投資計算における用語・記号，金利計算表とその節略化について

野　沢　孝之助

まえがき

まず，投資計画計算において用いられる用語・記号について述べる。これらは，統一されているとつごうがよいことはいうまでもないことである。しかし，現実は大きく二系統の記号が利用されている実状である。

次に，金利計算表について考える。これは複利計算が利用されるようになって，その必要が生じ，現在までに主要なものだけでも十指を超える。本稿ではその略史を語り，現在入手可能の範囲で，代表的な一般性のあるものの概要一覧表を掲げる。

最後に，金利計算表は将来どうあるべきかについて，私見を述べんとするものである。

1. 用語と記号

(1) 日本商業数学会（現，日本経営数学会）は，次の用語と記号を制定している(注1)。これは，萬国アクチュアリー協会制定に従うものである。以下これを「アクチュアリー系」と呼ぶことにする。

第1表

用語	対応英語	式・記号
複利終価率	compound amount factor	$(1+i)^n$
複利現価率	discount factor	$(1+i)^{-n}=v^n$
年金終価率	——	$\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_{\overline{n}\rvert i}$
年金現価率	——	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=a_{\overline{n}\rvert i}$
賦金率	amortization factor	$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}=(a_{\overline{n}\rvert i})^{-1}$
減債基金率	sinking fund factor	$\frac{i}{(1+i)^n-1}=(s_{\overline{n}\rvert i})^{-1}$

第1表と同一系統の記号とは考えられるが，一部異なるものが利用されることがある。

〔1〕欄 $S_{\overline{n}|}$ は，第1表の $S_{\overline{n}|}$ とは，表現しているものが異なる。

$a_{\overline{n}|}$, $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ は，いずれも期末払を示している。(この記号は，かって萬国アクチュアリー協会では，期首払として用いられたものであって，現在は，期首払は $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $(\ddot{a}_{\overline{n}|})^{-1}$ が用いられる。)

第2表

第1表	〔1〕[2]
$(1+i)^n$	$S_{\overline{n}|}$
v^n	$A_{\overline{n}|}$
$S_{\overline{n}|i}$	—
$a_{\overline{n}|i}$	$a_{\overline{n}|}$
$(a_{\overline{n}|i})^{-1}$	$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$
$(S_{\overline{n}|i})^{-2}$	—

(2)　JISおよびアメリカ工学教育協会は，次の用語と記号を制定している。以下これを「経営工学系」と呼ぶことにする。

第3表

用　語	対応英語	式[3]	記　号[4]
終価係数	future worth factor	$(1+i)^n$	F/P, i, n
現価係数	present worth factor	$\frac{1}{(1+i)^n}$	P/F, i, n
年金終価係数	uniform series future worth factor	$\frac{(1+i)^n-1}{i}$	F/A, i, n
年金現価係数	uniform series present worth factor	$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	P/A, i, n
資本回収係数	capital recovery factor	$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	A/P, i, n
減債基金係数	sinking fund factor	$\frac{i}{(1+i)^n-1}$	A/F, i, n

なお，二系統の記号と異なるものに，次のようなものがある。

第4表

用　語[5]	記　号		
	〔1〕[6]	〔2〕[7]	〔8〕[8]
single payment compound amount factor	SPCAF	DFF (i, n)	AuF
single payment present worth factor	SPPWF	DFF $(i, -n)$	AbF
uniform series compound amount factor	USCAF	CAF (i, n)	EwF
uniform series present worth factor	USPWF	PWF (i, n)	DsF
capital recovery factor	CRF	—	KwF
sinking fund factor	SFDF	—	RuF

2.　利力と連続年金

(1)　利力を用いる場合について述べる。

利力とは，瞬間切替の利率であって，δ で示す。

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{j\infty}=e^{\delta}$$

従って，i の場合は

$$(1+i)=e^{\delta}$$

$$\therefore\quad \delta=\ln(1+i)\qquad \ln \text{は自然対数}$$

第5表

用　語	式[9]	記号	
		アクチュアリー系	経営工学系
複利終価率	$e^{\delta n}$	$e^{\delta n}$	F/P, δ, n
複利現価率	$e^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$	P/F, δ, n
年金終価率	$\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$	$S_{\overline{n}\vert\delta}$	F/A, δ, n
年金現価率	$\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$	$a_{\overline{n}\vert\delta}$	P/A, δ, n
賦金率	$\frac{e^{\delta}-1}{1-e^{-\delta n}}$	$(a_{\overline{n}\vert\delta})^{-1}$	A/P, δ, n
減債基金率	$\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta n}-1}$	$(S_{\overline{n}\vert\delta})^{-1}$	A/F, δ, n

(2)　連続年金について考える。

投資計画計算において，収入または支出は必ずしも年末あるいは年首の一時点とせず，年間連続的に発生するものと仮定する方がより実状に近いものと考えられる。E.L. Grant は，年末仮定を end-of-year convention といい，連続仮定を uniform-flow convention と呼んでいる[10]。

利率 i による場合

第6表

用　語	式[11]	記号	
		アクチュアリー系	経営工学系
年金終価率	$\frac{(1+i)^{n}-1}{\delta}$	$\bar{S}_{\overline{n}\vert i}$	F/$\bar{\text{A}}$, i, n
年金現価率	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}$	$\bar{a}_{\overline{n}\vert i}$	P/$\bar{\text{A}}$, i, n
賦金率	$\frac{\delta}{1-(1+i)^{-n}}$	$(\bar{a}_{\overline{n}\vert i})^{-1}$	$\bar{\text{A}}$/P, i, n
減債基金率	$\frac{\delta}{(1+i)^{n}-1}$	$(\bar{S}_{\overline{n}\vert i})^{-1}$	$\bar{\text{A}}$/F, i, n

利率δによる場合

第7表

用語	式[12]	記号	
		アクチュアリー系	経営工学系
年金終価率	$\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$	$\bar{s}_{\overline{n}\rceil\delta}$	F/Ā, δ, n
年金現価率	$\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil\delta}$	P/Ā, δ, n
賦金率	$\frac{\delta}{1-e^{-\delta n}}$	$(\bar{a}_{\overline{n}\rceil\delta})^{-1}$	Ā/P, δ, n
減債基金率	$\frac{\delta}{e^{\delta n}-1}$	$(\bar{s}_{\overline{n}\rceil\delta})^{-1})$	Ā/F, δ, n

わが国に紹介されているＥＥ（Engineering Economy の略）における利息計算において，利子瞬間切替（利力）と連続支払との両概念が混乱しているものが見受けられることがある。これは外国書にもこの誤りを犯しているものがあり，これを無批判に紹介することによるものであろう[13]。

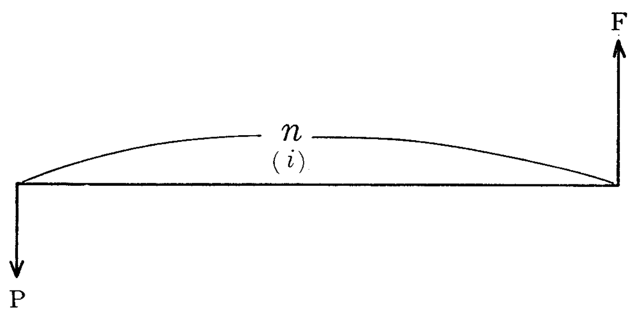
本来，利力と連続払とは別概念であり，また，利率切替と支払をともに１か年における回数を無限大とすることは勿論可能であり，その方が実状により近似する場合も考えられることは確かである。

3. 記号の吟味

アクチュアリー系記号は，古くから用いられているのでこれを省略し，経営工学系記号について吟味してみよう。

現価…Present Value　　終価…Future Value

の頭文字を採って，現価をＰ，終価をＦと示す。



第１図

第１図において，

Ｆを未知数とすると，

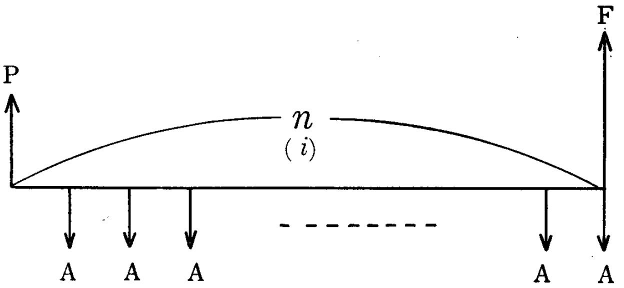
$$F=P(1+i)^n \qquad \therefore \quad F/P=(1+i)^n$$

Pを未知数とすると，

$$P = F(1+i)^{-n} \qquad \therefore \quad P/F = (1+i)^{-n}$$

となる。(矢印の上向き，下向きは，収支によって区別する。)

第2図（Aは年金額を示し，Annual rent の頭文字）において，



第2図

Fを未知数とすると，

$$F = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \therefore \quad F/A = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Pを未知数とすると，

$$P = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \therefore \quad P/A = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Pを既知，Aを未知数とすると，

$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \therefore \quad A/P = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Fを既知，Aを未知数とすると，

$$A = F \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \therefore \quad A/F = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

となる。

以上から記号として，左辺を示し，条件i，nを添記する方法を採ったものであろう。

$(F/P, i, n)$　と　$(P/F, i, n)$

$(F/A, i, n)$　と　$(A/F, i, n)$

$(P/A, i, n)$　と　$(A/P, i, n)$

は，それぞれ対応するものが逆数関係にあることも，明瞭に示されている。

なお，連続年金は，$\bar{A}$と頭部に線を入れて示す。

次に，据置年金現価と期首払年金現価の場合について考察する。

年金＼記号	アクチュアリー系	経営工学系
据置年金現価 (t 期据置)	$t\|a_{\overline{n}\|i}=(1+i)^{-t}\cdot a_{\overline{n}\|i}$ $=a_{\overline{t+n}\|i}-a_{\overline{t}\|i}$	特にないから， (P/F, i, t)(P/A, i, n) または， (P/A, i, $t+n$)−(P/A, i, t) としなければならない。
期首払年金現価	$\ddot{a}_{\overline{n}\|i}=(1+i)\cdot a_{\overline{n}\|i}$ $=a_{\overline{n-1}\|i}+1$	特にないから， (F/P, i, 1)(P/A, i, n) または， (P/A, i, $n-1$)+1 としなければならない。

結論としては，アクチュアリー系記号は，利率が見にくいこと，印刷が稍々むつかしいことの難点がある。この点経営工学系記号は優れているが，据置年金現価あるいは期首払の場合には不便である難点がある。従って，いずれとも優劣は決し兼ねるのである。

次節以下においては，早くより広く行れてきたアクチュアリー系記号に敬意を表して，これに従うこととする。

4.　金利計算表の略史[14)]

複利計算は，インドにおいては西暦1200年頃に既に知られていたようであるが，ヨーロッパでは14世紀に至って初めてイタリヤで行なわれたと思われる。しかし，15世紀から16世紀前半にかけて発行された算術書においては，複利計算に殆んど触れられていない。ただ，保険業・銀行業では，複利表を手書きの私表として利用されていた。初期（1340年頃）の表としては，Pegololtis 表がよく知られており，1472年にはコピーされて保存されるに至った。この表は，1($\frac{1}{2}$) 8%，1(1) 20年のものであった。(　) の中の数字は刻みを示す。

世界最初の印刷された金利計算表は，リヨンの数学教師 Jean Trenchant によって1558年に発行されたもののようであるが，内容の詳細は不明である。Simon Stevin (1548—1620) は，1582年に "Tafelen van interest……" を発行し，$(1+i)^{-n}$，$a_{\overline{n}|}$ を30期まで示した。(Simon Stevin は1585年に始めて小数を用いたといわれている)。

Richard Witt は，1613年に "Arithmetically questions touching the buying or exchange of annuities……" を発行し，5(1) 9%，1(1) 30期，特に，$6\frac{1}{4}$ %，10%については，年2回転化，年4回転化の $(1+i)^n$，$S_{\overline{n}|}$ 表を示した。

対数の発見（1614年スコットランドの貴族 John Napier〔1550—1617〕）は，天文学・複利計算の必要が誘因となったといわれている。複利計算に必要な公式の集成は，始めて William Oughred (1574—1660, イギリスの牧師) によって，1648年に行なわれた。また，H. Murai, E. Foerster らは，

割引率 d を利用した金利計算表を今世紀の初期に至って発表した。

その後，利率の範囲，期数は拡大され，利率の刻みは細分化される方向で漸進した。結果の桁数も 10 桁に及ぶものまで現われる至った。(ただし，20%を超える高利率は 4 桁程度が多い。) なお，海外では利率の刻みは，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$%，……；$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$%，…… といったものが殆んでであるが，次のものは例外ともいうべき少数例であろう。

A. Arnaudeau : Tables des Interêts Composés, Annuitiés et Amortissements, 1906年，$\frac{1}{10}$%

Credit Communal De Belgique : Tables d'intérêts et d'annuitiés 1950年，$\frac{1}{20}$%

未だ既刊の金利計算表の精密な一覧表は，研究されていない現状である。

5. 主要金利計算表

現在入手可能な金利計算表のうち，主要なものについて，その内容概要を示すと，次の諸表のようである[15]。

1. $(1+i)^n$，$(1+i)^{-n}$，$S_{\overline{n}|i}$，$a_{\overline{n}|i}$，$(a_{\overline{n}|i})^{-1}$

数表名	利率%(刻み)	期間(刻み)	小数桁数	備考
Violenine 表[16]	$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)15$	$3\frac{3}{8}$%以下1(1)100	8	$\begin{cases}(1+i)^{-n}\\ a_{\overline{n}\|i}\end{cases}$ は特に簡単
		$1\frac{7}{8}$% 〃 1(1)300		
		$2\frac{3}{8}$% 〃 1(1)200		
		$2\frac{1}{2}$%以上1(1)100		
Gushee 表[17]	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{48}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{96}\right)\frac{5}{6}$	1(1)360	10	$(S_{\overline{n}\|i})^{-1}$ を含む
	$\frac{27}{32}\left(\frac{1}{48};\frac{1}{96}\right)1\frac{1}{4}$	1(1)240		
	$1\frac{9}{32}\left(\frac{1}{32}\right)2\left(\frac{1}{16}\right)3\frac{3}{4}$			
	$3\frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\right)5$			
	$5\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)7\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)8\left(\frac{1}{2}\right)10$	1(1)120		
	11(1)25	1(1)60		
	30(5)60(10)100 ; 75	1(1)10		
Malta 表[18]	0.05(0.05 ; 0.125)10	1(1)120	8	
	10.125(0.125)20	1(1)50		

参考 $(1+i)^{1/p}$, $(1+i)^{-1/p}$, $S_{\overline{1}|}^{(p)}$, $S_{\overline{\frac{1}{p}}|}$

数表名	関数	内容概要	小数桁数	備考
Gushee 表	$(1+i)^{1/p}$	$p=365,\ 360,\ 180,\ 52,\ 26,\ 13,\ 12,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2$ $i=\frac{1}{2}\sim 7\left(\frac{1}{2}\right)10(1)25$	10	
	$S_{\overline{\frac{1}{p}}|}=\dfrac{(1+i)^{1/p}-1}{i}$	〃		
Malta 表	$(1+i)^{1/p}$	$\frac{1}{p}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)\frac{11}{12}$ $i=0.05(0.05,\ 0.125)20$	8	$j_{(m)}$ 表を含む
	$(1+i)^{-1/p}$	〃		
	$S_{\overline{1}|}^{(p)}=\dfrac{i}{j_{(p)}}=\dfrac{i}{p\{(1+i)^{1/p}-1\}}$	$p=2,\ 4,\ 12$ $i=$上記の通り		$\dfrac{j_{(m)}}{i}$ を含む
佐々木表[19]	$S_{\overline{1}|}^{(p)}$	$p=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12,\ 24$ $i=0.10(0.1)10$	8	

参考 (等差) 変額年金[20]

数表名	関数	内容概要	小数桁数	備考
A. T. T. 表[21]	$\dfrac{a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$	$i=1(1)20$ $n=1(1)35(5)75$	3	
	$\dfrac{S_{\overline{n}|i}-n}{i}$	〃	2	
	$\dfrac{1-n\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}}{i}$	〃	3	
Grant 表[22]	$\dfrac{a_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}}{i}$	$i=(1)8(2)12,\ 15(5)50$ $n=1(1)25(5)50$	4	
Taylor 表[23]	$\dfrac{1-n\{(a_{\overline{n}|i})^{-1}-i\}}{i}$	$i=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)2\left(\frac{1}{2}\right)8(1)16$ $18(2)30(10)100$ $120(15)150$ $n=1(1)36$ 種々	4～5	

2. 利　　力

数表名	関数	内容概要	小数桁数	備考
Thusesen 表[24]	$e^{\delta n}$	$i=1(1)10,\ 12,\ 15(5)30$ $n=1(1)35\sim100$	3	
	$S_{\overline{n}\vert\delta}=\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$	〃		
	$a_{\overline{n}\vert\delta}=\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$	〃	4	
	$(a_{\overline{3}\vert\delta})^{-1}=\dfrac{e^{\delta}-1}{1-e^{-\delta n}}$	〃		
	$(S_{\overline{n}\vert\delta})^{-1}=\dfrac{e^{\delta}-1}{e^{\delta n}-1}$	〃		
Cossu 表[25]	$e^{-\delta n}$	$i=1(1)5\left(\frac{1}{4}\right)10\left(\frac{1}{2}\right)15$ $(1)50$ $n=1(1)30$	6	
DeGarmo 表[26]	$e^{-\delta n}$	$i=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10(5)25$ $n=1(1)30(5)100$	4	

3. 連続年金——iによる場合

数表名	関数	内容概要	小数桁数	備考
Malta 表	$\bar{S}_{\overline{1}\vert i}=\dfrac{i}{\delta}=\dfrac{i}{\ln(1+i)}$	$i=0.05(0.05;\ 0.125)20$	8	
Cossu 表	$\bar{S}_{\overline{1}\vert i}$	$i=1(1)5\left(\frac{1}{4}\right)10\left(\frac{1}{2}\right)$ $15(1)50$	6	
Bracken 表[27]	$\bar{S}_{\overline{n}\vert i}=\dfrac{i}{\delta}\cdot S_{\overline{n}\vert i}$ $=\dfrac{(1+i)^{n}-1}{\delta}$	$i=1(1)30(2)50(5)$ $80(10)1000$ $n=1(1)50$	有効 5	
	$\bar{a}_{\overline{n}\vert i}=\dfrac{i}{\delta}\cdot a_{\overline{n}\vert i}$ $=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}$	〃		
	$(\bar{a}_{\overline{n}\vert i})^{-1}=\dfrac{\delta}{i}(a_{\overline{n}\vert i})^{-1}$ $=\dfrac{\delta}{1-(1+i)^{-n}}$	〃		
Théry 表[28]	$\bar{S}_{\overline{1}\vert i}\cdot(1+i)^{-n}$	$i=0.50(0.50)10(1)50$ $n=1(1)50,\ 60,\ 100$ 例外あり	3	
	$\bar{a}_{\overline{n}\vert i}$	〃		$n=\infty$ あり

連続年金── δ による場合

数表名	関数	内容概要	小数桁数	備考
Thusesen 表	$\bar{S}_{\overline{1}\rceil\delta}=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}$	$i=1(1)40$	6	
Dean 表[29]	$\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot e^{-\delta n}$	$i=1(1)100$ $n=1(1)15$	4	
A. T. T. 表	$\bar{S}_{\overline{n}\rceil\delta}=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot S_{\overline{n}\rceil\delta}$ $=\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$	$i=8(1)15$ $n=1(1)35(5)75$	3	
	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil\delta}=\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\cdot a_{\overline{n}\rceil\delta}$ $=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$	〃		
	$(\bar{a}_{\overline{n}\rceil\delta})^{-1}=\frac{\delta}{1-e^{-\delta n}}$	〃	5	
	$(\bar{S}_{\overline{n}\rceil\delta})^{-2}=\frac{\delta}{e^{\delta n}-1}$	〃		
DeGarmo 表	$\bar{S}_{\overline{n}\rceil\delta}$	$i=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10(5)25$ $n=1(1)30(5)100$	4～0	
	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil\delta}$	〃	4	

参考 割引率関数（現在入手可能のものがないので，少し古いが参考に掲げておく。）

数表名	関数	割引率 %（刻み）	期間（刻み）	小数桁数	備考
Spitzers 表[30]	$\frac{(1-d)^{-n}-1}{d}\cdot(1-d)^{-1}$	$1,\ 1\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)3\left(\frac{1}{4}\right)4\left(\frac{1}{2}\right)6,\ 6\frac{1}{4}$	1(1)100	8	
	$\frac{d}{(1-d)^{-n}-1}\cdot(1-d)$	〃	〃		
Murai 表[31]	$(1-d)^{n}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)8$	1(1)100	10	

6. 金利計算表の節略化（1）

金利計算表の精密化（利率・期間など）は，その時代の経済界の要求に適応すべきものと考えられ，経済の発展段階と表裏一体をなすといって過言ではないであろう。

さて，金利計算表は第4節で述べたように，精密化の方向に向かって発展しつつある。しかし，

精密化には多大の労力と努力を必要とし，大部のものとなり，その利用にも多少の不便を感ずるであろう。

従来から

(1)　中間の利率については補間法を用いて近似値を算出し，また，期数については延長の方法を講ずる。

(2)　1表を選定してこれを必要程度に精密化し，他の諸表はこれから誘導する。

の方法が利用されている。

本稿では，(1)についてはよく知られているので，(2)についてのみ考察してみよう。

いま，iに関する金利計算表のうち，どの1表を基礎表とし，これから他表を誘導するかが問題である。それぞれの表からの誘導法を第8表に示す。

第8表

基礎表 ＼ 誘導表	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|i}$	$(1+i)^{n}$	$S_{\overline{n}\|i}$
$(1+i)^{-n}$		$1-i\cdot a_{\overline{n}\|i}$	$\dfrac{1}{(1+i)^{n}}$	$\dfrac{1}{1+i\cdot S_{\overline{n}\|i}}$
$a_{\overline{n}\|i}$	$\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$		$\dfrac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n}}}{i}$	$\dfrac{1}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}\|i}}+i}$
$(a_{\overline{n}\|i})^{-1}$	$\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	$\dfrac{1}{a_{\overline{n}\|i}}$	$\dfrac{i}{(1+i)^{n}-1}+i$	$\dfrac{1}{S_{\overline{n}\|i}}+i$
$(1+i)^{n}$	$\dfrac{1}{(1+i)^{-n}}$	$\dfrac{1}{1-i\cdot a_{\overline{n}\|i}}$		$1+i\cdot S_{\overline{n}\|i}$
$S_{\overline{n}\|i}$	$\dfrac{\dfrac{1}{(1+i)^{-n}}-1}{i}$	$\dfrac{1}{\dfrac{1}{a_{\overline{n}\|i}}-i}$	$\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$	

（第8表）に，$i=6\%$，$n=60$ を1例として数値を入れたものが，（第9表）である。〜〜〜は誤差を示す。以下，$(S_{\overline{n}|i})^{-1}$ は省略する。

第9表

基礎表 ＼ 誘導表	$(1+0.06)^{-60}$ =0.0303 1433 77	$a_{\overline{60}\|6\%}$ =16.1614 2770 52	$(1+0.06)^{60}$ =32.9876 9085 33	$S_{\overline{60}\|6\%}$ =533.1281 8088 89
$(1+0.06)^{-60}$		0.0303 1433 77	0.0303 1433 77	0.0303 1433 77
$a_{\overline{60}\|6\%}$	16.1614 2770 50		16.1614 2770 52	16.1614 2770 52
$(a_{\overline{60}\|6\%})^{-1}$	0.0618 7572 15	0.0618 7572 15	0.0618 7572 15	0.0618 7572 15
$(1+0.06)^{60}$	32.9876 9083 78	32.9876 9085 08		32.9876 9085 33
$S_{\overline{60}\|6\%}$	533.1281 8062 99	533.1281 8084 76	533.1281 8088 83	

福田理軒によって，既に $a_{\overline{n}|}$ 表を基礎表に選定[32]するものは1850年代に存在するが，これらは $(1+i)^{-n}$, $a_{\overline{n}|i}$, $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ の諸表〔これらを以下，現価系諸表と呼ぶ〕の誘導には適するが，$(1+i)^{n}$, $S_{\overline{n}|i}$ の諸表〔これらを以下，終価系諸表と呼ぶ〕の誘導には，誤差が大きいことが推定できる。5表とも誤差を小にするには，終価系諸表を基礎表に選定する方が適当であろう。ただ，終価系よりも現価系の方が実用範囲が広範のように推察されるのでちゅちょされる。

次に，Steffensen は1938年に基礎表として，

$$G(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$$

ここで，$x=n\delta$ とおくと，

$$G(n\delta)=\frac{n\delta}{1-e^{-n\delta}}$$

を用い，補助表として，$200\,i$ から $100\,\delta$ への換算表を利用して，各種の表を求めようとしたことがある[33]。以下これを考察する。

第10表

誘導表	δ・連続	δ
複利終価率	――	$e^{n\delta}=\dfrac{1}{1-\dfrac{n\delta}{G(n\delta)}}$
複利現価率	――	$e^{-n\delta}=1-\dfrac{n\delta}{G(n\delta)}$
年金終価率	$\bar{S}_{\overline{n}|\delta}=\dfrac{e^{n\delta}-1}{\delta}$ $=\dfrac{n}{G(n\delta)-n\delta}$	$S_{\overline{n}|\delta}=\dfrac{\delta}{e^{\delta}-1}\cdot\bar{S}_{\overline{n}|\delta}$ $=[G(\delta)^{*}-\delta]\cdot\dfrac{n}{G(n\delta)-n\delta}$
年金現価率	$\bar{a}_{\overline{n}|\delta}=\dfrac{1-e^{-n\delta}}{\delta}$ $=\dfrac{n}{G(n\delta)}$	$a_{\overline{n}|\delta}=\dfrac{\delta}{e^{\delta}-1}\cdot\bar{a}_{\overline{n}|\delta}$ $=\dfrac{n[G(\delta)-\delta]}{G(n\delta)}$
賦金率	$(\bar{a}_{\overline{n}|\delta})=\dfrac{\delta}{1-e^{-n\delta}}$ $=\dfrac{G(n\delta)}{n}$	$(a_{\overline{n}|\delta})^{-1}=\dfrac{G(n\delta)}{n[G(\delta)-\delta]}$

$*\quad G(\delta)=\dfrac{\delta}{1-e^{-\delta}}$

i による場合は，補助表を利用して i に相当する δ を求め，$G(x)$ 表を補間法によって，次表に従って他表を誘導する。

第11表

誘導表	i・連続	i
複利終価率	――	$(1+i)^n=\dfrac{1}{1-\dfrac{n\delta_1}{G(n\delta_1)}}$
複利現価率	――	$(1+i)^{-n}=1-\dfrac{n\delta_1}{G(n\delta_1)}$
年金終価率	$\bar{S}_{\overline{n}\rvert i}=\dfrac{(1+i)^n-1}{\delta_1}^{**}$ $=\dfrac{n}{G(n\delta_1)-n\delta_1}$	$S_{\overline{n}\rvert i}=\dfrac{\delta_1}{i}\cdot\bar{S}_{\overline{n}\rvert \delta_1}$ $=\dfrac{\delta_1}{i}\cdot\dfrac{n}{G(n\delta_1)-n\delta_1}$
年金現価率	$\bar{a}_{\overline{n}\rvert i}=\dfrac{n}{G(n\delta_1)}$	$a_{\overline{n}\rvert i}=\dfrac{\delta_1}{i}\cdot\dfrac{n}{G(n\delta_1)}$
賦金率	$(\bar{a}_{\overline{n}\rvert i})^{-1}=\dfrac{G(n\delta_1)}{n}$	$(a_{\overline{n}\rvert i})^{-1}=\dfrac{i}{\delta_1}\cdot\dfrac{G(n\delta_1)}{n}$

** $\delta_1=\ln(1+i)$

$e^{n\cdot\ln(1+i)}=[e^{\ln(1+i)}]^n=(1+i)^n$

〔計算例〕 検算については，次節参照。

(1) $\bar{a}_{\overline{n}\rvert \delta}$, $a_{\overline{n}\rvert \delta}$ を求めよ。ただし，$n=60$, $\delta=6\%$ とする。

$$\bar{a}_{\overline{60}\rvert 6\%}=\frac{60}{G(60\times 0.06)}=\frac{60}{3.7011\ 3}=\underline{\underline{16.2112\ 7}}$$

$$a_{\overline{60}\rvert 6\%}=\frac{60[G(0.06)-0.06]}{G(60\times 0.06)}$$

$$=\frac{60[1.0303\ 0-0.06]}{3.7011\ 3}=\underline{\underline{15.7297\ 9}}$$

(2) $\bar{a}_{\overline{n}\rvert i}$, $a_{\overline{n}\rvert i}$ を求めよ。ただし，$n=60$, $i=6\%$ とする。

補助表によると，

i	$200\,i$	$100\,\delta$	δ
0.06	12.0	5.8268 9	0.0582 689

すなわち，$\delta_1=\ln(1+i)$　　$\ln(1+0.06)=0.0582\ 689$

$$\bar{a}_{\overline{60}\rvert 5.82689\%}=\frac{60}{G(60\times 0.0582\ 689)}$$

ここで，$G(3.496134)$ は，$G(x)$ 表から一次補間法によって，

x	$G(x)$	Δ
3.49	3.5998 0	
		0.0091 8
3.50	3.6089 8	

$$3.5998\,0+0.0091\,8\times\frac{0.0061\,34}{0.01}$$

$$=3.6054\,31$$

$$\bar{a}_{\overline{60}|5.82689\%}=\frac{60}{3.6054\,31}=\underline{\underline{16.6415\,6}}$$

$$a_{\overline{60}|5.82689\%}=\frac{0.0582\,689}{0.06}\times\frac{60}{3.6054\,31}$$

$$=\underline{\underline{16.1614\,2}}$$

Steffensen は，複利年金，債券の利回についても本表を利用する方法を述べているが，本稿ではこの点については割愛する。なお，Steffensen の方法を準用して，既述の福田理軒の方法を利力まで拡張することも可能であることに触れるに止める。

7.　金利計算表の節略化（2）

現在の電卓において，

(a)　y^x（または x^y, a^n），ln（または Ln），e^x，などのキーを備えるもの
　　普通の関数電卓は，殆んどこれを含んでいる。

(b)　金利計算用の n, i, PMT（年金額），PV（現価），FV（終価）のキーを備えるもの
　　HP（ヒューレット・パーカー，横河発売），TI（テキスト・インスチュート，テキサス発売）などに，この種のものがある。

金利計算表の節略化に関して，電卓(a)を利用すれば実用としては，特に常用する利率の表の外は，その必要さを減ずることであろう[34]。

しかし，それでは利率を求める場合において，不便ではないかとの疑問が生ずるかも知れないが，電卓(b)によれば解決するのではないか。従って，金利計算表に電卓を代用するには，(a), (b)両機能を兼備するものを利用すればよいことになる。

前節の〔計算例〕について，この種電卓利用の場合の比較表（第12表）を示しておく。

第12表

$n=60$　　$\delta=6\%$　　$i=6\%$

年金現価率	Steffensenの方法	電卓 HP38E (または HP22)	電卓 TIMBA	精密値[35]
$\bar{a}_{\overline{n}\mid\delta}$	16.2112 7	16.2112 7129	16.2112 7129	16.2112 7129 2545
		16.2112 7131	16.2112 7129	
$a_{\overline{n}\mid\delta}$	15.7297 9	15.7297 9613	15.7297 9625	15.7297 9624 3379
		15.7297 9614	15.7297 9625	
$\bar{a}_{\overline{n}\mid i}$	16.6415 6	16.6415 6226	16.6415 6225	16.6415 6225 9089
		16.6415 6227	16.6415 6226	
$a_{\overline{n}\mid i}$	16.1614 2	16.1614 2771	16.1614 2771	16.1614 2770 5238
		16.1614 2771	16.1614 2771	

注　〰〰 は誤差を示す。
電卓の各欄上段は，式により計算した値
下段は，金利計算用キーを利用した値

なお，念のために，第12表の電卓の下段の数値を求める金利計算用キーの利用法を示しておく。

1)　$a_{\overline{n}\mid i}$　通常の利用方法。

2)　$a_{\overline{n}\mid\delta}$　1) における i に，$e^{\delta}-1$ を代入。

3)　$\bar{a}_{\overline{n}\mid i}$　1) の結果に，$\dfrac{i}{\delta}$ を掛ける。

4)　$\bar{a}_{\overline{n}\mid\delta}$　2) の結果に，$\dfrac{e^{\delta}-1}{\delta}$ を掛ける。

注 1)　商業数学会誌　第4号　1961年10月
これと同一記号を利用する主なるものは，次のようである。
C. H. Gushee: Financial Compound Interest and Annuities Tables 5th ed. 1976
R. Cissell, H. Cissell: Mathematics of Finance 4th ed. 1973
A. Malta: Nouvelles Tables Financières 2e éd. 1974
$(1+i)^n=u^n$
E. Caprano: Finanzmathematik 1974
$(1+i)^n=q^n$

2)　J. J. Michels, A. J. Van Reeken: Six Interest Tables 1972

3)　JIS Z8121　1967年3月

4)　The Engineering Economist　第14巻第2号　1969年 (経営工学分科会選定)
〔J. L. Riggs: Engineering Economics 1977 に紹介〕
(F/P, i%, N), ……を%を省略し，Nを n に置換して示したことを了承せられたい。なお，式は注3と同一である。
これと同一記号を利用している主なものは，次のようである。

E.L. Grant, W.G. Ireson, R.S. Leavenworth: Principles of Engineering Economy 6th ed. 1976
H.G. Thusesen, W.J. Fabrycky, G.J. Thusesen: Engineering Economy 5th ed. 1977
American Telephone and Telegraph Co.: Engineering Economy 3rd ed. 1977
以下，A.T.T. と略記する。
（本書は本学助教授田村文子氏のご好意によって，出版直後に入手したものである。）
DeGarmo/Canada/Sullivan: Engineering Economy 6th ed. 1979
（ただし，DeGarmo: Engineering Economy 3rd ed. 1960; A.T.T.: Engineering Economy 1st ed. 1952 では，アクチュアリー系記号が用いられていた。(A.T.T. では，$a_{\overline{n}|i} \rightarrow \mathrm{a}_{\overline{n}|i}$, $(a_{\overline{n}|i})^{-1} \rightarrow 1/\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$)

5) DeGarmo/Canada/Sullivan: op. cit.

6) G.A. Taylor: Managerial and Engineering Economy 2nd ed. 1975
SFDF……sinking fund deposit factor

7) Robert V. Oakford: Capital Budgeting 1970
ただし，利率 g を用いているが，i と置換えたことを了承せられたい。
DFF……discrate flow factor

8) Däumler: Finanzmathematisches Tabellnwork 1978

9) 拙稿：投資計算の基礎公式について　城西経済学会誌　第15巻第2号　1979年12月参照

10) E.L. Grant, W.G. Ireson: Principles of Engineering Economy 4th ed. 1964 Appendix B p. 494
E.L. Grant, W.G. Ireson, R.S. Leavenworth: op. cit. p. 531
（拙稿：EE における利息計算　城西経済学会誌　第4巻第1号で紹介したことがある。）

11) 注9　拙稿参照

12) 注9　拙稿参照

13) 拙稿：EE における利息計算　参照

14) R. Todhunter: Text-book on Compound Interest and Annuities-certain 4th ed. 1937 Appendix to Chapter X
David Murray: Chapters in the History of Book-keeping, Accountancy & Commercial Arithmetic 1930
C. Attwood: Compound Interest Tables 1967 Short History of Tables of Compound Interest
リーッマン原著，鍋島信太郎訳：初等数学史概要　1943年
ホーブソン原著，岩田耕作訳：世界銀行秘話　1962年
小倉金之助：数学教育史　1932年

15) 金利計算表については，次の拙稿で既述したことがあるが，本稿は新資料によってこれを書換えたものである。
拙著：新会計数理　1977年6月

16) P.A. Violeine: Nouvells Tables pour les Calculs D'Intérêts Composés D'Annuitiés et D'Amortissement 1782初版，12版復刻版 1970
〔本表については，加藤惣兵衛氏の批判がある。商業数学会誌　第25号　1971年12月〕

17) C.H. Gushee: op. cit. 1942初版，1976　5版2刷

18) A. Malta: op. cit. 1965初版，1974 再版2刷
〔本表初版については，加藤惣兵衛氏の批判がある。商業数学会誌　第12号　1964年8月〕

19) 佐々木道雄：金利計算表　1953　増補版

20) 次の拙稿および著書に，等差変額年金に関する関数表を示したことがあるが，本稿は新資料によって，これらを書換えたものである。

拙稿：特種な利息関数表　商業数学会誌　第19号　1967年10月
拙稿：会計数理の基本公式　城西経済学会誌　第6巻第1号　1970年4月
拙著：新会計数理　1977年6月

21) American Telephone and Telegraph Co.: op. cit.
22) E.L. Grant & others: op. cit.
23) G.A. Taylor: op. cit.
24) H.G. Thusesen & others: op. cit.
25) C. Cossu, M. Richez: Nouvelles Tables financiéres et d/actuatisation 1976
26) E.P. DeGarmo & others: op. cit.
27) J. Bracken, C.J. Christenson: Tables for use in Analyzing Business Decision 1965
28) G. Théry: Tables economiques et financiéres 1976
29) J. Dean: Interest Tables for determining Rate of Return by the Discount Cash Flow method 刊行年不明
30) E. Foerster: Simon Spitzers Tabellen für die Zinsesginsen-und Rentenrechnung 1922
31) H. Murai: Zinseszinsen-Einlage-Renten-und Amortisation-Tabllen 2[te] Aufl. 1910〔佐々木道雄：商業数学による〕
32) 拙稿：和算における利息算（II）城西大学経済経営紀要　第2巻第1号　1979年7月　参照
33) J.F. Steffensen: "A Table of the Function $G(x)=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ and its Applications to Problems in Compound Interest" 1938

$$\left.\begin{array}{ll} G(x) & n=0.00(0.01)10.00 \\ \text{補助表} & 200i=0.0(0.1)20.0 \end{array}\right\}\text{小数5桁}$$

（本論文は，鹿児島経済大学前教授加藤惣兵衛氏のご好意によって借覧したものである。）

34) 誤解のないように一言付記しておくと，数表は諸先学の偉大なる努力によるものであり，人類の遺産である。場合によっては，コンピューターと比較しても手数・経済性において有利なことがあることを認めなければならない。本文の記述は，どこまでも実用上としてであることを銘記せられたい。
（国立国会図書館：数表総目録　1957年3月刊〝はしがき〟参照）

35) $\ln x$, $\ln(1+x\cdot 10^{-n})$ および e^x, e^{-x}, $e^{x\cdot 10^{-n}}$, $e^{-x\cdot 10^{-n}}$ の精密な表が，次書にあるので，これを利用した。
M. Abramowitz, I.A. Stegun (ed.): Handbook of Mathematical Functions 5th ed. 1968

（1980. 1. 9 稿）