設備投資計算への永久年金の応用について

野　沢　孝之助

1

本稿は設備投資計算において，永久年金の概念を利用した場合について，考察しようとするものである。

これに関連のある次の論文の検討を含んでいる。

W. M. Harper: "Discounting to Eternity"
Management Accounting, Dec. 1970

2

投資額をC，そのn年後の残存価額をSとし，各年末の収益をそれぞれR_1, R_2, ……, R_n 各年末の操業費を E_1, E_2, ……, E_n とすると，その総利益の現価 G_n は，

$$G_n=\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t-(C-Sv^n)$$

となる。[1)]

従って，耐用年数が等しい2つ以上の設備について比較するときは，このG_n が大きいものほど有利と判定する。

しかし，耐用年数が異なるときは，年当りの利益で比較すればよい。

$$G_n(a_{\overline{n|}})^{-1}=\left\{\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t-(C-Sv^n)\right\}(a_{\overline{n|}})^{-1} \quad 2)$$

これはそれぞれ同様の条件において耐用年数の最小公倍数の期間にわたって使用するものと考えて，有利性を比較することと同様である。[3)]

〔例1〕 次の資料から，A，Bいずれを選択すべきか。

	A機械	B機械
購入原価	¥100,000	¥200,000
耐用年数	5か年	6か年
収　益(年)	¥200,000	¥240,000
操業費(年)	¥$(30,000+2,500\,t)$	¥$(30,000+2,000\,t)$
残存価額	¥ 10,000	¥ 10,000

ただし，収益と操業費は各年末に生じ，t は使用年数を示し，計算利率は年10%とする。

〔解〕

A機械　　$R_t=$¥200,000

t	E_t	R_t-E_t	v^t [4)]	$(R_t-E_t)v^t$	$\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t$
1	32,500	167,500	0.9091	152,270	152,270
2	35,000	165,000	0.8264	136,360	288,630
3	37,500	162,500	0.7513	122,090	410,720
4	40,000	160,000	0.6830	109,280	520,000
5	42,500	157,500	0.6209	97,790	617,790

(¥10未満4捨5入)

$$C-Sv^5=¥100,000-¥10,000\times0.6209=¥93,791$$

$$\left\{\sum_{t=1}^{5}(R_t-E_t)v^t-(C-Sv^5)\right\}(a_{\overline{5}|10\%})^{-1}$$

$$=(¥617,790-¥93,791)\times0.2638=¥138,230$$

(¥10未満4捨5入)

B機械　　$R_t=$¥240,000

t	R_t-E_t	v^t	$(R_t-E_t)v^t$	$\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t$
1	208,000	0.9091	189,090	189,090
2	206,000	0.8264	170,240	359,330
3	204,000	0.7513	153,270	512,600
4	202,000	0.6830	137,970	650,570
5	200,000	0.6209	124,180	774,750
6	198,000	0.5645	111,770	886,520

$$C-Sv^6=¥200,000-¥10,000\times0.5645=¥194,355$$

$$\left\{\sum_{t=1}^{6}(R_t-E_t)v^t-(C-Sv^6)\right\}(a_{\overline{6}|10\%})^{-1}$$

$$=(¥886,520-¥194,355)\times0.2296=¥158,920$$

$$G_A(a_{\overline{5}|})^{-1}<G_B(a_{\overline{6}|})^{-1}$$

であるから，B機械の方が有利と判定される。

〔参考〕

本問は R_t-E_t が等差数列をなしているから，

$$\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t=(R_1-E_1)a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i} \qquad 5)$$

ただし，Qは公差で，$a_{\overline{n}|}=\dfrac{1-v^n}{i}$ を示す。

A機械について，本式で計算すると，

$$¥167,500a_{\overline{5}|10\%}-¥2,500\times\frac{a_{\overline{5}|10\%}-5v^5}{0.1}$$

$$=¥167,500\times3.7908-¥2,500\times\frac{3.7908-5\times0.6209}{0.1}$$

$=¥617,800$ （前解との少差は，４捨５入による。）

また，前式を変形して，

$$(R_1-E_1)a_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-n(1-ia_{\overline{n}|})}{i}$$

$$=\left\{R_1-E_1+Q\left(\frac{1}{i}+n\right)\right\}a_{\overline{n}|}-\frac{nQ}{i}$$

本式によって，計算すると，

$$\left\{¥167,500-¥2,500\left(\frac{1}{0.1}+5\right)\right\}\times 3.7908+\frac{¥2,500\times 5}{0.1}$$

$$=¥617,800$$

B機械についても，同様に計算することができる。

3

前節における年当り利益の代わりに，永久に繰り返し使用するもの——永久年金——として G_∞ を比較しても，最小公倍数の考え方から見てよい筈である。

$$\sum_{t=1}^{n}(R_t-E_t)v^t-(C-Sv^n)=V_n$$

とおくと，（V_n は耐用年数 n の設備の第1世代の総利益の現価である。）

$$G_\infty=V_n(1+v^n+v^{2n}+\cdots\cdots)$$

$$=V_n\cdot\frac{1-v^\infty}{1-v^n}\qquad (v^\infty=0)$$

$$=\frac{V_n}{1-v^n}$$

前節の年当り利益は

$$G_n(a_{\overline{n|}})^{-1}=V_n(a_{\overline{n|}})^{-1}=V_n\cdot\frac{i}{1-v^n}$$

であるから，

$$G_\infty=\frac{G_n(a_{\overline{n|}})^{-1}}{i}$$

となるから，$G_n(a_{\overline{n|}})^{-1}$ を比較する代わりに，これを等しい $i\ (>0)$ で割った G_∞ の大小で比較しても同一結果が得られることは明らかである。

〔例1〕について，本法で比較してみよう。

A機械

$$V_A=¥617,790-¥93,791=¥523,999$$

$$G_{A,\infty}=\frac{¥523,999}{1-v^5}$$

$$=\frac{¥523,999}{1-0.6209}$$

$$=¥1,382,220$$

B機械

$$V_B=¥886,520-¥194,355=¥692,165$$

$$G_{B,\infty}=\frac{¥692,165}{1-v^6}$$

$$=\frac{¥692,165}{1-0.5645}$$

$$=¥1,589,360$$

$$G_{A,\infty} < G_{B,\infty}$$

と第2節と同一結果を得る。

4

第3節の考え方は，W. M. Harper 氏によるものであり，同氏は進んで，A，B二つの設備の耐用年数をそれぞれ，k，nとすると，($k<n$)

$$\frac{V_A}{1-v^k}\div\frac{V_B}{1-v^n} \gtrless 1$$

によって，判定しようとし，

$$\frac{V_A}{V_B}\cdot\frac{1-v^n}{1-v_k} \gtrless 1$$

と変形し，$\frac{1-v^n}{1-v_k}$ を Comparability factor といい，特別の数表を利用すると便利であるとしている。

すなわち，

$$V_A\times\text{Comparability factor} \gtrless V_B$$

とすると，

$V_A\times$Comparability factor $>$ V_B V_A が有利

$V_A\times$Comparability factor $<$ V_B V_B が有利

と判定する。

TABLE OF COMPARABILITY FACTORS—10% DISCOUNT RATE

		LONGER PROJECT (YRS)													
		15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
SHORTER PROJECT (YRS)	1	8.37	8.10	7.81	7.59	7.15	6.76	6.34	5.87	5.36	4.79	4.17	3.49	2.73	1.91
	2	4.38	4.24	4.09	3.93	3.74	3.54	3.32	3.07	2.80	2.51	2.18	1.83	1.43	1.00
	3	3.06	2.96	2.86	2.74	2.61	2.47	2.32	2.15	1.96	1.75	1.52	1.27	1.00	
	4	2.40	2.32	2.24	2.15	2.05	1.94	1.82	1.68	1.54	1.37	1.20	1.00		
	5	2.01	1.94	1.87	1.80	1.71	1.62	1.52	1.41	1.28	1.15	1.00			
	6	1.75	1.69	1.63	1.56	1.49	1.41	1.32	1.22	1.12	1.00				
	7	1.56	1.51	1.46	1.40	1.33	1.26	1.18	1.10	1.00					
	8	1.43	1.38	1.33	1.28	1.22	1.15	1.08	1.00						
	9	1.32	1.28	1.23	1.18	1.13	1.07	1.00							
	10	1.24	1.20	1.16	1.11	1.06	1.00								
	11	1.17	1.13	1.09	1.05	1.00									
	12	1.12	1.08	1.04	1.00										
	13	1.07	1.04	1.00											
	14	1.03	1.00												

〔例1〕について，Comparability factor の数表を利用してみよう。

$$V_A=¥523,999$$

$$V_B=¥692,165$$

$$\frac{1-v^6}{1-v^5}=1.15 \qquad (\text{数表から})$$

$$V_A\times 1.15=¥602,598$$

$$V_A\times 1.15 < ¥692,165$$

B機械の方が有利である。

しかし，Comparability factor は，必ずしも永久使用を考えなくとも，従来の年当り利益の比較においても考えられるものである。

すなわち，

$$V_A(a_{\overline{k}|})^{-1} \gtrless V_B(a_{\overline{n}|})^{-1}$$

$$V_A\cdot\frac{i}{1-v^k} \gtrless V_B\cdot\frac{i}{1-v^n}$$

$$V_A\cdot\frac{i}{1-v^k}\cdot\frac{1-v^n}{i} \gtrless V_B$$

$$V_A\cdot\frac{1-v^n}{1-v^k} \gtrless V_B$$

となる。

5

次に最適使用年数を求める問題に，永久使用を考えてみよう。

設備原価をC，その残存価額をSとすると，これをn年間使用すれば，年平均費用は，

$$(C-Sv^n)(a_{\overline{n}|})^{-1} \qquad (1)$$

である。この値は，nが大きくなればすなわち長く使用すればするほど小となることは明らかである。

ところが，一方に操業費用はふつう時の経過とともに修繕費などは多額に要するので増加する傾向にある。これを各年末にそれぞれ E_1，E_2，……，E_n を

要するものとすると，その年平均費用は，次のようであって，ふつうnが大きくなればなるほど大となる傾向にある。

$$(a_{\overline{n|}})^{-1}\cdot\sum_{t=1}^{n} E_t v^t \qquad (2)$$

(1)と(2)の和A（平均原価）が最小となるようなnを求め，この年数使用するのが経済的に最も有利である。この値を最適使用年数 optimum life といい，このとき設備を更新すればよい。

$$A=\left(C-Sv^n+\sum_{t=1}^{n} E_t v^t\right)\left(a_{\overline{n|}}\right)^{-1}$$

これが従来の算法である。

〔例2〕 購入原価 ¥100, 000 残存率（原価に対する割合）$S_t=(1-0.2)^t$ で，操業費用は各年末に $E_t=¥10,000+¥4,000(t-1)$ とすれば，最適使用年数は何年か。ただし，tは使用年数とし，計算利子率は年10%とする。

〔解〕

t	(1) $E_t v^t$	(2) $\sum_{t=1}^{n} E_t v^t$	(3) $S_t v^t$	(4) $C(1-S_t v^t)+\sum_{t=1}^{n} E_t v^t$	(5) (4)×$(a_{\overline{t|}})^{-1}$
1	9, 090	9, 090	0. 7273	36, 360	40, 000
2	11, 570	20, 660	0. 5289	67, 770	39, 050
3	13, 520	34, 180	0. 3847	95, 710	38, 480
4	15, 030	49, 210	0. 2798	121, 230	38, 248
5	16, 140	65, 350	0. 2035	145, 000	38, 251
6	16, 940	82, 290	0. 1480	167, 490	38, 460

最適使用年数　　4か年

本例に，永久使用の考えを採り入れると，

$$\left(C-Sv^n+\sum_{t=1}^{n} E_t v^t\right)\frac{1}{1-v^n}$$

となって，前解に比べると，同一のiで割った数で比較するものであるから，結果は同一となることは，下表のように明らかである。

t	(4) $C(1-S_t v^t)+\sum_{t=1}^{n} E_t v^t$	(5) $(4)/(1-v^t)$
1	36, 360	399, 960
2	67, 770	390, 380
3	95, 710	384, 840
4	121, 230	382, 430
5	145, 000	382, 480
6	167, 490	384, 590

6

前節までの計算で知られるように，設備投資の計算に永久年金を利用することは，理論的には成立するけれども，必ずしも計算を簡便にするものではないようである。ただ，Comparability factor の数表は，あれば比較計算を稍々簡便にすることは可能であろう。

注

1) R_t-E_t を報収 return, v^t を現価係数ということもある。(JIS Z8121 による用語)
拙著：「経営財務の数学」p. 128 参照
$v^t=(1+i)^{-t}$　　i は利率，t は年数
この数値を表にしたものを複利現価表という。

2) $G_n(a_{\overline{n|}})^{-1}$ を年金換算値，$(a_{\overline{n|}})^{-1}$ を資本回収係数ということもある。(前掲 JIS)
$(a_{\overline{n|}})^{-1}=\frac{i}{1-v^n}$　この数値を表にしたものを，賦金表という。

3) 拙著：前掲書 p. 129 脚注，pp. 136/7 参照

4) 一般に有効数字3桁あれば充分とされている。(拙著：前掲書 p. 132 参照)

5) 拙著：前掲書 p. 18 参照