

# 利付債券の価格と利回り

野沢孝之助

## 序

公債と社債は、その発行者の相違によって、発行条件（利率・発行価格・償還期限など）が異なる。しかし、転換社債を除いては、その計算方法は同様であるから、公債と社債を一括して債券という。この債券への投資の利益率を、債券の利回りという。

以下、每期利息の支払われるいわゆる利付債券の価格とその利回りの計算方法について考察する。筆者は従来行なわれている諸方法については、既に紹介している<sup>1)</sup>ので、本稿では、その補論を試みようと思う。

次の順序による。

- 1 価格——毛位利子表から求める方法
- 2 価格——近い利率の債券価格表から求める方法
- 3 利回り——逆補間法を利用して求める方法(1)
- 4           ——逆補間法を利用して求める方法(2)
- 5 利回り——電卓を利用して求める方法(1)
- 6           ——電卓を利用して求める方法(2)
- 7 まとめ

1.

今度、鹿児島経大加藤惣兵衛教授が、毛位利子表<sup>2)</sup>を一部発表された。本表を利用して債券価格を求めてみよう。

債券価格の周知の公式は、

$$A = Cg \overline{an}|_i + C(1+i)^{-n} \quad 3)$$

ただし、

$A$ ……債券価格

$C$ ……額面金額（償還金額と一致する場合）

$g$ ……債券利率（1利払期を単位とする）

$i$ ……利回り率（                   "                   ）

$n$ ……償還期数（                   "                   ）

$\overline{an}|_i$ ……年金現価率  $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

において、変形すると、

$$\begin{aligned} A &= C(g \overline{an}|_i + 1 - i \overline{an}|_i) \\ &= C\{1 - (i - g)\overline{an}|_i\} \end{aligned} \quad [101]$$

となる。

[問題1]

7.3%利付、償還期限10年、2期払債券の評価利率年7.48%における価格を求めよ。

注：2期払とは、利息が年2回に分けて支払われるもので、この場合においては評価利率も年2回計算によるのがふつうである。

[101] 式による。

$$C = 100 \text{ (慣行)} \quad i = \frac{0.0748}{2} = 0.0374$$

$$g = \frac{0.073}{2} = 0.0365 \quad n = 2 \times 10 = 20$$

であるから、

$$A = 100 \times \{1 - (0.0374 - 0.0365) \times 13.90865126\}$$

$$= \underline{\underline{98.7482 \ 21}} \text{ (円)}$$

注：実務では、価格は額面 ¥100 について ¥0.05 刻みの慣行であるが、本稿では円未満 6 位まで求めておく。

## 2

いま、求める近似の債券利率の価格が与えられて、これから求める債券利率の価格を知るには、どのようにすべきか。

[101] 式において

$i, g_1$  における価格  $A_1$  は

$$A_1 = C \{1 - (i - g_1) a\bar{n}|_i\}$$

から、 $i, g$  における価格  $A$

$$A = C \{1 - (i - g) a\bar{n}|_i\}$$

を求める。

上式から

$$a\bar{n}|_i = \frac{C - A_1}{C(i - g_1)}$$

これを下式に代入して、

$$A = C \left\{ 1 - (i - g) \frac{C - A_1}{C(i - g_1)} \right\}$$

$$A = C - \frac{i - g}{i - g_1} (C - A_1) \quad [201]$$

本式は簡便な算式であるが、未だ紹介されたことがないようである。

[問題 2]

7.2% 利付、償還期限 10 年、2 期払社債の評価利率 7.48% における価格が ¥98.0527 89 を知って、7.3% 利付の同条件の社債の価格を求めよ。

[201] 式による。

$$C = 100 \qquad i = \frac{0.0748}{2} = 0.0374$$

$$g = \frac{0.073}{2} = 0.0365 \qquad g_1 = \frac{0.072}{2} = 0.036$$

$$A_1 = 98.0527 \ 89$$

$$A = 100 - \frac{0.0374 - 0.0365}{0.0374 - 0.036} \times (100 - 98.052789)$$

$$= \underline{\underline{98.74822}} \text{ (円)}$$

3

第1節あるいは第2節の方法で債券価格を求め、これから次のような階差表を作成する。

| 関数               | 第1差( $\Delta$ )   | 第2差( $\Delta^2$ )                                    |
|------------------|---|--|
| $U_i'$           | $\Delta U_i' = U_{i+\omega}' - U_i'$                    |  |
| $U_{i+\omega}'$  |   | $\Delta^2 U_i' = \Delta U_{i+\omega}' - \Delta U_i'$ |
|                  | $\Delta U_{i+\omega}' = U_{i+2\omega}' - U_{i+\omega}'$ |  |
| $U_{i+2\omega}'$ |   |  |

ここで、Newton の補間公式によると (第1差, 第2差を略記)

$$U_{i+m\omega}' = U_i' + m \cdot \Delta + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot \Delta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot \Delta^3 + \dots$$

[301]

となる。

注：たとえば、関数が7.2%, 7.4%, 7.6%に関する場合には、 $i' = 7.2\%$ ,  $\omega = 0.2\%$  であって、7.3%は  $m = 0.5$  の場合に当る。

[301] 式において、 $\Delta^3$  以上を含む項を省略して整理すると、

$$U_{i+m\omega}' = U_i' + m \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \right) + m^2 \cdot \frac{\Delta^2}{2}$$

まず、 $m^2$  を含む項を省略して、 $m$  の第1近似値  $m_1$  を求め

$$m_1 = \frac{U_{i+m\omega}' - U_i'}{\Delta - \frac{\Delta^2}{2}} \quad [302]^{4)}$$

次に、これを上式の  $m^2$  の1つに代入して、 $m$  の第2近似値  $m_2$  を求める。

$$U_{i+m\omega}' = U_i' + m \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \right) + m m_1 \frac{\Delta^2}{2}$$

$$\therefore m_2 = \frac{U_{i+m\omega}' - U_i'}{\Delta - \frac{\Delta^2}{2} (1 - m_1)} \quad [303]$$

## 〔問題 3〕

7.3%利付, 2期払社債, 償還期限10年のものを¥98.75で買い入れたときの利回りを求めよ。(A A格社債の昭和48年5月4日現在の発行条件)

7.3%の利付の¥98.75の近傍の階差表を作る。

|       | 関 数       | $\Delta$  | $\Delta^2$ |
|-------|-----------|-----------|------------|
| 7.46% | 98.8863 1 |           |            |
|       |           | -0.1380 9 |            |
| 7.48  | 98.7482 2 |           | 0.0002 5   |
|       |           | -0.1378 4 |            |
| 7.50  | 98.6103 8 |           |            |

(3—1表)

〔302〕式による。

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{98.75 - 98.8863\ 1}{-0.1380\ 9 - \frac{0.0002\ 5}{2}} \\
 &= 0.9862\ 2 \\
 &= 7.46\% + 0.9862\ 2 \times 0.02\% \\
 &= \underline{7.4797\%}
 \end{aligned}$$

注：実務ではせいぜい%の小数第3位に止めているが、以下にはこれより精密に求めておく。

〔303〕式による

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{98.75 - 98.8863\ 1}{-0.1380\ 9 - \frac{0.0002\ 5}{2} \times (1 - 0.9862\ 2)} \\
 &= 0.9871\ 0 \\
 &= 7.46\% + 0.9871\ 0 \times 0.02\% \\
 &= \underline{7.4797\ 42\%}
 \end{aligned}$$

もし、毛位利子表を利用する場合には、

〔101〕式を変形して、

$$\frac{C-A}{C} = (i-g)an|_i$$

ここで,  $\frac{C-A}{C} = k$  とおくと,

$$k = (i-g)an|i \quad [304]^{5)}$$

となる。

[問題3]を[304]式によって, 次の階差表を作成する。

ただし,

$$g = \frac{0.073}{2} = 0.0365 \quad n = 2 \times 10 = 20$$

| $i$   | 関数 ( $k$ )  | $\Delta$    | $\Delta^2$   |
|-------|-------------|-------------|--------------|
| 3.73% | 0.0111 3689 | 0.0013 8090 |              |
| 3.74  | 0.0125 1779 | 0.0013 7841 | -0.0000 0249 |
| 3.75  | 0.0138 9620 |             |              |

(3-2表)

[302] 式によれば,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{0.0125 - 0.0111\ 3689}{0.0013\ 8090 - \frac{-0.0000\ 0249}{2}} \\ &= 0.9862\ 2793\% \\ i &= 3.73\% + 0.9862\ 2793 \times 0.01\% \\ &= 3.7398\ 62\% \end{aligned}$$

債券利回りは, 年利で示す慣行であるから,

$$\underline{\underline{7.4797\%}}$$

[303] 式によれば,

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{0.0125 - 0.0111\ 3689}{0.0013\ 8090 - \frac{-0.0000\ 0249}{2}} \times (1 - 0.9862\ 2793) \\ &= 0.9871\ 0484 \\ i &= 3.73\% + 0.9871\ 0484 \times 0.01\% \\ &= 3.7398\ 7105\% \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{7.4797\ 42\%}$$

4

[301] 式において、 $\Delta^3$  以上を含む項を省略すると、

$$U'_{i+m\omega} = U'_i + m \cdot \Delta + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot \Delta^2$$

まず、 $\Delta^2$  の項を省略して、 $m$  の第1近似値  $m'_1$  を求める。

$$m'_1 = \{U'_{i+m\omega} - U'_i\} \div \Delta$$

次に、この  $m'_1$  を上式の  $m$  に代入して、 $m$  の第2近似値  $m'_2$  を求める。

$$m'_2 = \left\{ U'_{i+m\omega} - U'_i - \frac{m'_1(m'_1-1)}{2} \cdot \Delta^2 \right\} \div \Delta \quad [401]^{6)}$$

この方法を  $m'_r$  と  $m'_{r-1}$  が一致するまで繰り返す。

[問題3]を[401]式で解いてみよう。ここでは(3—2表)を用いる場合を示す。

$$m'_1 = (0.0125 - 0.0111\ 3689) \div 0.0013\ 8090$$

$$= 0.9871\ 1710$$

$$m'_2 = \left\{ 0.0125 - 0.0111\ 3689 \right.$$

$$\left. \frac{0.9871\ 1710 \times (0.9871\ 1710 - 1)}{2} \right.$$

$$\left. \times (-0.0000\ 0249) \right\} \div 0.0013\ 8090$$

$$= 0.9871\ 0563$$

同様にして

$$m'_3 = 0.9871\ 0562$$

$$m'_4 = 0.9871\ 0562$$

$$i = 3.73\% + 0.9871\ 0562 \times 0.01\%$$

$$= 3.7398\ 7106\%$$

$$\therefore \underline{7.4797\ 42\%}$$

5

債券利回りに電卓を利用するには、〔304〕式を変形して

$$i = k(a\bar{n}|i)^{-1} + g \quad [501]$$

右辺の  $(a\bar{n}|i)^{-1}$  に  $i$  の第1近似値  $i_1$  を用いて第2近似値  $i_2$  を求める。次に、右辺に  $i_2$  を代入して、 $i_3$  を求める。以下同様の方法を繰り返して、 $i_r$  が  $i_{r-1}$  に一致すれば、それが求める  $i$  である。

従来は  $(a\bar{n}|i)^{-1} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$  ……賦金率 の計算に対数を利用していた<sup>7)</sup> が、これを電卓によって計算しようとするものである。

電卓を用いる方法は、利用する電卓によって少々手数は異なるが、対数表を利用するものに比較してはるかに簡単である。

16桁の電卓を利用する場合、各近似値は次のようである。

|                |      |      |     |
|----------------|------|------|-----|
| $i_1 = 0.0373$ |      |      |     |
| $i_2 = 0.0373$ | 9791 | 6592 | 351 |
| $i_3 = 0.0373$ | 9870 | 4450 | 639 |
| $i_4 = 0.0373$ | 9871 | 0791 | 368 |
| $i_5 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 399 |
| $i_6 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 810 |
| $i_7 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |
| $i_8 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |

を得る。

％の小数4桁でよければ、 $i_4$  まで求め、 $i_3$  と一致する0.0373 987 から

7.4797%

” 6桁でよければ、 $i_5$  まで求め、 $i_4$  と一致する0.0373 9871 1 から

7.4797 42%

同様に

$i_6$  まで求めれば、7.4797 4217%

$i_7$  まで求めれば、7.4797 4216 856%

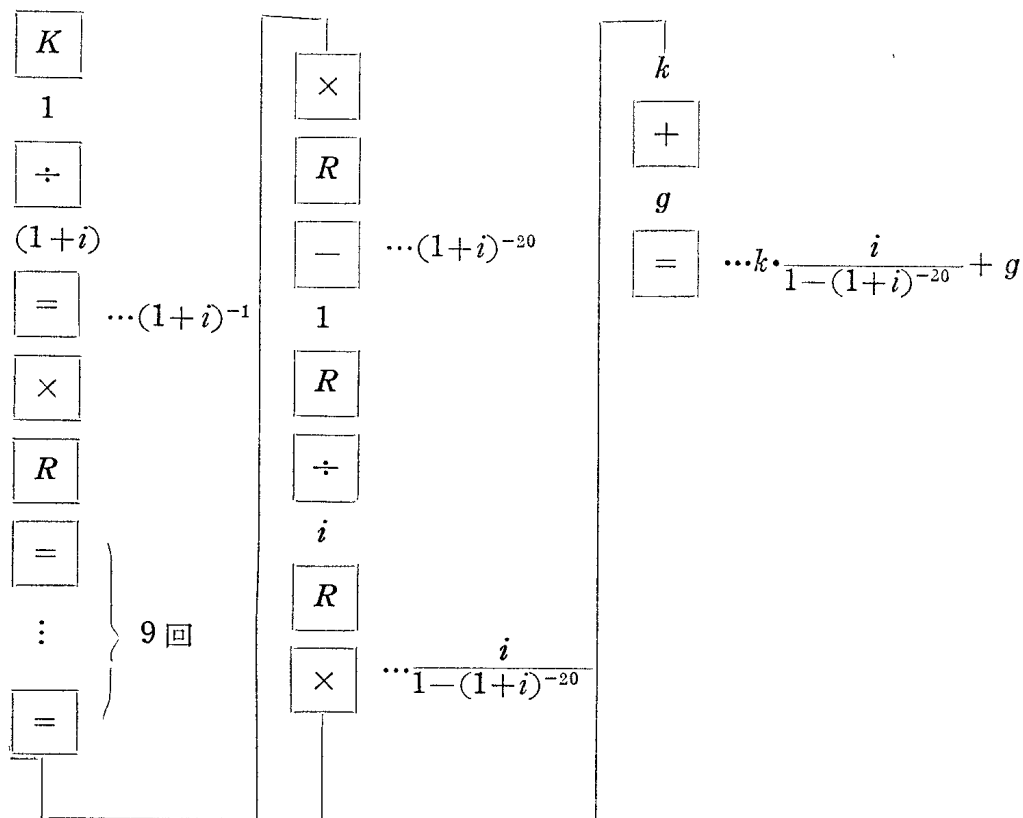


また、 $i_1=0.037$  として計算すれば、次のようになる。

|              |      |      |     |
|--------------|------|------|-----|
| $i_1=0.037$  |      |      |     |
| $i_2=0.0373$ | 9550 | 4953 | 662 |
| $i_3=0.0373$ | 9868 | 5041 | 773 |
| $i_4=0.0373$ | 9871 | 0635 | 164 |
| $i_5=0.0373$ | 9871 | 0841 | 142 |
| $i_6=0.0373$ | 9871 | 0842 | 800 |
| $i_7=0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |
| $i_8=0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |

|               |   |                  |
|---------------|---|------------------|
| $i_4$ まで求めれば, |   | 7.4797%          |
| $i_5$         | " | 7.4797 42%       |
| $i_6$         | " | 7.4797 4217%     |
| $i_7$         | " | 7.4797 4216 856% |

前記の場合と殆んど変わらないようである。



参考に、電卓 Sobax ICC 200 (Reverse キーあり) によって、計算するキーの操作を示すと前ページのようになる。なるべく置換をしないように工夫することが大切である。本例 $i_8$ までに要する計算時間は約5分間である。

□でかこんだものは操作するキー、その他は置数を示す。

……の右に付記したものは、そのキーを操作したときに表示窓に示されている計算式の数値である。

6

[501] 式を変形して

$$i = k \{ (S\overline{n}|i)^{-1} + i \} + g$$

$$\therefore i = \frac{k (S\overline{n}|i)^{-1} + g}{1 - k} \quad [601]$$

注： $(S\overline{n}|i)^{-1} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$  ……積金率

本式によって、16桁の電卓を利用すると、各近似値は次のようになり、[501]式よりは結果はよいようである。

|                |      |      |     |
|----------------|------|------|-----|
| $i_1 = 0.0373$ |      |      |     |
| $i_2 = 0.0373$ | 9915 | 6042 | 887 |
| $i_3 = 0.0373$ | 9870 | 8835 | 730 |
| $i_4 = 0.0373$ | 9871 | 0851 | 861 |
| $i_5 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 772 |
| $i_6 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |
| $i_7 = 0.0373$ | 9871 | 0842 | 813 |

7

従前、実務では利付債券の利回りは、複利で示されていたのであるが、近来どうしたわけか、次式によって示されている。

$$\frac{\text{年利息} + \frac{\text{償還価額} - \text{買入価格}}{\text{残存期間}}}{\text{買入価格}} \quad 8)$$

ただし、割引債券は現在も複利利回りで示されていることに注意されなければならない<sup>9)</sup>。

それは割引債券については、次のような複利現価表が作成されている。

|                                |                    |          |
|--------------------------------|--------------------|----------|
| 日本勧業証券株式会社：                    | 複利現価表              | 1965年第3版 |
| $i = 6\% \sim 10\%$            | 0.05%刻み            |          |
| $n = \frac{1}{2}$ 年 $\sim$ 11年 | $\frac{1}{12}$ 年刻み |          |

ところが、利付債券の複利債券価格表あるいは複利債券利回り表は、戦前の二書があるに過ぎず。7.3%、7.1%、6.9%の利付債券の価格および利回りは未だ発表されていない<sup>10)</sup>ことに関係があるように思われるが果してどうか。

東京銀行集会所：二期払債券現価表 1929年刊行

東株国債取引員組合：複利債券利廻表 1930年 "

価格は円の小数第6位、利回りは%の小数第3位まで示している。

第5節と第6節については、次の論文を併読せられたい<sup>11)</sup>。

(昭48.5.5稿)

〔注〕

- 1) 拙著：利回りを中心とする商業数学（1952年）、経営財務の数学（1971年）
- 2) Tables complémentaires des fonctions financières  $V^n$  et  $\overline{an}$   
毛位利子表使用法。
- 3) たとえば、拙著：経営財務の数学 p.52参照。
- 4) 拙著：前掲書。p.37.
- 5) たとえば、拙著：前掲書 p.52 参照。
- 6) 原口亮平：高等利息算（1928年訂正11版）p 193 参照。
- 7) 原口亮平：前掲書 p.157 参照。
- 8) 公社債引受協会：公社債利回表 1965年改訂版  
本書と前掲の複利現価表についての筆者の書評は、「商業数学会誌」第16号1966年3月参照。

利付債券の価格と利回り

(159) 33

9) 東証公社債出来値(48.4.26日・単位円・利回りは山一調べ%, 国債, 世銀債は前場)

| 電電債(加入者負担) |       |      | 銘柄   | 償還年月   | 出来値    | 利回   |
|------------|-------|------|------|--------|--------|------|
| 償還年月回      | 出来値   | 利回   | 国債②  | 48. 5  | 100.00 | 6.50 |
|            |       |      | 六分半③ | 48. 8  | 100.00 | 6.50 |
|            |       |      | ④    | 48. 11 | 100.00 | 6.50 |
| へ号48.9②    | 99.85 | 7.57 | ⑤    | 49. 2  | 99.65  | 6.95 |
| 49.3③      | 96.60 | 7.66 | ⑥    | 49. 5  | 99.50  | 7.00 |
| 9④         | 99.30 | 7.74 | ⑦    | 49. 8  | 99.35  | 7.03 |
| 50.3⑤      | 99.50 | 7.49 | ⑧    | 49. 11 | 99.25  | 7.03 |
| 9⑥         | 99.00 | 7.69 | ⑨    | 50. 2  | 99.10  | 7.05 |
| 51.3⑦      | 98.80 | 7.70 | ⑩    | 50. 5  | 99.00  | 7.05 |
| 9⑧         | 98.60 | 7.71 | ⑪    | 50. 8  | 98.85  | 7.07 |
| 52.3⑨      | 99.00 | 7.53 | ⑫    | 50. 11 | 98.75  | 7.07 |
| 9⑩         | 98.30 | 7.71 | ⑬    | 51. 2  | 98.65  | 7.07 |
| 53.3⑪      | 98.30 | 7.67 | ⑭    | 51. 5  | 98.50  | 7.09 |
| 9⑫         | 97.70 | 7.80 | ⑮    | 51. 8  | 98.35  | 7.11 |
| 54.3⑬      | 97.20 | 7.89 | ⑯    | 51. 11 | 98.20  | 7.13 |
| 9⑭         | 96.90 | 7.92 | ⑰    | 52. 2  | 98.05  | 7.14 |
| 55.3⑮      | 97.30 | 7.80 | ⑱    | 52. 5  | 97.90  | 7.16 |
| 9⑯         | 96.30 | 7.99 | ⑲    | 52. 8  | 97.70  | 7.19 |
| ち号56.3①    | 97.80 | 7.85 | ⑳    | 52. 11 | 97.55  | 7.21 |
| 9②         | 97.70 | 7.85 | ㉑    | 53. 2  | 97.40  | 7.22 |
| ぬ号57.3①    | 95.90 | 7.98 | ㉒    | 53. 5  | 97.30  | 7.22 |
| 9②         | 95.90 | 7.96 | ㉓    | 53. 8  | 97.25  | 7.21 |
| か号58.3①    | 92.30 | 8.20 | ㉔    | 53. 11 | 97.15  | 7.21 |
| 9②         | 89.00 | 8.51 | ㉕    | 57. 8  | 97.00  | 7.03 |
|            |       |      | 七分①  | 57. 2  | 99.20  | 7.14 |
| C号48.9②    | 97.10 | 7.32 | ②    | 57. 5  | 99.80  | 7.03 |
| 49.3③      | 93.70 | 7.39 | 東京都  | 53. 9  | 98.75  | 7.62 |
| 9④         | 90.50 | 7.30 | 鉄道債  | 49. 8  | 99.45  | 7.45 |
| 50.3⑤      | 87.30 | 7.36 | 電電債  | 51. 4  | 98.70  | 7.53 |
| 9⑥         | 84.40 | 7.27 | 交通債  | 52. 6  | 100.00 | 7.60 |
| 51.3⑦      | 81.70 | 7.18 | 放送債  | 51. 3  | 99.60  | 7.46 |
| 9⑧         | 79.10 | 7.10 | 興業債  | 52. 1  | 99.05  | 7.62 |
| 52.3⑨      | 76.60 | 7.05 | 商工債  | 51. 8  | 100.00 | 7.50 |
| 9⑩         | 74.10 | 7.02 | 長信債  | 50. 8  | 100.00 | 7.50 |
| 53.3⑪      | 71.70 | 7.00 | 不動債  | 49. 7  | 99.90  | 7.38 |
| 9⑫         | 69.40 | 6.97 | 東レ   | 49. 11 | 99.85  | 7.40 |
| 54.3⑬      | 67.30 | 6.92 | 住友化  | 52. 10 | 100.00 | 7.60 |
| 9⑭         | 65.15 | 6.90 | 新日鉄  | 53. 5  | 100.00 | 7.60 |
| 55.3⑮      | 63.20 | 6.86 | 川鉄   | 52. 8  | 100.00 | 7.60 |
| 9⑯         | 61.15 | 6.85 | 鋼管   | 53. 1  | 100.00 | 7.60 |
| D号55.12①   | 60.15 | 6.85 | 住金   | 53. 7  | 100.00 | 7.60 |
| 56.6①      | 58.35 | 6.82 | 神戸鋼  | 53. 7  | 100.00 | 7.60 |
| E号57.3①    | 55.90 | 6.74 | 久保田  | 51. 3  | 99.60  | 7.46 |
| 9②         | 54.45 | 6.66 | 日立   | 51. 3  | 99.60  | 7.46 |
| F号58.11①   | 49.80 | 6.83 | 東芝   | 51. 4  | 99.60  | 7.46 |
| 59.5②      | 48.30 | 6.81 | 三菱電  | 53. 9  | 99.20  | 7.60 |

- 10) 7.3%利の債券価格表および利回り表は、一部発表されたことがある。

価格表

久武雅夫・加藤国一郎：企業の数学 1961年3版

利回り7.3%~8.6%，期数1~14，小数4桁

利回り表

拙稿：書評（注8参照）商業数学会誌第16号 1966年

$\frac{1}{2}$ 年~ $3\frac{1}{2}$ 年（価格¥100.20~¥98.50）%小数3桁

4年~7年（" ¥100.40~¥97.40）

ただし、これは本稿とは別法によったもので、末位1の誤差の絶無は保証し難い。

- 11) 拙稿：利付債券の利回り——電卓を利用する1例

1973年9月 商業数学会誌 第26号