イタリアにおける数種の「財務数学」書について

野沢孝之助

まえがき

本稿は，次の4冊の書籍について，その大要を紹介し，わが国の例に比較して若干の吟味を行なおうとするものである。

(1) Walter Monina: Matematica Finanziaria, Cetim Bresso, 1966（うち第2編）

(2) G. San Giuseppe: Matematica Finanziaria, Cetim Bresso, 1970

(3) Renato Bonadonna: Esercizi Svoliti e da Svolgere di Matematica Finanziaria Attuariale e Aziendale, Cetim Bresso, 1971（うち第1編，第2編）

(4) Clemente Bonfigli: Tavole Logaritmiche, Aritmetiche e Finanziarie, Ulrico Hoepli, 1963（うち金利計算表とその解説）

語学の障壁のため意外の誤解があることを恐れるものであるが，この種のものがわが国において見受けないように思われるので，何等かのご参考になるのではないかと思い，あえて発表する次第である。

なお，これらの書籍は，筆者が本学の海外研修を命ぜられヨーロッパへ旅行した際に購入したものであることを付記する。

1．

まず，(1)〜(3)の書籍の章別と体裁を述べておく。(4)については第6節に譲る。

(1) 第1編

第1章　対　数

第2章　指数と対数

第3章　組み合せ

第2編

第1章　単利法

第2章　複利法

第3章　複利年金

第4章　割賦償還

第5章　債　券

B6変型で，第2編については pp. 91/314 の 224 ページである。各章に豊富な算例を付し，練習問題（解答あり）は各章別に与えられ，その総数は 75 題である。

(2) Istituti Tecnici Commerciali 用で，B6変型で 259 ページで，次のような章別になっている。

第1章　単利終価と現価

第2章　複利終価と現価

第3章　単利年金・複利年金

第4章　割賦償還（複利）

第5章　債　券

各章に豊富な算例があり，末尾に 190 題の練習問題（解答なし）を付したよくまとまった本である。算式に誤植が目立つことがおしまれる。

(3) A5変型で，公式集，算例，練習問題を示すもので，第1編，第2編は pp. 1/84 の 84ページで，次のようになっている。

第1編　資本の性質と割賦償還

第2編　償券の償還

練習問題（解答あり）は，総数13題である。

以下(2)を中心に内容を紹介し，若干の吟味を行なう。

2

	(1)	(2)	(3)
年金現価	$a_{\overline{n}\vert}=\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$ [p. 174]	(1)に同じ [p. 86]	――――
	$a_{\overline{n}\vert}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ [p. 175]	――――	(1)に同じ [p. 34]

記号については，主として日本商業数学会制定[1]のものに書き換えたことを諒承せられたい。以下も同様である。

i ……利率（年）　n ……期数（年）

年金現価は，毎期末1あて支払われる年金の現在価値を示す。

わが国の財務数学では，$a_{\overline{n}|}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ を用い，これを年金現価率という。しかし，JIS（Z 8121）では，$\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$ を用い，これを年金現価係数といっている[2]。Engineering Economy（EE）あるいは Industrial Engineering（IE）では，これに従う。数値計算には数表を利用するから問題はないが，公式としては $a_{\overline{n}|}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ の方がよいのではないか。

	(1)	(2)	(3)
賦　金	――――	$(a_{\overline{n}\vert})^{-1}=\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$ [p. 99]	――――
	$(a_{\overline{n}\vert})^{-1}=\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ [p. 189]	――――	(1)に同じ [p. 34]

賦金率 $(a_{\overline{n}|})^{-1}$ は年金現価率の逆数であるから，前述の年金現価率に準ずる。

	(1)	(2)	(3)
据置年金現価	$m\vert a_{\overline{n}\vert}=(1+i)^{-m}a_{\overline{n}\vert}$ [p. 182]	$m\vert a_{\overline{n}\vert}=\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^{m+n}}=(1+i)^{-m}a_{\overline{n}\vert}$ [p. 117]	――――

nは年金の支払期間，mは据置期間（年金は支払われない）を示す。

わが国の財務数学では，上記公式のほかに，

$$m|a_{\overline{n}|}=a_{\overline{m+n}|}-a_{\overline{m}|}$$

を示しているが，上記3書ともこれを示していない。数値計算にはこの方が簡便であるから，是非補充する必要があろう。

また，上記3書には，

利　力

年p回払年金（および，連続年金）

が全然取り扱われていない。この種の計算が経営計算において用いられる現状[3]においては触れる必要があるのではないか。

利力は年利率を瞬間ごとに切替えて計算した利率であり，連続払年金は瞬間ごとに年金が支払われるものである。

3

変額年金

等差数列をなす

年金現価	(1)	(2)	(3)
	$Ra_{\overline{n}|}+Q\cdot\dfrac{a_{\overline{n}|}-n(1+i)^{-n}}{i}$	―――	―――

R……第1期年金　[p. 211]

Q……公　差

等比数列をなす

年金現価	(1)	(2)	(3)
	$R\cdot\dfrac{1-r^n(1+i)^{-n}}{1+i-r}$	―――	―――

R……第1期年金　ただし，$1+i\neq r$

r……公　比　[p. 209]

変額年金は，経営計算（たとえば MAPI[4]）で利用されるので，(2)，(3)においても触れておくことが必要であろう。

4

	(1)	(2)	(3)
債券価格	$A=C\{ga_{\overline{n}\vert}+(1+i)^{-n}\}$ [p. 251]	(1)に同じ [p. 158]	――――

C……額面金額　　g……債券利率

わが国では，上記公式のほかに，

$$A=C\{1-(i-g)a_{\overline{n}|}\}$$

の式を用いているが，３書ともこれを示していない。

下式は，

$i>g$　のとき　$D=(i-g)a_{\overline{n}|}$　　割引高

$i<g$　のとき　$P=(g-i)a_{\overline{n}|}$　　打歩高

の関係を明らかにし，また，債券の価格が $a_{\overline{n}|}$ 表だけで計算できるので，この変形式は是非補充すべきである。

次に，債券を全期間にわたって毎期に，

(a)　元金を等額償還する場合

(b)　元利合計を等額償還する場合

における公式を示している。

	(1)	(2)	(3)
(a)	――――	$A=\frac{C}{N}\left\{\frac{g}{i}\cdot n+\left(1-\frac{g}{i}\right)a_{\overline{n}\vert}\right\}$ [p. 160]	――――
(b)	$A=C(a_{\overline{N}\vert g})^{-1}a_{\overline{n}\vert}$ [p. 252]	(1)に同じ [p. 162]	(1)に同じ [p. 15]

N……債券の全期間　　$a_{\overline{n}|g}=\frac{1-(1+g)^{-N}}{g}$

n……評価時から償還時までの年数

わが国では，この実例が殆んどないから，取り扱われることは稀である(5)。

また，(b)の場合において，償還金額の額面金額に対する端数の取り扱いにつ

いても触れている。(たとえば，(2)の pp. 184/91)

なお，打歩償還および発行費用，利払手数料，償還手数料を考慮した場合について示している。(たとえば，(2)の pp. 204/24) 打歩償還についてはわが国にその例はないが，発行費用，利払手数料，償還手数料については，広く行なわれているのであるが計算例まで示されることが稀であるから，以下わが例に引直して紹介しよう。

いま，債券利率年gの2期払，m年据置，その後$(n-m)$年に毎期元金をRあて利払期に償還し，最後に残額を償還する。

発行にあたって要する費用をE，その後毎期に信託手数料 r_1，利払手数料 r_3 を要し，元金償還のとき償還手数料 r_2 を必要とする。r_1, r_2 は額面金額に対し，r_3 は利息金額に対して計算される。

発行価格をA，額面金額をCとして，公式を作ってみると，次のようである。

$$\frac{A-E}{1+r_2}=C\left\{1-(i-h)\,a_{\overline{2n}|}\right\}+\frac{R(i-h)}{i}\left[\{1+2(n-m)i\}a_{\overline{2n}|}-a_{\overline{2m}|}\right.$$
$$\left.-2(n-m)\right] \quad (6)$$

ただし，
$$h=\frac{r_1+\dfrac{g(1+r_3)}{2}}{1+r_2}$$

〔例〕 7.5 分利付2期払社債額面総額1億円，発行価格は額面金額 ¥100 につき ¥97.50 期限7年（うち2年据置），毎利払期に200万円あて償還し，残額は最終期に償還，発行費用総額は280万円，信託手数料は 0.125%，償還手数料は 0.5%，利払手数料は 1.3% とする。

$$94.2289=100\{1-(i-0.0390\ 4229)a_{\overline{14}|}\}$$
$$+\frac{2}{i}(i-0.0390\ 4229)\left[(1+10i)a_{\overline{14}|}-a_{\overline{4}|}-10\right]$$

$i=4.5\%$ で右辺を試算すると， 94.2367

$i=4.6\%$ で右辺を試算すると， 93.3112

ゆえに，一次補間法によって，

$$4.5\%+0.1\%\times\frac{94.2289-94.2367}{93.3112-94.2367}=\underline{\underline{4.5008\ 4\%}}$$

計算表を示すと，次表のようである。

期	(1) 期首帳簿価額	(2) 利回り利息 (1)×0.0450084	(3) 社債額面	(4) 社債利息 (3)×0.0375	(5) 利払手数料 (4)×0.013	(6) 信託手数料 (3)×0.00125	(7) 社債償還高	(8) 償還手数料 (7)×0.005	(9) 割引償却高 (2)−{(4)+(5)+(6)+(8)}
1	94,700,000	4,262,295	100,000,000	3,750,000	48.750	125,000			338,545
2	95,038,545	4,277,533	100,000,000	3,750,000	48,750	125,000			353,783
3	95,392,328	4,293,456	100,000,000	3,750,000	48,750	125,000			369,706
4	95,762,034	4,310,096	100,000,000	3,750,000	48,750	125,000			386,346
5	96,148,380	4,327,485	100,000,000	3,750,000	48,750	125,000	2,000,000	10,000	393,735
6	94,542,115	4,255,189	98,000,000	3,675,000	47,775	122,500	2,000,000	10,000	399,914
7	92,942,029	4,183,172	96,000,000	3,600,000	46,800	120,000	2,000,000	10,000	406,372
8	91,348,401	4,111,445	94,000,000	3,525,000	45,825	117,500	2,000,000	10,000	413,120
9	89,761,521	4,040,022	92,000,000	3,450,000	44,850	115,000	2,000,000	10,000	420,172
10	88,181,693	3,968,917	90,000,000	3,375,000	43,875	112,500	2,000,000	10,000	427,542
11	86,609,235	3,898,143	88,000,000	3,300,000	42,900	110,000	2,000,000	10,000	435,243
12	85,044,478	3,827,716	86,000,000	3,225,000	41,925	107,500	2,000,000	10,000	443,291
13	83,487,769	3,757,651	84,000,000	3,150,000	40,950	105,000	2,000,000	10,000	451,701
14	81,939,470	*3,688,005	82,000,000	3,075,000	39,975	102,500	82,000,000	410,000	60,530
計	—	57,201,125	—	49,125,000	638,625	1,637,500	100,000,000	500,000	5,300,000

* ¥41 調整

（参考） 第6期首帳簿価額＝第5期首帳簿価額＋第5期割引償却高－第5期社債償還高

5

3書の計算には，金利計算表が利用されていることは算例を見れば明らかであるが，いずれにも付録表はなく，また，利用した金利計算表の名を示されていない。(2)，(3)書は小数8桁(1)書は小数6桁を用いられている。これは付録表を付けるか，利用した数表名を記載されることが望ましい。なお，金利計算表を利用するとき，必要によって一次補間法が用いられている。

6

(4)書第3編の内容は次のようである。

表の種類		i (%)	p	小数位の桁数
i	$(1+i)^{\frac{1}{p}}-1$	$2\left(\frac{1}{2}\right)8$	2, 3, 4, 6, 12, 360, 365	6
ii	$j_{(p)}=p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}$	〃	2, 3, , 4, 6, 12, 52, ∞	5
iii	$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1$	$2\left(\frac{1}{2}\right)7$	2, 4, 12, 52	6
iv	$\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}{i}$	$2\left(\frac{1}{2}\right)7\frac{1}{2}$	2, 3, 4, 6, 12	6

i 欄　$2\left(\frac{1}{2}\right)8$ は，2％～8％ $\left(\frac{1}{2}\%\ 刻み\right)$ の意

v	対数表	10001～11009	6

表の種類		i (%)	n 期	小数位の桁数
vi	$(1+i)^n$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)7\frac{1}{2}$	1(1)100	8
vii	v^n	〃	〃	〃
viii	$s_{\overline{n}\rceil}$	〃	〃	〃

ix	$a_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)7\frac{1}{2}$	1(1)100	8
x	$(a_{\overline{n}\rceil})^{-1}$	〃	〃	〃
xi	$\log(1+i)^n$	〃	〃	5
xii	$\log a_{\overline{n}\rceil}$	〃	〃	〃

n 期欄は　1(1)100 は1期～100期（1期刻み）の意

i 表と ii 表は重複の嫌いがあり，わが国では i 表は省略されている。

iv 表はわが国では実用性が低いので掲げるものはない。

xi 表と xii 表は対数計算による場合には便利であるが，わが国においては付記するものはない(7)。

7

以上4書について，大要（ただし，単利を除く）を紹介したが，明らかにこれらは狭義の財務数学に限定されている。

しかし，筆者は財務数学は応用計算として経営計算に及ぼすことが是非必要であると常に考えている者であるが(8)，この点から見ればこれら(1)～(3)の3書は従来の型のままであり，また(4)表においては高利率の表が必要であり(9)，あき足らない感が深い。アメリカに於ては財務数学の対象範囲拡大化の動きが感ぜられるが，イタリアにおいてこの動きにいかに対処しようとしているのであろうか。今後の研究に期待して筆をおく。　（昭和46年12月12日稿）

注

(1) 商業数学会誌　第4号　1961 参照。

(2) 拙著：経営財務の数学―新会計数理　p. 129 脚注参照。

(3) 拙著：前掲書　pp. 175/8 参照。

(4) 拙著：前掲書　pp. 140/50 参照。

(5) 小幡孫二：改訂版　経営の数学　pp. 112/5 には論ぜられている。

(6) 本文の公式は新しく作ったものであるが，佐藤信吉教授は，次の公式を与えている。（新版会計学ハンドブック p. 1042 参照）

$$A-E=C(1+r_2)-k[[Ci-R\{2(n-m)i+1\}]a_{\overline{2n}|}+R\{a_{\overline{2m}|}+2(n-m)\}]$$

ただし，$k=1+r_2-\dfrac{r_1+\dfrac{g(1+r_3)}{2}}{i}$

比較するために，本文の例は上書と同一の数字を用いた。

ただし，同教授は計算表は示していない。

(7) 次の書には，これを付記していることを参考に記しておく。

Glover, J. W.: Compound Interest and Insurance Tables and Seven Place Logarithms, 2/e '66.

(8) 拙著：前掲書は，この構想によって書いたものである。

(9) 拙著：前掲書 pp. 131/2 を参照せられたい。