立する。

命題 4.

$$\alpha_1=\varphi_3\gamma_1\quad \left(\frac{\partial x}{\partial p_0}=\frac{\partial x_c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p_0}\right).$$

$$\beta_1=\psi_3\gamma_1\quad \left(\frac{\partial y}{\partial p_0}=\frac{\partial y_c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p_0}\right).$$

命題 5.

$$\alpha_2=\varphi_1+\varphi_3\gamma_2 \quad \left(\frac{\partial x}{\partial p_1}=\frac{\partial x_c}{\partial p_1}+\frac{\partial x_c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p_1}\right).$$

$$\beta_2=\psi_1+\psi_3\gamma_2 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial y_c}=\frac{\partial y_c}{\partial p_2}+\frac{\partial y_c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p_2}\right).$$

以上の展開に関する REDUCE のログを本資料末尾に示すことにする。ログの中にコメントが入れられているので，詳細な説明は省略する[3]。

• 小文字の部分がユーザーの入力，大文字の部分がシステムの応答である。一見して明らかなように，ログの大部分はシステムの応答である。つまり，複雑な計算である割には，ユーザー自体の入力は少ない。熟練したユーザーであれば，数十分で終了しよう[4]。

• ログではすべての応答をそのまま出力するようにしてあるが，不用な出力は抑制できる。

• 以下のログは内蔵関数と簡単な文法的知識のみで理解できるようになっているが，文法的な注釈を必要最低限，ここに付けておく。

df というのは偏微分演算子であって，例えば，

```
df(z, x, 2, y);
```

と入力すると，偏微分係数 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ が求められる。

solve は方程式を解く内蔵関数であって，

```
solve({q1, q2}, x1, x2);
```

と入力すると，$q1=0, q2=0$ の解としての $x1, x2$ の値を $\{\{x1=x_1, x2=x_2\}\}$ として返す。ここで，{...}をリストと呼ぶ。リストは集合を擬したものであるが，重複した要素が許容されるなど，厳密には異なる。なお，4次方程式までの方程式も solve 演算子によって形式的に解かれる。

識別子 f を関数記号として使用する場合，

```
operator f;
```

と宣言する。かくして，$f(x)$ のように変数を取ることができる。

新たに定義される関数は "algebraic procedure..." のように宣言される。(これにはプログラミングの知識が必要になる。)

文法の詳細については，マニュアルを参照せよ。

なお，当該ログでの2階の十分条件の取扱は完全ではない。それは当面符号を見るためだけに必要な情報に過ぎず，また，行列の取扱に必要とされる複雑なプログラミングを避けたためである。一般に，多変数関数の微分法の応用を自在に行うためには，REDUCE の行列関数を拡張し

3) 問題の経済学的意味自体に付いては，適当なミクロ経済学のテキストを参照されたい。
4) 大文字，小文字の別を区別するか否かは，システムに依存する。

なければならない[5]。

• 本資料のログは，REDUCE のベースとして基準となる Standard LISP 系の LISP 上に実現された REDUCE 3.3 で作成されている。したがって，手続き setdrv( ) は通訳系の特性を利用しているので，近年の Common LISP のような翻訳系の LISP 上の REDUCE では正しく機能しない。

3. 数式処理システムの応用に付いて一小結

以上の例解は数式処理システム（REDUCE）の序の口を示したに過ぎない。そこで，その特徴と将来性を簡単に纏めておこう。

現代の計算機は云うまでもなく近代工学の賜物であり，その長所も短所も共に近代工学の特長と限界によって与えられることに注意しなければならない。近代工学の特徴の一つは，入力があって次にそれに応じた出力があるという基本的考え方である。これを単純に表現するならば，$y=f(x)$ のように，陽関数で表示されることになる。つまり，ここで再確認しておかなければならないのは，計算機が得意とする分野は，何が所与であり，何を求めるかが明確にされた（因果関係の明確な）枠組みを持つ問題領域であるという点である。

計量経済モデルなどではしばしば誘導形という表現を用いるが，理論のモデルにおいてもそれに類するものを追求するという方法論でないと，数式処理の応用は有効なものとはならない[6]。

次に，REDUCE では曖昧性，あるいは不定性というものは許されない。つまり，行列の次数，変数の個数，微分の階数といったものは必ず特定されていなければならない。従って，REDUCE を応用する場合には次元その他について具体的な場合を想定することでもある。

更に，本資料では例題として形式的な計算を意図的に示したが，実際の応用に際しては，式そのものを具体的に与える方向も考えられなければならない。例えば，加速度的な趨勢を表すには２次式を与えるというような技法がより積極的に採用されなければならない。

数式処理システムの経済分析への応用は，従来からの数学の応用の延長線上にあるものとして捉えてよい。一方では，数式処理の基礎はあくまでも数学であり，また他方では，従来不可能であった複雑な記号的計算を可能ならしめるものとしてである[7]。後者の方向で考えると，最近の理論経済学では抽象的な存在定理の類が増えているけれども，具体性のある記号的なシミュレーションを行うことも経済学にとっては重要であり，これは数式処理システムによって初めて可能

5） 藤森（1988）を参照せよ。
6） 従来から統計学あるいは計量経済学の分野で数値計算を行ってきた者にとっては，このことはそれほど理解に困難ではないであろう。
7） 実際，経済学以外の科学，例えば前記の天文学や素粒子物理学でも，数式処理システムの応用をまって最近になって初めて可能になった例は多く指摘されている。

になるであろう[8]。

経済分析が従来にもまして，計量経済的分析や統計的分析との結合を密にし，その基礎方程式の理論的意味を明確にしなければならない時，あるいは具体的な例解が説得力をもつ分野では，数式処理は大いに威力を発揮するようになるであろう[9]。

本資料ではまず REDUCE がどのようなものであるか，経済学の問題を例解することによって示してきた。従来 REDUCE を論じるとき，他のプログラミング言語に関する知識，特に LISP や FORTRAN に関する豊富な知識が暗黙の中に前提にされることが多かった嫌いがある。しかし，REDUCE 自体は一つの完結したシステムである。それを独立的に，むしろ数学の延長にあるものとして捉え直し，経済学の理論研究へのより積極的な応用を展開することを，次の機会の課題としたい。

参考文献

Davenport, J. H., Siret, Y., Tournier, E. (1988) *Computer Algebra—System and Algorithms for Algebraic Computation,* Academic Press.

藤森頼明（1988)「REDUCE 3.3 用の集合と行列の関数」『数式処理通信』5 (4)，28-49頁。

後藤英一，一松信，広田良吾（編）(1986)『計算機による数式処理のすすめ』，共立出版。

Hearn, A. C. (1987) *REDUCE USER'S MANUALver. 3.3,* RAND Corp. 戸島（訳）(1988)『REDUCE ユーザーズマニュアル』マグローヒルブック。

池田政幸・山本強（1983)「数式処理とリスプ」『マイコンピュータ』(15)。

金田康正（1983)「数式処理とは」『数理科学—特集：数式処理』(242)。

村尾裕一（1983)「数式処理用言語 REDUCE 2」『数理科学—特集：数式処理』(242)。

中村隆志（1985)「REDUCE を使用して」『北海道大学大型計算機センターニュース』17 (4)。

Rayna, G. (1987) *REDUCE—Software for Algebraic Computation,* Springer-Verlag.

佐々木建昭，元吉文男，渡辺隼郎（1986)『数式処理システム』，昭晃堂。

Stauffer, D., Hehl., F. H., Winkelman, V., Zabolitzky, J. G. (1988) *Computer Simulation and Computer Algebra,* Springer-Verlag.

田中勝人（1985)「時系列解析における数式処理言語の利用」『数式処理通信』2 (4)。

戸島熈（1984)「RLISP」『マイコンピュータ』(15)。

戸島熈（1985)「記号処理あれこれ」(1)-(11)『アスキー』1-11月号。

戸島熈（1985)「数式処理言語 REDUCE 3.1」(1)-(5),『北海道大学大型計算機センターニュース』17(1)-(5)。

戸島熈（1986)「数理経済学への応用」後藤他（1986）所収。

東京大学大型計算機センター（編）(1984/85/86)『REDUCE プログラミング資料』(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)

---

8) 念のため云えば，現在の数式処理システムは存在定理の類の議論には全く無力である。また，一部のシステムを除けば，いわゆる人工知能的な要素も含まれていない。詳細は別の機会に譲るが，REDUCE のような数式処理システムが現在得意とする応用領域は，まず解析的な，しかし手間の掛かる計算である。基本的な公式やアルゴリズムが与えられている場合，それに依拠して式を展開する等ということは数式処理システムの独壇場であろう。

9) 前節の例解は REDUCE の利用法の一例をも示している。すなわち，計算の検証ということである。実際，積分公式の検査に数式処理システムが応用され，重要な訂正が発見されたことも既に報告されている。

```
REDUCE 3.3, 15-Jan-88 ...
%  Micro-economics      Example 1.
%
%% Basic notations;
operator f;

%  This is a production function f(x1,x2);
%  Suppose firms maximise profit with production function;
            w := f(y1,y2);

W := F(Y1,Y2)

%  Then, the profit is defined by;
pf:=p0*w-p1*y1-p2*y2;

PF := F(Y1,Y2)*P0 - P2*Y2 - P1*Y1

% where
%  p0: price of product;
%  p1: price of factor 1;
%  p2: price of factor 2;
%  As usual, the first order conditions are;
algebraic procedure setdrv(f,f1,f2);
   forall p,q let df(f(p,q),p)=f1(p,q), df(f(p,q),q)=f2(p,q);

SETDRV

operator f1,f2;

setdrv(f,f1,f2);

q1:=df(pf,y1);

Q1 := F1(Y1,Y2)*P0 - P1

q2:=df(pf,y2);

Q2 := F2(Y1,Y2)*P0 - P2

% These two equations, both set to 0, define demand functions
% y1(p0,p1,p2) and y2(p0,p1,p2) and thus supply function w(p0,p1,p2)
% of profit-maximising firms.
%  Now, the second-order conditions;
operator f11,f12,f21,f22;

setdrv(f1,f11,f12);

setdrv(f2,f21,f22);

forall p,q let f12(p,q) =f21(p,q);

matrix hess1(2,2);

hess1 := mat(       (df(pf,y1,2),df(pf,y1,y2)),
          (df(pf,y2,y1),df(pf,y2,2)));

HESS1(1,1) := F11(Y1,Y2)*P0

HESS1(1,2) := F21(Y1,Y2)*P0

HESS1(2,1) := F21(Y1,Y2)*P0
```

```
HESS1(2,2) := F22(Y1,Y2)*P0

hessm :={ hess1(1,1), det hess1};

HESSM := {F11(Y1,Y2)*P0,

             2                                          2
          P0 *(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )}

hessm := hessm$

%  Comparative statics;
depend y1,p0,p1,p2;

depend y2,p0,p1,p2;

depend w,p0,p1,p2;

s10:=df(q1,p0);

S10 := DF(Y2,P0)*F21(Y1,Y2)*P0 + DF(Y1,P0)*F11(Y1,Y2)*P0 + F1(

       Y1,Y2)

s20:=df(q2,p0);

S20 := DF(Y2,P0)*F22(Y1,Y2)*P0 + DF(Y1,P0)*F21(Y1,Y2)*P0 + F2(

       Y1,Y2)

algebraic procedure soln(h,n);
   rhs part(first h,n);

SOLN

tt:=solve({s10,s20},{df(y1,p0),df(y2,p0)});

TT := {{DF(Y1,P0)= - (F22(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)*F2(Y1,

                    Y2))/(P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) -

                                     2
                       F21(Y1,Y2) )),

        DF(Y2,P0)=(F21(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F11(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)

                    )/(P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) -

                                     2
                       F21(Y1,Y2) ))}}

dy1dp0:=soln(tt,1);

DY1DP0 :=  -

           F22(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)
          ---------------------------------------------
                                                      2
            P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )
dy2dp0:=soln(tt,2);
```

```
DY2DP0 :=

           F21(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F11(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)
          ----------------------------------------------
                                                      2
            P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)  )

let df(y1,p0)=dy1dp0,df(y2,p0)=dy2dp0;

s11:=df(q1,p1);

S11 := DF(Y2,P1)*F21(Y1,Y2)*P0 + DF(Y1,P1)*F11(Y1,Y2)*P0 - 1

s21:=df(q2,p1);

S21 := P0*(DF(Y2,P1)*F22(Y1,Y2) + DF(Y1,P1)*F21(Y1,Y2))

tt:=solve({s11,s21},{df(y1,p1),df(y2,p1)});

TT := {{DF(Y1,P1)=

                             F22(Y1,Y2)
           ------------------------------------------,
                                                    2
            P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)  )

        DF(Y2,P1)= -

                             F21(Y1,Y2)
           ------------------------------------------}}
                                                    2
            P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)  )

dy1dp1:=soln(tt,1);

                         F22(Y1,Y2)
DY1DP1 := ------------------------------------------
                                                  2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)  )
dy2dp1:=soln(tt,2);

DY2DP1 :=  -

                         F21(Y1,Y2)
          ------------------------------------------
                                                  2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)  )

let df(y1,p1)=dy1dp1,df(y2,p1)=dy2dp1;

s12:=df(q1,p2);

S12 := P0*(DF(Y2,P2)*F21(Y1,Y2) + DF(Y1,P2)*F11(Y1,Y2))

s22:=df(q2,p2);

S22 := DF(Y2,P2)*F22(Y1,Y2)*P0 + DF(Y1,P2)*F21(Y1,Y2)*P0 - 1

tt:=solve({s12,s22},{df(y1,p2),df(y2,p2)});
```

```
TT := {{DF(Y1,P2)= -

                                 F21(Y1,Y2)
               ------------------------------------------,
                                                           2
                 P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )

        DF(Y2,P2)=

                                 F11(Y1,Y2)
               ------------------------------------------}}
                                                           2
                 P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )

dy1dp2:=soln(tt,1);

DY1DP2 :=  -

                          F21(Y1,Y2)
        ------------------------------------------
                                                   2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )
dy2dp2:=soln(tt,2);

                          F11(Y1,Y2)
DY2DP2 := ------------------------------------------
                                                   2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )

let df(y1,p2)=dy1dp2,df(y2,p2)=dy2dp2;

% From the above, one sees that the following is positive;
dwdp0:=df(w,p0);

                                      2
DWDP0 :=  - (F22(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2)  - 2*F21(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)*F1

                                               2
            (Y1,Y2) + F11(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2) )/(P0*(F22(Y1,Y2)*

                                          2
             F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) ))

% This proves that supply function of profit-maximising firm(s) is;
% increasing w.r.t. product price.;
dwdp1:=df(w,p1);

DWDP1 :=

          F22(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)
        ------------------------------------------
                                                   2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )

dwdp2:=df(w,p2);

DWDP2 :=  -

          F21(Y1,Y2)*F1(Y1,Y2) - F11(Y1,Y2)*F2(Y1,Y2)
        ------------------------------------------
                                                   2
          P0*(F22(Y1,Y2)*F11(Y1,Y2) - F21(Y1,Y2) )
```

```
% Proposition:  The follwoing three are all zero.;
dwdp1 + dy1dp0;

0

dwdp2 + dy2dp0;

0

dy1dp2 - dy2dp1;

0

%
%% Next, the minimisation of cost;
% Cost function;
cost:=p1*x1+p2*x2;

COST := X2*P2 + X1*P1

%% First, firms minimise their production cost;
% The Lagrangian form is;
l2:=cost+r2*(z-f(x1,x2));

L2 :=  - (F(X1,X2)*R2 - Z*R2 - X2*P2 - X1*P1)

% The fisrt-order conditions are;
a1:=df(l2,x1);

A1 :=  - (F1(X1,X2)*R2 - P1)

a2:=df(l2,x2);

A2 :=  - (F2(X1,X2)*R2 - P2)

a3:=df(l2,r2);

A3 :=  - (F(X1,X2) - Z)

% These three as considered a1=0, a2=0, and a3=0 define demand
% functions of firms x1(z,p1,p2) and x2(z,p1,p2);
% r2() also depend on z, p1 and p2.;
% Now, let us check the second-order conditions;
g:= z - f(x1,x2)$

matrix hess2(3,3);

hess2:=mat(         (0,df(g,x1),df(g,x2)),
           (df(g,x1),df(l2,x1,2),df(l2,x1,x2)),
           (df(g,x2),df(l2,x2,x1),df(l2,x2,2)));

HESS2(1,1) := 0

HESS2(1,2) :=  - F1(X1,X2)

HESS2(1,3) :=  - F2(X1,X2)

HESS2(2,1) :=  - F1(X1,X2)
```

```
HESS2(2,2) :=  - F11(X1,X2)*R2

HESS2(2,3) :=  - F21(X1,X2)*R2

HESS2(3,1) :=  - F2(X1,X2)

HESS2(3,2) :=  - F21(X1,X2)*R2

HESS2(3,3) :=  - F22(X1,X2)*R2

hessc :={ det hess2 };

                                      2
HESSC := {R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*

                                                  2
              F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )}

hessc := hessc$

%% Second, comparative statics of demand functions
%   x1(z,p1,p2) and x2(z,p1,p2).;
depend x1,z,p1,p2;

depend x2,z,p1,p2;

depend r2,z,p1,p2;

b10:=df(a1,z);

B10 :=  - (DF(X2,Z)*F21(X1,X2)*R2 + DF(X1,Z)*F11(X1,X2)*R2 +

           DF(R2,Z)*F1(X1,X2))

b11:=df(a1,p1);

B11 :=  - (DF(X2,P1)*F21(X1,X2)*R2 + DF(X1,P1)*F11(X1,X2)*R2 +

            DF(R2,P1)*F1(X1,X2) - 1)

b12:=df(a1,p2);

B12 :=  - (DF(X2,P2)*F21(X1,X2)*R2 + DF(X1,P2)*F11(X1,X2)*R2 +

            DF(R2,P2)*F1(X1,X2))

b20:=df(a2,z);

B20 :=  - (DF(X2,Z)*F22(X1,X2)*R2 + DF(X1,Z)*F21(X1,X2)*R2 +

           DF(R2,Z)*F2(X1,X2))

b21:=df(a2,p1);

B21 :=  - (DF(X2,P1)*F22(X1,X2)*R2 + DF(X1,P1)*F21(X1,X2)*R2 +

            DF(R2,P1)*F2(X1,X2))

b22:=df(a2,p2);

B22 :=  - (DF(X2,P2)*F22(X1,X2)*R2 + DF(X1,P2)*F21(X1,X2)*R2 +

            DF(R2,P2)*F2(X1,X2) - 1)
```

```
b30:=df(a3,z);
B30 :=  - (DF(X2,Z)*F2(X1,X2) + DF(X1,Z)*F1(X1,X2) - 1)
b31:=df(a3,p1);
B31 :=  - (DF(X2,P1)*F2(X1,X2) + DF(X1,P1)*F1(X1,X2))
b32:=df(a3,p2);
B32 :=  - (DF(X2,P2)*F2(X1,X2) + DF(X1,P2)*F1(X1,X2))
tt:=solve({b10,b20,b30},{df(x1,z),df(x2,z),df(r2,z)});
TT := {{DF(X1,Z)=(F22(X1,X2)*F1(X1,X2) - F21(X1,X2)*F2(X1,X2))
                                            2
                 /(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,
                                                             2
                   X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ),
        DF(X2,Z)= - (F21(X1,X2)*F1(X1,X2) - F11(X1,X2)*F2(X1,
                                          2
                   X2))/(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)
                   *F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*
                                2
                   F2(X1,X2) ),
                                                             2
        DF(R2,Z)= - (R2*(F22(X1,X2)*F11(X1,X2) - F21(X1,X2) ))
                                            2
                 /(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,
                                                             2
                   X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )}}
dx1dz:=soln(tt,1);
DX1DZ := (F22(X1,X2)*F1(X1,X2) - F21(X1,X2)*F2(X1,X2))/(F22(X1
                              2
            ,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2)
                                      2
             + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )
dx2dz:=soln(tt,2);
DX2DZ :=  - (F21(X1,X2)*F1(X1,X2) - F11(X1,X2)*F2(X1,X2))/(F22
                                 2
            (X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,
                                         2
            X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )
```

```
dr2dz:=soln(tt,3);

                                                    2
DR2DZ :=  - (R2*(F22(X1,X2)*F11(X1,X2) - F21(X1,X2) ))/(F22(X1

                              2
               ,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2)

                                     2
               + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )

tt:=solve({b11,b21,b31},{df(x1,p1),df(x2,p1),df(r2,p1)});

                              2                              2
TT := {{DF(X1,P1)=F2(X1,X2) /(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*
                     F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(

                                         2
                     X1,X2)*F2(X1,X2) )),

        DF(X2,P1)= - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2))/(R2*(F22(X1,X2)*

                                  2
                     F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1

                                                  2
                     (X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) )),

        DF(R2,P1)=(F22(X1,X2)*F1(X1,X2) - F21(X1,X2)*F2(X1,X2)

                                         2
                  )/(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*
                  F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*

                              2
                  F2(X1,X2) )}}

dx1dp1:=soln(tt,1);

                      2                              2
DX1DP1 := F2(X1,X2) /(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)

                                                                 2
               *F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ))

dx2dp1:=soln(tt,2);

                                                                  2
DX2DP1 :=  - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2))/(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)
               - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2

                          2
               )*F2(X1,X2) ))

dr2dp1:=soln(tt,3);
```

```
DR2DP1 := (F22(X1,X2)*F1(X1,X2) - F21(X1,X2)*F2(X1,X2))/(F22(
                                  2
             X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,
                                                 2
             X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  )
tt:=solve({b12,b22,b32},{df(x1,p2),df(x2,p2),df(r2,p2)});
TT := {{DF(X1,P2)= - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2))/(R2*(F22(X1,X2)*
                                     2
                        F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1
                                                          2
                        (X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  )),
                             2                            2
        DF(X2,P2)=F1(X1,X2)  /(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*
                        F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(
                                        2
                        X1,X2)*F2(X1,X2)  )),
        DF(R2,P2)= - (F21(X1,X2)*F1(X1,X2) - F11(X1,X2)*F2(X1,
                                                2
                     X2))/(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2
                     )*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*
                                 2
                     F2(X1,X2)  )}}
dx1dp2:=soln(tt,1);
                                                              2
DX1DP2 :=  - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2))/(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)
                - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2
                          2
                )*F2(X1,X2)  ))
dx2dp2:=soln(tt,2);
                     2                              2
DX2DP2 := F1(X1,X2)  /(R2*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)
                                                              2
                *F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  ))
dr2dp2:=soln(tt,3);
DR2DP2 :=  - (F21(X1,X2)*F1(X1,X2) - F11(X1,X2)*F2(X1,X2))/(
                                     2
             F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*F1
                                               2
             (X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  )
```

```
% Eliminate r2 from the above;
tt:=solve(a1,r2);

                 P1
TT := {R2=-----------}
           F1(X1,X2)

algebraic procedure soln1 h;
   rhs first h;

SOLN1

r2 := soln1 (tt);

             P1
R2 := -----------
       F1(X1,X2)

dx1dp1;

           2                                          2
(F2(X1,X2) *F1(X1,X2))/(P1*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,

                                                      2
      X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ))

dx1dp2;

                        2                              2
 - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2) )/(P1*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(

                                                        2
      X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ))

dx2dp1;

                        2                              2
 - (F2(X1,X2)*F1(X1,X2) )/(P1*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(

                                                        2
      X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ))

dx2dp2;

          3                               2
F1(X1,X2) /(P1*(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21(X1,X2)*F2(X1,X2)

                                                2
                *F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2) ))

% These four, dx1dp1, dx2dp1, dx1dp2 and dx2dp2, give partial
% derivatives of demand functions for cost-minimising firm(s).;
% The first and the last prove that dx1/dp1, dx2/dp2 < 0;
% Proposition;
dx1dp2-dx2dp1;

0
```

```
% This proves that dxj/dpi = dxi/dpj;
%
% Since min(cost) is now obtained as a function of the production
% level z, firms have only to determine z so as to maximise profit.
% Profit is determined by;
profit := w*z - cost;

PROFIT := F(Y1,Y2)*Z - X2*P2 - X1*P1

% where w is the price of products.;
% The first order condition for profit maximisation is;
df(profit,z);

F(Y1,Y2) - DF(X2,Z)*P2 - DF(X1,Z)*P1

% should be zero.
let df(x1,z) = dx1dz, df(x2,z) = dx2dz;

ws;

                                      2
(F(Y1,Y2)*F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F(Y1,Y2)*F21(X1,X2)*F2(X1,

                                                    2
 X2)*F1(X1,X2) + F(Y1,Y2)*F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  - F22(X1,X2)*

 F1(X1,X2)*P1 + F21(X1,X2)*F2(X1,X2)*P1 + F21(X1,X2)*F1(X1,X2)

                                                           2
 *P2 - F11(X1,X2)*F2(X1,X2)*P2)/(F22(X1,X2)*F1(X1,X2)  - 2*F21

                                                           2
   (X1,X2)*F2(X1,X2)*F1(X1,X2) + F11(X1,X2)*F2(X1,X2)  )

% As easily seen, however, it is hard to derive the optimum level of z
% from this equation.
clear df(x1,z),df(x2,z);
%% Finally, comparison of the two cases;
% Proposition;
let x1=y1, x2=y2;

dy1dp0 - dx1dz*dwdp0;

0

dy2dp0 - dx2dz*dwdp0;

0

% Let us make use of the first order condition  q1=0;

tt:=solve(q1,f1(y1,y2));

                    P1
TT := {F1(Y1,Y2)=----}
                    P0

f1(y1,y2):=soln1(tt);

               P1
F1(Y1,Y2) := ----
               P0
```

```
% Theorem;
dy1dp1 - dx1dp1 - dx1dz*dwdp1;

0

dy2dp2 - dx2dp2 - dx2dz*dwdp2;

0

end;
```