Proceedings of the Risa Consortium
1997 pp. 43– pp. 51

有理関数補間の連続性の条件について

甲斐 博[*] 齋藤友克[†] 野田 松太郎[‡]
愛媛大学工学部 上智大学理工学部 愛媛大学工学部

(RECEIVED 1997/7/3 REVISED 1997/10/22)

1. はじめに

関数 $f(x) \in C[a,b]$ に対する有理関数補間は次のように計算される。$M+1$ の異なる点列 $a = x_0 < x_1 < \cdots x_M = b$ を与え、対応する $f(x_i), i = 0, \cdots, M$ を求める。得られたデータ列 $(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, M$ に対し、次の式を満たす有理関数 $r_{m,n}(x)$ を求める。

$$r_{m,n}(x_i) = \frac{p_m(x_i)}{q_n(x_i)} = f(x_i),\ i = 0, \cdots, M. \tag{1}$$

ここで多項式の添字は多項式の次数を表し、分子と分母の多項式の次数がそれぞれ m, n の場合、有理関数補間の次数は (m,n) と表す。また $[a,b]$ を補間区間と呼ぶ。

有理関数補間は $M = m+n$ として分子と分母の多項式を決定するが、この時の問題の一つとして、$f(x)$ が補間区間で連続であるにもかかわらず、(1) 式を満足する有理関数補間 $r_{m,n}(x)$ が補間区間で極を持つ場合がある。

我々は、連続な関数に対する有理関数補間を高次で求めた場合、鋭い極が補間区間内 $[a,b]$ に現れることを示した [6][7]。すなわち、有理関数補間の分母の多項式 $q_n(x)$ の零点の近くに分子の多項式 $p_m(x)$ の零点が現れる。連続関数を補間しているので、このような極は不必要な極である。我々は、有理関数補間に現れる不必要な極を、$p_m(x)$ と $q_n(x)$ の近似的 GCD を求めることにより、有理関数から取り除いた。その方法はハイブリッド有理関数近似 (以下、HRFA) として提案されている。

有理関数補間が不必要な極を持つ場合があることを実験的に示しているが、補間区間内の極がどのような関数あるいはデータ列に対して起こるか等の解析が重要である。本論では、

*kai@cs.ehime-u.ac.jp
†saito@mm.sophia.ac.jp
‡noda@cs.ehime-u.ac.jp

有理関数補間の補間区間内の極の問題を具体例によって示し、これを回避するための従来の方法を紹介する。さらに、それらの方法についての問題点も指摘する。また、有理関数補間の補間区間内の極の問題を回避するための方法として我々が提唱しているHRFAを紹介し、その有用性を示す。最後に、補間区間内の極の問題とHRFAの関係について考察を行う。

2. 有理関数補間の計算方法と問題について

(1) 式を、

$$f(x_i)q_n(x_i) - p_m(x_i) = 0$$

と表す。$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$と $q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$とおき、$b_n$を 1 とすると、次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned}
f(x_0)(b_{n-1}x_0^{n-1} + b_{n-2}x_0^{n-2} \cdots + b_0) - (a_m x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} \cdots + a_0) &= -f(x_0)x_0^n \\
f(x_1)(b_{n-1}x_1^{n-1} + b_{n-2}x_1^{n-2} \cdots + b_0) - (a_m x_1^m + a_{m-1}x_1^{m-1} \cdots + a_0) &= -f(x_1)x_1^n \\
&\cdots \\
f(x_M)(b_{n-1}x_M^{n-1} + b_{n-2}x_M^{n-2} \cdots + b_0) - (a_m x_M^m + a_{m-1}x_M^{m-1} \cdots a_0) &= -f(x_M)x_M^n
\end{aligned} \tag{2}$$

従って、有理関数補間の係数は (2) 式を解くことで決定できる。

しかし、(2) 式の解が (1) 式を満たさない場合や、(1) 式の有理関数補間が補間区間で極を持つ場合があることが示されている [1]。(2) 式の解が (1) 式を満たさない場合、有理関数補間は次のように到達不能点を持ち得る。次の例を考える。

例 1

次の点列を考える。

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = -2$$

これを、(2) 式を用いて解くと、

$$r_{1,1}(x) = \frac{x-2}{x-2},$$

になる。有理関数の分子と分母の多項式の共通因子を取り除くと $r_{0,0}(x) = 1$である。$r_{0,0}(x_2) \neq f_2$であり,f_2は到達不能点である。

このような到達不能点を持つデータ列についての考察は [5] で示している。

また、(1) 式の有理関数補間が補間区間で極を持つ場合として次の例があげられる。

例 2

$f(x) = e^x$に対して有理関数

$$r_{2,2}(x) = \frac{(x+5)^2}{(x-5)^2}$$

を考える。$r_{2,2}(x)$ は、

$$x_2 = 0, -x_1 = x_3 \in [3,4], -x_0 = x_4 \in (5,6)$$

において e^xを補間する有理関数である。しかし、$r_{2,2}(x)$ は $x = 5$ で極を持ち、補間の区間で $f(x)$ と性質が異なる。

以上のように、(2) 式を解く時、主に次の 2 つの問題がある。

問題 1 条件 (1) 式を満足する解が得られるとは限らない。

問題 2 $f(x)$ が $[a,b]$ の区間で連続であるにもかかわらず、条件 (1) 式を満足する有理関数補間 $r_{m,n}(x)$ が $[a,b]$ の区間で極を持ち得る。

問題 1 が起きるデータ点列の場合、有理関数補間は失敗する。これに対し、再帰的な手続きを用いて到達不能点のない有理関数補間が提案されている [2]。しかし、その方法を用いても問題 2 は残る。次に、Braess により示された、関数 $f(x)$ に対する (2) 式による有理関数補間の連続性の条件について示す。

3. 有理関数補間の連続性の条件

関数 $f(x)$ に対する有理関数補間の連続性について次の事実が知られている。$m+1-n \geq 0$ とし、$f(x) \in C^{m+n-1}[a,b]$ と仮定する。次の $M_{mn}(x,f)$ を考える。

$$M_{mn}(x,f) = \begin{pmatrix} D^{m-n+1}f & D^{m-n+2}f & \cdots & D^m f \\ D^{m-n+2}f & D^{m-n+3}f & \cdots & D^{m+1}f \\ & \cdots & & \\ D^m f & D^{m+1}f & \cdots & D^{m+n-1}f \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ここで、$D^k f = f^{(k)}(x)/k!$と定義する。その時、Braess によって次のことが示された [1]。

- $x \in [a,b]$ において $M_{mn}(x,f)$ が正定値ならば、$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+n-2} = b$ を補間する $r_{m-1,n-1}(x)$ は $[x_0, x_{m+n-2}]$ で連続である。

この条件を満足する例として次の例を示す。

例 3

関数 $f(x) = \log(x+2)$ の有理関数補間 $r_{1,1}(x)$ を求める事を考える。ここで、$m = 2, n = 2, x \in [-1, 1]$ とおいて、$M_{22}(x, \log(x+2))$ を求める。

$$M_{22}(x, \log(x+2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2} & -\frac{1}{2(x+2)^2} \\ -\frac{1}{2(x+2)^2} & \frac{1}{3(x+2)^3} \end{pmatrix}$$

この行列の固有値は、

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{3}{x+2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{3}{x+2}\right)^2 - \frac{3}{(x+2)^4}}\right\}$$

であり、$M_{22}(x, \log(x+2))$ は $x \in [-1, 1]$ では正定値である。従って、有理関数補間 $r_{1,1}(x)$ は $x \in [-1, 1]$ で連続である。例えば、

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = \log 2, f(x_2) = \log 3$$

を補間する有理関数は、

$$r_{1,1}(x) = \frac{\log 2 \log 3 (x+1)}{(2\log 2 - \log 3)x + \log 3}$$

である。従って、有理関数補間は

$$x = -\frac{\log 3}{2\log 2 - \log 3} \approx -3.8$$

に極を持つので、$[-1, 1]$ で極を持たない。

4. 補間区間に極を持たない有理関数補間

補間区間 $[a, b]$ に極を持たない有理関数近似の方法が提案されている [3]。基本的な考え方について示す。次の多項式を考える。

補題 1 (Berrut)

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = b$ を $M + 1$ 個の点とする。その時、

$$q_M(x) = l(x) \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k}{x - x_k}$$

は $\forall x \in R$ で零点を持たない。ここで $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_M)$ であり、R は実数を表す。

この多項式を分母の多項式とする有理関数補間を次のように得ることができる。

定理 2 (Berrut)

有理関数、

$$r_{M,M}(x) = \frac{l(x)\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k}{x-x_k}f_k}{l(x)\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k}{x-x_k}} = \frac{\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k}{x-x_k}f_k}{\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k}{x-x_k}} \tag{4}$$

は関数 $f(x)$ を $x_k, k=0,\cdots,M$ で補間し、実軸上で極を持たない。

5. Berrut による有理関数補間と HRFA との比較

実際に例題を用いて Berrut による有理関数補間 ((4) 式) による補間を求める。

例 4

$f(x) = x^2e^x$を考える。

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f(x_0) = \frac{1}{e}, f(x_1) = 0, f(x_2) = e$$

を与えた場合、

$$r_{2,2}(x) = \frac{(e+e^{-1})x^2 + (e-e^{-1})x}{x^2+1}$$

が得られる。極は補間区間上には現れない。

しかし次に示すように数値誤差が問題になる。

例えば、$f(x) = \sqrt{2+x}$を考える。次の 13 点を与えて補間を行う。

$$x_i = -1 + \frac{1}{6}i, i = 0, 1, \cdots, 12$$

但し、関数値 $f(x_i)$ は倍精度浮動小数による近似値を与える。(4) 式による有理関数補間は

$$r_{12,12}(x) = \frac{p_{12}(x)}{q_{12}(x)}$$

$$\begin{aligned}p_{12}(x) = {} & 5.70\times10^3x^{12} + 1.80\times10^3x^{11} - 7.75\times10^3x^{10} - 2.51\times10^3x^9 + 3.97\times10^3x^8 \\ & +1.27\times10^3x^7 - 7.46\times10^2x^6 - 2.51\times10^2x^5 + 82.5x^4 + 21.4x^3 + 6.64x^2 \\ & -0.0148x + 1.41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{12}(x) = {} & 4.20\times10^3x^{12} - 5.72\times10^3x^{10} + 2.93\times10^3x^8 - 5.51\times10^2x^6 + 6.03\times10^1x^4 \\ & +4.69x^2 + 1.00\end{aligned}$$

となる。(2) 式を用いた有理関数補間は、

$$r_{6,6}(x) = \frac{7.86\times10^{-5}x^6 + 0.00429x^5 + 0.0671x^4 + 0.452x^3 + 1.48x^2 + 2.33x + 1.41}{4.33\times10^{-6}x^6 + 0.000709x^5 + 0.0184x^4 + 0.173x^3 + 0.727x^2 + 1.40x + 1.00}$$

である。$r_{12,12}(x), r_{6,6}(x)$ は補間区間 $[-1,1]$ に極はない。次のように誤差を評価する。

$$||f(x) - r_{m,n}(x)|| = \frac{\sum_{i=0}^{99} |f(x_i) - r_{m,n}(x_i)|}{100}$$

但し、ここで $x_i = -1 + 2/99 \times i$ である。この時、誤差は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} (4)\text{ 式による補間} & ||f(x) - r_{12,12}(x)|| = 0.0123 \\ (2)\text{ 式による補間} & ||f(x) - r_{6,6}(x)|| = 4.21 \times 10^{-14} \end{array}$$

この場合、古典的な有理関数補間 ((2) 式による補間) の方が誤差が小さな有理関数近似が得られる。

しかし、有理関数補間は高次になると不必要な特異点を持つ。同様に$\sqrt{2+x}$を補間することを考える。次の 23 点を与えて補間を行う。

$$x_i = -1 + \frac{1}{11}i, i = 0, 1, \cdots, 22$$

(4) 式による有理関数近似は

$$\begin{aligned} r_{22,22}(x) &= \frac{p_{22}(x)}{q_{22}(x)} \\ p_{22}(x) &= 6.95 \times 10^7 x^{22} + 2.05 \times 10^7 x^{21} - 2.15 \times 10^8 x^{20} - 6.34 \times 10^7 x^{19} \\ &\quad +2.78 \times 10^8 x^{18} + 8.22 \times 10^7 x^{17} - 1.95 \times 10^8 x^{16} - 5.77 \times 10^7 x^{15} \\ &\quad +8.10 \times 10^7 x^{14} + 2.40 \times 10^7 x^{13} - 2.04 \times 10^7 x^{12} - 6.05 \times 10^6 x^{11} \\ &\quad +3.09 \times 10^6 x^{10} + 9.15 \times 10^5 x^9 - 2.66 \times 10^5 x^8 - 7.90 \times 10^4 x^7 \\ &\quad +1.23 \times 10^4 x^6 + 3.57 \times 10^3 x^5 - 1.52 \times 10^2 x^4 - 65.2 x^3 + 16.1 x^2 \\ &\quad +0.721 x + 1.41 \\ q_{22}(x) &= 5.11 \times 10^7 x^{22} - 1.58 \times 10^8 x^{20} + 2.04 \times 10^8 x^{18} - 1.43 \times 10^8 x^{16} \\ &\quad +5.95 \times 10^7 x^{14} - 1.50 \times 10^7 x^{12} + 2.27 \times 10^6 x^{10} - 1.95 \times 10^5 x^8 \\ &\quad +9.02 \times 10^3 x^6 - 1.14 \times 10^2 x^4 + 11.4 x^2 + 1.00 \end{aligned}$$

となる。この有理関数は実軸上に極を持たない。(2) 式を用いた有理関数補間は、

$$\begin{aligned} r_{11,11}(x) &= \frac{p_{11}(x)}{q_{11}(x)} \\ p_{11}(x) &= 0.00120 x^{11} + 0.0467 x^{10} + 0.437 x^9 + 0.908 x^8 \\ &\quad -3.49 x^7 - 10.4 x^6 + 17.4 x^5 + 57.5 x^4 \\ &\quad -8.60 x^3 - 59.9 x^2 + 14.6 x + 1.41 \end{aligned}$$

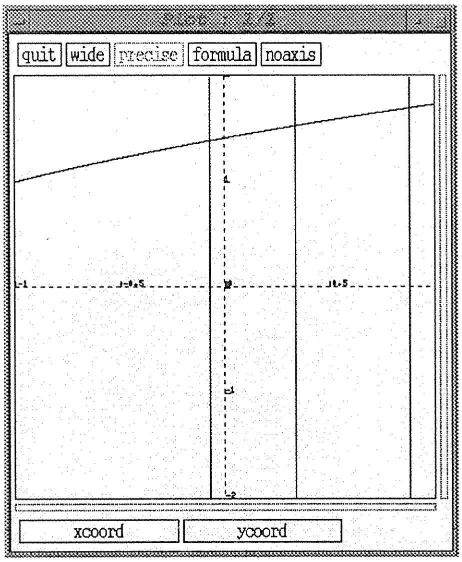

Fig. 1. Rational Interpolation $r_{11,11}(x)$

$$q_{11}(x) = 0.0000760x^{11} + 0.00924x^{10} + 0.158x^9$$
$$+0.665x^8 - 0.808x^7 - 7.19x^6 + 3.39x^5$$
$$+37.8x^4 + 5.43x^3 - 44.8x^2 + 10.1x + 1.00$$

ここで、$r_{11,11}(x)$ は、Fig.1 に示すように $x \approx 0.881, -0.0743, 0.338$ に不必要な極を持つ。近似的 GCD のパラメータの cutoff 値は実験的に $\epsilon = 10^{-3}$ とおく。HRFA を求めると有理関数補間に対し 3 次低い次の有理関数近似が得られる。

$$r_{8,8}(x) = \frac{p_8(x)}{q_8(x)}$$
$$p_8(x) = 0.0000266x^8 + 0.00106x^7 + 0.0109x^6 +$$
$$0.0323x^5 - 0.0426x^4 - 0.286x^3 + 0.0660x^2 +$$
$$1.41x + 1.41$$
$$q_8(x) = 1.68 \times 10^{-6}x^8 + 0.000206x^7$$
$$+0.00372x^6 + 0.0189x^5 + 0.00301x^4 - 0.160x^3$$
$$-0.109x^2 + 0.746x + 1.00$$

得られた $r_{8,8}(x)$ は Fig.2 に示すように補間区間に極を持たない。しかし、近似的 GCD によるずれが関数値との間に生じる。この場合、最大のずれは、$\max_i |f(x_i) - r_{8,8}(x_i)| = 1.11 \times 10^{-14}$ である。

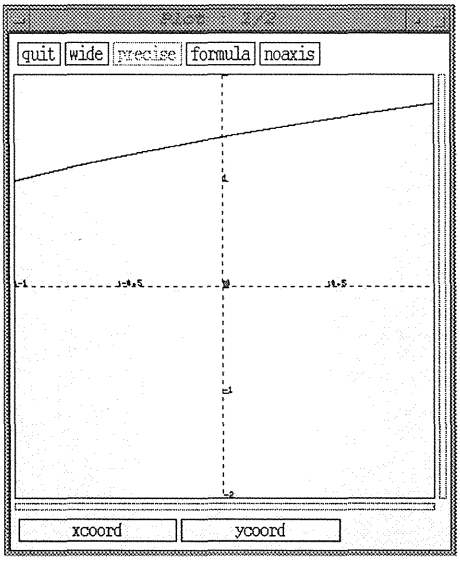

Fig. 2. HRFA $r_{8,8}(x)$

各近似に対し誤差を評価する。

$$\begin{array}{cr} \text{(4) 式による補間} & ||f(x) - r_{22,22}(x)|| = 0.00668 \\ \text{(2) 式による補間} & ||f(x) - r_{11,11}(x)|| = 4.11 \times 10^{-15} \\ \text{HRFA} & ||f(x) - r_{8,8}(x)|| = 8.75 \times 10^{-15} \end{array}$$

古典的な有理関数補間 ((2) 式による補間) の誤差が最も小さいが、補間区間内に極を持つ。それに対し、HRFA が次数の低い連続な近似を与える。

Berrut は、三角関数を用いた有理関数補間により、(4) 式の数値誤差に対する改良を加えている [3]。しかし、数値数式融合計算を考えた場合、高次の多項式や三角関数等を含んだ数式を扱うことは実用上困難である。

また、補間の重みに関するノルムを最小にすることで (4) 式の数値誤差の改良が考えられているが、例として Runge の関数等により与えられるデータ列の場合、大きな改善は得られていない [4]。一方、我々の HRFA による方法はそのような場合でも次数の低い高精度な近似を与えるという利点がある [8]。

但し、例題では等間隔の点を補間したが、例えば補間する点としてチェビシェフの多項式の零点を考える場合、Berrut による有理関数補間 [3] により高精度な近似を求める事ができることを付記する。

6. まとめとHRFAにおける連続性の条件の考察

本論では、有理関数補間が補間区間で極を持つ問題に対し、従来提案されている方法とその問題点を述べた。古典的な有理関数補間に対し、有理関数補間が補間区間で極を持たない条件を与えている [1]。しかし、条件が満たされない場合は有理関数補間が補間区間内に極を持つ可能性がある。Berrut による有理関数補間 [3] は実軸上で極を持たないことが保証されているが、数値誤差が問題とされている。これに対し、HRFA は、離散データ近似の一手法として、次数の低い高精度の近似を与えることを示した。

HRFA では不必要な極を取り除いた結果、関数値と HRFA の値にずれを生じるが、得られる近似は補間区間において連続になる。つまり、ずれを各点に与えると有理関数近似の連続性が保証できる。そこで、

- 微小なずれδ_iを各 $f(x_i)$ に加えた時、どのようなδ_iを加えれば、$f(x_i)+\delta_i$の有理関数近似が連続になるか

の検討が課題として考えられる。

参考文献

[1] D. Braess, "Nonlinear Approximation Theory", Springer-Verlag, 1986.

[2] M.V. Barel and A. Bultheel, A new approach to the rational interpolation problem, J. Comp. Appl. Math., 32, pp.281-289, 1990.

[3] J.-P. Berrut, Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation, Comput. Math. Applic., 15, pp.1-16, 1988.

[4] J.-P. Berrut and H.D. Mittelmann, Lebesgue constant minimizing linear rational interpolation of continuous function over the interval, Comput. Math. Applic. 33, pp.77-86, 1997.

[5] 甲斐 博, 野田 松太郎, ハイブリッド有理関数近似とデータの平滑化, 日本応用数理学会論文誌, 3, pp.323-336, 1993.

[6] M.T. Noda, and E. Miyahiro, A Hybrid Approach for the Integration of a Rational Function, Jour. CAM, 40, pp.259-268, 1992.

[7] M.T. Noda, E. Miyahiro, and H. Kai, Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, in "Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII", eds. R. Vichnevetsky, D. Knight and G. Richter, IMACS, pp.565–571, 1992.

[8] 野田松太郎, 宮広栄一, 甲斐博, 近似的 GCD を用いた有理関数近似, 数理解析研究所講究録 787,150-162, 1992.

[9] T.J. Rivlin, "An Introduction to the Approximation of Functions", pp.120–141, Blaisdell Pub., 1969.