

経済指標の変動の解析的研究 III

—— 株価の中期の変動傾向と平均変動量 ——

香 村 俊 武
野 澤 智

私達が展開してきた振動論的解析法において変動速度係数を定義して、経済指標の変動が変動速度係数の値に大きく左右されることを指摘する。そして、株価の半年程度の期間にわたる中期の変動傾向を変動速度係数の値により判定する方法を提案する。また、振動論的解析法を拡張して、株価の変動を線形変動と振動変動の和で表す理論を展開して、株価の1ヶ月当たりの平均変動量を定式化する。

1. 経済指標は振動変動をする

諸種の経済指標の値は時々刻々と複雑に変動するが、その値は無限に大きくはならないし、また、無限に小さくもならない。その値が大きくなり過ぎると、それを小さくする要因が働き、また、小さくなり過ぎると、大きくする要因が働くのが常である。極端に変動すると、その値を元へ戻そうとする復元力が働くため、変動は本質的に振動変動であり、時々見られる急激な変動も、一定時間間隔で見ると、振動、発散や減衰変動に分類できる。私達は、このような観点から、経済指標の変動を振動論的に解析し、今後の変動を予想する理論を追求している（[1] および [2]、以下において、論文 I および II と呼ぶ）。

経済指標の一例である株価も時々刻々に変動する。その時々刻々の変動は互いに独立であり、今月株価が上昇したことは、来月の株価の変動を予想する材料にならない、つまり、株価の変動は揺らぎであり、ランダム・ウォークであるというのが学説である。実際に、株価の変動は揺らぎの理論で説明されている。しかし、株価は、上昇するときには続けて上昇し、下降するときには続けて下降するようになって、株価がランダム・ウォークであるとは実感されないし、揺らぎの理論では、株価の将来の変動を予測することができない。私達は、論文 I において、過去10年間の東証日経平均株価の変動を解析し、その結果、株価は、変動位相を順に巡りながら、変動する傾向が強い、すなわち、株価は過去を記憶して変動するという結論を得た。

また、論文Ⅱにおいて、過去 30 年間の日経平均株価変動の解析から、株価が長期的に下降変動局面から上昇変動局面に移行するための必要十分条件を導いて、得られた変動局面が移行する条件を適用して、本年の 2 月の時点で、低迷していた株価が上昇局面に転換する兆候が見えていくことを報告した。

本論文においては、振動速度係数を一般化し、変動速度係数を定義して、株価の変動が変動速度係数の値に大きく左右されることを指摘する。そして、株価の半年程度の期間にわたる中期的変動傾向を変動速度係数の値により判定する方法を提案する。また、株価の 1 ヶ月当たりの平均変動量を定式化するために、振動論的解析法を拡張して、株価の変動を時間 t の 1 次関数変動と振動変動の和で表す方法を展開する。そして、この方法で株価の変動を解析する。

2. 株価の変動の振動論的解析

2.1 短期的変動傾向の判定

本小節において、経済指標の例として株価を扱い、私達が論文ⅠおよびⅡで展開してきた株価の変動を振動論的に解析する方法、および、3 ヶ月程度の短期間の変動傾向を判定する方法を簡略に概観する。この方法で株価の変動傾向を判定することは、今後の株価の変動を予測する際の重要な基本的作業である。

株価は複雑に変動するが、私達は、その時々刻々の変動を下記の方法で解析して、変動の様相を、振動、上げ、下げ、上げ傾向、下げ傾向、不安定（上げ）と不安定（下げ）の七つの変動傾向に分類する。

時間 t とともに変動する株価を $x(t)$ と表す。時間間隔が Δt （第 4 節における日経平均株価の変動の解析においては、 $\Delta t = 1$ ヶ月とする）である 4 時点 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$ における株価 $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), x(3\Delta t)$ の各時間間隔 Δt 毎における変動量を

$$y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) = x(\Delta t) - x(0) \quad (1)$$

$$y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) = x(2\Delta t) - x(\Delta t) \quad (2)$$

$$y\left(\frac{5}{2}\Delta t\right) = x(3\Delta t) - x(2\Delta t) \quad (3)$$

と表す。また、時間間隔 Δt における 2 次の変動量は

$$z(\Delta t) = y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) - y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (4)$$

$$z(2\Delta t) = y\left(\frac{5}{2}\Delta t\right) - y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) \quad (5)$$

であり、3次の変動量は

$$w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) = z(2\Delta t) - z(\Delta t) \quad (6)$$

である。そして、時点 $t = \frac{3}{2}\Delta t$ における3次の変動量と1次の変動量の比 $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)/y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)$ を求める。

株価 $x(t)$ が、復元力を受けて、水準値 b を中心とする振動変動をするときには、微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2\{x(t) - b\} \quad (7)$$

に従い、株価の変動はこの方程式の解

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta) + b \quad (8)$$

で表される。株価がこのように振動変動をする場合には、時点 $t = \frac{3}{2}\Delta t$ における3次の変動量と1次の変動量の比は

$$\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} = -4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) \quad (9)$$

であり、この比は不等式

$$-4 < \frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} < 0 \quad (10)$$

を満たす。株価がこの不等式を満たす場合には、株価は短期的に振動変動をしていると判定される。

株価がこの比を

$$\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} < -4 \quad (11)$$

とする場合がある。この場合には、株価 $x(t)$ の変動は解析関数で表されず、この不等式を満たして、かつ、 $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) > 0$ である場合には、株価は、ジグザグの折れ線を描いて、上げ傾向の

変動をする。また、 $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) < 0$ である場合には、ジグザグの折れ線を描いて、下げ傾向の変動をする。

また、株価に働く力が復元力ではなくて、反発力であると、株価の変動を表す微分方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega^2\{x(t) - b\} \quad (12)$$

となり、その解は、

$$x(t) = a \cosh(\omega t + \theta) + b, \quad (13)$$

または、

$$x(t) = a \sinh(\omega t + \theta) + b \quad (14)$$

となる。このいずれの場合にも、時点 $t = \frac{3}{2}\Delta t$ における3次変動量 $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)$ の1次変動量 $y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)$ に対する比は

$$\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} = 4 \sinh^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) \quad (15)$$

であり、この比は

$$\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} > 0 \quad (16)$$

になる。株価がこの不等式を満たすときは次の四つの場合に分類できる。すなわち、 $z(2\Delta t) > 0$ で $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) > 0$ である場合、この場合には、株価は次第に上昇する勢いを増しながら上昇して、上げ変動と判定される。また、 $z(2\Delta t) < 0$ で $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) < 0$ である場合には、次第に下降する勢いを増しながら下降して、下げ変動と判定される。そして、 $z(2\Delta t) > 0$ で $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) < 0$ である場合には下げ基調で変動が次第に乏しくなり、また、 $z(2\Delta t) < 0$ で $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) > 0$ である場合には上げ基調で変動が次第に乏しくなる。後の二つの場合は、ともに不安定な減衰変動であり、不安定（下げ）と不安定（上げ）と判定される。

株価が振動変動をする場合には、振動速度係数 $\nu = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)$ が変動位相の進む速度 $\omega\Delta t$ を表す重要な量である。株価が振動変動をする場合以外にも、振動速度係数 ν の概念を拡張するために、変動速度係数を

$$\Omega = -\nu^2 = -4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) = \frac{w}{y} \quad (17)$$

として、一般の場合について、変動速度係数を $\Omega = \frac{w}{y}$ と定義する。これ迄見たように、変動速度係数 Ω の値が短期的変動傾向を判定する際に重要な量になる。ここで定義された振動速度係数 ν と変動速度係数 Ω は私達の振動論体系において大変に重要な量であり、今後の理論展開においても度々用いる。

2.2 中期的変動傾向の判定

株価の振動論的解析法に基づいて、この小節では、半年程度の中期的期間にわたり株価が上昇する上昇期にあるか、下降する下降期にあるかを判定する方法を新たに提案する。

第 2.1 節で述べた短期的な変動の傾向を判定する方法では、1 期間の時間間隔 $\Delta t = 1$ ヶ月として 3 期間にわたる株価の変動を、上げ、下げ、上げ傾向、下げ傾向などの変動傾向に判別した。この短期的な変動傾向の判定によって、上げ、上げ傾向あるいは不安定（上げ）、および、下げ、下げ傾向あるいは不安定（下げ）の判定結果が得られた場合には、それぞれ、半年程度の中期的な期間にわたっても、株価が上昇期、および下降期にあると判定できる。この判定が有効であることは第 4 節における日経平均株価の解析の結果から判る。しかし、この短期的変動傾向判定では振動変動という判定結果になる場合があり、しかも、第 3 節で述べるように、振動変動と判定される確率が約 60 パーセントある。振動変動という判定では、株価が中期的な期間にわたって上昇期にあるか、下降期にあるかを判断できない。そのため、株価が短期的変動傾向の判定において振動変動と判定された場合については、以下に述べるように、より詳細な判定条件を設定して、中期的変動傾向として上昇期にあるか、下降期にあるかのいずれかに判別する。

振動論において、株価 $x(t)$ が振動変動をする場合には、振動速度係数 $\nu = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right)$ が変動位相の進行する速度を与える。振動速度係数 $\nu = 2$ である場合には、 $\omega \Delta t = \pi$ であり、株価は時間間隔 Δt 毎に上昇、下降、上昇、下降、…のように上昇変動と下降変動を交互に繰り返す。つまり、時刻 $t = 0$ に株価が上昇しても、時間 Δt が経つと下降になる、また、時刻 $t = 0$ に下降した場合には、時間 Δt が経つと上昇になる。ところが、振動速度係数 $\nu = \sqrt{2}$ である場合には、 $\omega \Delta t = \frac{\pi}{2}$ であり、株価は時間間隔 Δt 毎に上昇、上昇、下降、下降、上昇、上昇、下降、下降、…のように上昇と下降をそれぞれ 2 回ずつ繰り返す変動をする。この場合には、時刻 $t = 0$ に株価が上昇変動に転ずると、時間 Δt が経っても、上昇変動を繰り返し、また、時刻 $t = 0$ に下降変動に転じた場合には、時間 Δt が経っても下降変動を繰り返す。また、 $\nu = 0$ である場合には、 $\omega \Delta t = 0$ であり、振動変動の周期は無限に長くなり、上昇変動、あるいは、下降変動を何時までも続ける。このように、およそ $\nu = \sqrt{3}$ を境として、 $\nu \geq \sqrt{3}$ のいずれであるかにより、上昇変動や下降変動が 1 期間限りで終わるか、あるいは、数期間持続するかというように、変動の様相が変わる。このように、 $\nu = \sqrt{3}$ が今後の株価の変動を左右する分岐点になる。

以上で見たように、株価が短期的変動傾向判定において振動変動をしていると判定される場合には、次のように中期的な変動傾向の判定をする。ある期の変動量 $y > 0$ であり、 $\frac{w}{y} = -\nu^2 > -3$ である場合には、株価が中期的に上昇期であると判定し、また、 $y > 0$ であり、 $\frac{w}{y} = -\nu^2 < -3$ である場合には、次の時間間隔 Δt では下降変動になると予想されるので、中期的に下降期であると判定する。逆に、ある期の変動量 $y < 0$ であり、 $\frac{w}{y} = -\nu^2 > -3$ である場合には、中期的に下降期であると判定し、また、 $y < 0$ であり、 $\frac{w}{y} = -\nu^2 < -3$ である場合には、中期的に上昇期であると判定する。短期的変動傾向の判定結果が振動変動以外である場合も含めて、中期的変動傾向の判定の条件を表 1 にまとめた。

表 1 中期的変動傾向の判定の条件

	$w/y > -3$	$w/y < -3$
$y > 0$	上昇期	下降期
$y < 0$	下降期	上昇期

中期的変動傾向の判定において上昇期であると判定される $y > 0$, $\frac{w}{y} > -3$, または、 $y < 0$, $\frac{w}{y} < -3$ である場合には

$$y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)\left\{\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}+3\right\}=y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)+y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)+y\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)>0 \quad (18)$$

となる。

一方、下降期と判定される場合には、 $y\left(\frac{w}{y}+3\right)$ が負である。すなわち、 $y\left(\frac{w}{y}+3\right)$ が正であるか負であるかにより、上昇期であるか、下降期であるかを判別することになる。上式は、株価が中期的に上昇期にあるか下降期にあるかは直近の過去 3 ヶ月間の変動和が正であるか、負であるかにより判別することを意味しており、上昇期および下降期を判定する条件として妥当であることが判る。この 3 ヶ月の変動量を 1 ヶ月あたりに平均した変動量

$$y_r \equiv \frac{1}{3}\left\{y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)+y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)+y\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)\right\} \quad (19)$$

でもって、時点 $t = \frac{3}{2}\Delta t$ における中期的変動傾向の判定に対応した 1 ヶ月当たりの株価の平均変動量を定義する。

第 4 節において、1999 年 9 月から 2003 年 8 月までの 4 年間における日経平均株価の中期的変動傾向の判定結果および中期的変動傾向の判定に対応した 1 ヶ月当たりの株価の平均変動量 y_r を示す。

3. 株価の多次式変動を用いた解析

3.1 株価の平均変動量

第2節で説明した株価の変動の振動論的解析法は、そのままでは、振動変動量から上昇や下降の変動量を分離することに適していないで、経済学において重要な量である株式の収益率を定式化し難い。そのため、私達は、振動論を拡張して、株価の変動を振動変動と時刻 t の多次式変動の和として扱う、すなわち、振動変動に時間 t の n 次式変動を加えて、株価の変動を

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta) + \sum_{k=0}^n b_k t^k \quad (20)$$

と表す方法を提案する。この取り扱い法においては、 $n+4$ 個の等間隔な時点 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, (n+3)\Delta t$ における株価が与えられると、 $n+4$ 個のパラメータ $a, \omega, \theta, b_0, \dots, b_n$ の全ての値が決まる。時間 t の k 次項 $b_k t^k$ の $k+1$ 次変動量は零である。ただし、任意の関数 $x(t)$ の $k+1$ 次の変動量を

$$\Delta^{(k+1)} x(t) = \sum_{i=0}^{k+1} {}_k C_i (-1)^i x\left(t + \left(i - \frac{k+1}{2}\right) \Delta t\right) \quad (21)$$

と定義する。 ${}_k C_i$ は組み合わせの数である。このため、 n 次式変動を含む(20)式の変動 $x(t)$ の $n+1$ 次の変動量 $\Delta^{(n+1)} x(t)$ は振動項だけになり、振動方程式

$$\Delta^{(2)} \Delta^{(n+1)} x(t) = -4 \sin^2\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right) \Delta^{(n+1)} x(t) \quad (22)$$

を満たす。したがって、高次の変動量については、第2節で振動変動について導いた諸種の公式を適用することができる。

以下では、株価が上昇あるいは下降する変動傾向をもつとして、時間 t の1次関数である変動項を含めて、株価の変動を

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta) + b_0 + b_1(t - 2\Delta t) \quad (23)$$

と表す。この表式では、5 時点 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$ における株価が与えられると、5 個のパラメータ $a, \omega, \theta, b_0, b_1$ の全ての値が決まる。(23)式において、時間 t の1次式については5 時点の中の中心の時点 $t = 2\Delta t$ を時間 t の基準として表した。多次式項が時間 t の1次関数である場合、 $x(t)$ の2次変動量 $z(t)$ は、1次関数項の寄与を受けず、振動方程式

$$\Delta^{(2)} z(t) = -4 \sin^2\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right) z(t) \quad (24)$$

を満たす。 $z(t)$ の2次の変動量 $\Delta^{(2)} z(t)$ を $u(t)$ と表す、すなわち、

$$\begin{aligned}
u(2\Delta t) &= \Delta^{(2)}z(2\Delta t) \\
&= z(3\Delta t) - 2z(2\Delta t) + z(\Delta t) \\
&= \Delta^{(4)}x(t)|_{t=2\Delta t}
\end{aligned} \tag{25}$$

とすると、株価の変動が(23)式で表される場合には、

$$\frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)} = -4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) \tag{26}$$

であり、この比は不等式

$$-4 < \frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)} < 0 \tag{27}$$

を満たす。

1 期間 Δt における 1 次項の変動量 $b_1\Delta t$ が株価の 1 期間当たりの平均変動量を表す。すなわち、上記の 5 時点にわたる期間における株価の 1 期間当たりの平均変動量は

$$\begin{aligned}
b_1\Delta t &= y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) - w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)\frac{z(2\Delta t)}{u(2\Delta t)} \\
&= y\left(\frac{5}{2}\Delta t\right) - w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)\frac{z(2\Delta t)}{u(2\Delta t)}
\end{aligned} \tag{28}$$

と定まる。また、この 5 時点の期間にわたる株価の水準値は、5 時点の中心時点 $t = 2\Delta t$ における 1 次関数の値

$$b_0 = x(2\Delta t) - \frac{\{z(2\Delta t)\}^2}{u(2\Delta t)} \tag{29}$$

になる。

第 2 節で述べた株価の変動を振動変動項のみで表す振動論において、株価の変動 $x(t)$ が発散変動(13)、または、(14)になることがある。同様に、株価の変動に時間 t の 1 次関数変動を導入した場合、株価の変動が 1 次関数変動と発散変動の和になることがある。つまり、第 4 節に示すように、実際の株価を解析すると、

$$\frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)} > 0 \tag{30}$$

になることがある。このように、株価の変動が発散変動と t の 1 次関数変動の和になる場合、発散変動項が時間 t の増加または減少関数であり、この項も、株価の平均変動量に寄与するため、平均変動量に含める必要がある。このため、株価が(30)式を満たして、発散関数が現れる場合には、多次数変動を時間 t の 1 次関数で扱うのはやめにして、時間 t の 2 次関数で表すことにする。このようにすると、株価の変動を振動変動と 2 次関数変動の和で表すことができるようになる。

この場合には、6 時点 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t, 5\Delta t$ における株価を与えて、株価の変動の表現式

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta) + b_0 + b_1 \left(t - \frac{5}{2} \Delta t \right) + b_2 \left(t - \frac{5}{2} \Delta t \right)^2 \quad (31)$$

の 6 個のパラメター $a, \omega, \theta, b_0, b_1, b_2$ の値を決める。 $x(t)$ の 5 次変動量を

$$\begin{aligned} v(t) &= \Delta^{(5)} x(t) \\ &= w(t + \Delta t) - 2w(t) + w(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (32)$$

と定義すると、株価が不等式

$$-4 < \frac{v\left(\frac{5}{2} \Delta t\right)}{w\left(\frac{5}{2} \Delta t\right)} < 0 \quad (33)$$

を満たす場合には、振動変動項が確定して、株価の変動は(31)式で表される。同式の時間 t の 2 次項は、時点 $t = 0$ から $5\Delta t$ にわたる期間において時間反転対称に表されていて、株価の平均変動量に寄与しない表現にしてある。

時間間隔 Δt 当たりの株価の平均変動量は

$$b_1 \Delta t = y\left(\frac{5}{2} \Delta t\right) - \frac{\left\{ w\left(\frac{5}{2} \Delta t\right) \right\}^2}{v\left(\frac{5}{2} \Delta t\right)} \quad (34)$$

になる。

3.2 ランダム・ウォーク理論による解析

本小節では、ランダム・ウォーク理論を用いて第 1 節および前節で定義した 3 つの変動速度係数に対する解析を行う。これらの変動速度係数に対する解析的表式の導出を付録にまとめたので、導出の詳細については付録および [3] を参照していただきたい。

はじめに、3 次の変動量 w と一次の変動量 y の比 $w\left(\frac{3}{2} \Delta t\right)/y\left(\frac{3}{2} \Delta t\right)$ に対する確率密度関数を $P_I(x)$ とおくと

$$P_I(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(x+2)^2 + 2} \quad (35)$$

で与えられる。同様にして、4 次の変動量 u と 2 次の変動量 z の比 $u(2\Delta t)/z(2\Delta t)$ に対する確率密度関数を $P_{II}(x)$ とおくと、その解析的表式は次のように与えられる。

$$P_{II}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x+3)^2 + 1} \quad (36)$$

さらに、5次の変動量 v と3次の変動量 w の比 $v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)/w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)$ に対する確率密度関数を $P_{III}(x)$ とおくと、その解析的表式は

$$P_{III}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{5}}{\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} \quad (37)$$

で与えられる。これらの確率密度関数を図1にプロットした。図1から高次の変動速度ほど分散が小さいことが分かる。

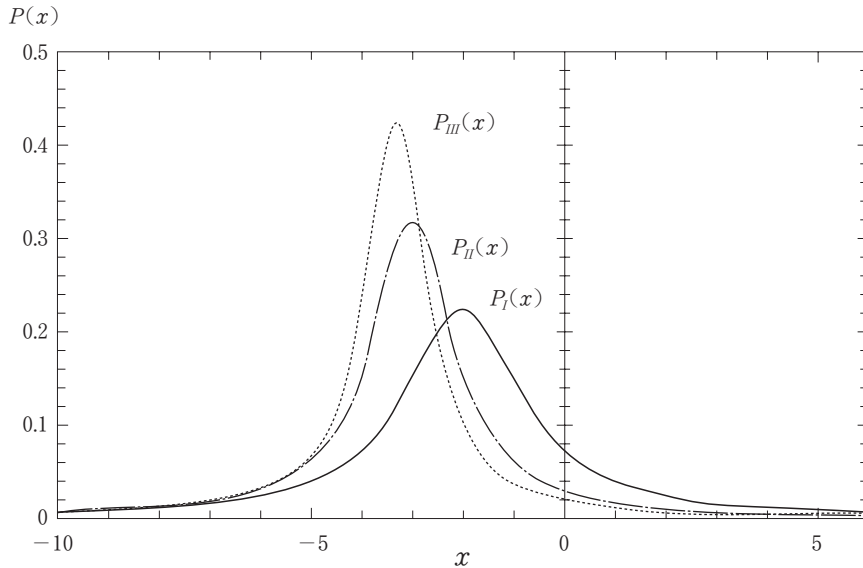
振動変動に対して w/y , u/z , v/w はそれぞれ次の不等式を満たす。

$$-4 < \frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)} < 0 \quad (38)$$

$$-4 < \frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)} < 0 \quad (39)$$

$$-4 < \frac{v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)}{w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)} < 0 \quad (40)$$

図1 ランダム・ウォーク理論による変動速度係数の確率密度関数



従って、それぞれの変動速度係数が振動変動領域に入る確率は

$$P_I(\text{振動}) = \int_{-4}^0 dx P_I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-4}^0 dx \frac{\sqrt{2}}{(x+2)^2+2} = 0.608 \quad (41)$$

$$P_{II}(\text{振動}) = \int_{-4}^0 dx P_{II}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-4}^0 dx \frac{1}{(x+3)^2+1} = 0.648 \quad (42)$$

$$P_{III}(\text{振動}) = \int_{-4}^0 dx P_{III}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-4}^0 dx \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\left(x+\frac{10}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = 0.662 \quad (43)$$

で与えられる。

表 2 において過去 33 年間（1970 年～2003 年）の日経平均株価の月末値のデータとランダム・ウォーク理論との比較を示した。三つの変動速度係数に対して両者が非常に良く一致していることが分かる。

表 2 変動速度係数が振動変動領域に入る確率の比較
（日経平均 1970 年～2003 年）

	$P_I(\text{振動})$	$P_{II}(\text{振動})$	$P_{III}(\text{振動})$
日経平均データ	0.595	0.645	0.657
ランダム・ウォーク	0.608	0.648	0.662
差	2.1%	0.46%	0.76%

4. 日経平均株価の解析

本節において、1999 年 9 月から 2003 年 8 月までの 4 年間にわたり、各月末毎の東証日経平均株価を記録して、それを解析する。時間間隔 $\Delta t = 1$ ヶ月として、前節までに説明した解析法を用いて解析する。表 3 に、各月末毎の日経平均株価 x 、各次の変動量 y, z, w, u と v 、および、変動速度係数 $\frac{w}{y}, \frac{u}{z}$ と $\frac{v}{w}$ の値を示す。また、表 4 に各月の日経平均株価の短期的変動傾向、変動位相と中期的変動傾向を判定した結果、および、3 種類の理論で計算した平均株価の 1 ヶ月当たりの平均変動量を示す。図 2 および図 3 に、この期間における日経平均株価の各月末値と中期的変動傾向の判定結果を図示した。2001 年 10 月から 2002 年 1 月までの間は小刻みに上昇期と下降期を経過したので表示していない。

株価は各月毎に値が上がったり、下がったり、せわしなく変動の向きを変える。ランダム・ウォーク理論に従えば、株価が各月毎に上昇する確率を p 、下降する確率を q として、 $p = q = \frac{1}{2}$ と

表 3 日経平均株価, 変動量, 変動速度係数 (Sep. 99~Aug. 03)

年 月	x	y	z	w	u	v	w/y	u/z	v/w
Sep. 99	17,605		169		534			3.2	
		337		110		-1,163	0.3		-10.6
Oct. 99	17,942		279		-629			-2.3	
		616		-519		1,618	-0.8		-3.1
Nov. 99	18,558		-240		989			-4.1	
		376		470		-1,875	1.3		-4.0
Dec. 99	18,934		230		-886			-3.9	
		606		-416		1,445	-0.7		-3.5
Jan. 00	19,540		-186		559			-3.0	
		420		143		-3,399	0.3		-23.8
Feb. 00	19,960		-43		-2,840			66.0	
		377		-2,697		8,998	-7.2		-3.3
Mar. 00	20,337		-2,740		6,158			-2.2	
		-2,363		3,461		-7,619	-1.5		-2.2
Apr. 00	17,974		721		-1,461			-2.0	
		-1,642		2,000		-6,023	-1.2		-3.0
May. 00	16,332		2,721		-7,484			-2.8	
		1,079		-5,484		18,549	-5.1		-3.4
Jun. 00	17,411		-2,763		11,065			-4.0	
		-1,684		5,581		-21,712	-3.3		-3.9
Jul. 00	15,727		2,818		-10,647			-3.8	
		1,134		-5,066		17,868	-4.5		-3.5
Aug. 00	16,861		-2,248		7,221			-3.2	
		-1,114		2,155		-7,967	-1.9		-3.7
Sep. 00	15,747		-93		-746			8.0	
		-1,207		1,409		-2,951	-1.2		-2.1
Oct. 00	14,540		1,316		-3,697			-2.8	
		109		-2,288		7,878	-21.0		-3.4
Nov. 00	14,649		-972		4,181			-4.3	
		-863		1,893		-8,013	-2.2		-4.2
Dec. 00	13,786		921		-3,832			-4.2	
		58		-1,939		7,865	-33.4		-4.1
Jan. 01	13,844		-1,018		4,033			-4.0	
		-960		2,094		-6,385	-2.2		-3.0
Feb. 01	12,884		1,076		-2,352			-2.2	
		116		-258		186	-2.2		-0.7
Mar. 01	13,000		818		-2,166			-2.6	
		934		-2,424		6,575	-2.6		-2.7
Apr. 01	13,934		-1,606		4,409			-2.7	
		-672		1,985		-7,588	-3.0		-3.8
May. 01	13,262		379		-3,179			-8.4	
		-293		-1,194		5,149	4.1		-4.3
Jun. 01	12,969		-815		1,970			-2.4	
		-1,108		776		-2,302	-0.7		-3.0
Jul. 01	11,861		-39		-332			8.5	
		-1,147		444		619	-0.4		1.4
Aug. 01	10,714		405		287			0.7	
		-742		731		-2,217	-1.0		-3.0

表 3 (つづき)

年 月	x	y	z	w	u	v	w/y	u/z	v/w
Sep. 01	9,972		1,136		-1,930			-1.7	
		394		-1,199		2,707	-3.0		-2.3
Oct. 01	10,366		-63		777			-12.3	
		331		-422		-261	-1.3		0.6
Nov. 01	10,697		-485		516			-1.1	
		-154		94		916	-0.6		9.7
Dec. 01	10,543		-391		1,432			-3.7	
		-545		1,526		-4,246	-2.8		-2.8
Jan. 02	9,998		1,135		-2,814			-2.5	
		590		-1,288		4,286	-2.2		-3.3
Feb. 02	10,588		-153		1,472			-9.6	
		437		184		-1,884	0.4		-10.2
Mar. 02	11,025		31		-412			-13.3	
		468		-228		-576	-0.5		2.5
Apr. 02	11,493		-197		-988			5.0	
		271		-1,216		4,015	-4.5		-3.3
May. 02	11,764		-1,413		3,027			-2.1	
		-1,142		1,811		-4,751	-1.6		-2.6
Jun. 02	10,622		398		-1,724			-4.3	
		-744		87		1,175	-0.1		13.5
Jul. 02	9,878		485		-549			-1.1	
		-259		-462		481	1.8		-1.0
Aug. 02	9,619		23		-68			-3.0	
		-236		-530		2,424	2.2		-4.6
Sep. 02	9,383		-507		2,356			-4.6	
		-743		1,826		-6,714	-2.5		-3.7
Oct. 02	8,640		1,319		-4,358			-3.3	
		576		-2,532		8,501	-4.4		-3.4
Nov. 02	9,216		-1,213		4,143			-3.4	
		-637		1,611		-5,890	-2.5		-3.7
Dec. 02	8,579		398		-1,747			-4.4	
		-239		-136		1,208	0.6		-8.9
Jan. 03	8,340		262		-539			-2.1	
		23		-675		1,875	-29.3		-2.8
Feb. 03	8,363		-413		1,336			-3.2	
		-390		661		-1,509	-1.7		-2.3
Mar. 03	7,973		248		-173			-0.7	
		-142		488		-987	-3.4		-2.0
Apr. 03	7,831		736		-1,160			-1.6	
		594		-672		1,590	-1.1		-2.4
May. 03	8,425		64		430			6.7	
		658		-242		291	-0.4		-1.2
Jun. 03	9,083		-178		721			-4.1	
		480		479		-2,407	1.0		-5.0
Jul. 03	9,563		301		-1,686			-5.6	
		781		-1,207		4,265	-1.5		-3.5
Aug. 03	10,344		-906		2,579			-2.8	
平均値		-147.8							

表4 日経平均株価の変動傾向と上昇率 (Sep. 99~Aug. 03)

年 月	短期的変動	変動位相	中期的変動	平均変動量 (19)	平均変動量 (28)	平均変動量 (34)
	振動	IV	上昇期	26.7		90.1
Sep. 99					302.2	
	上げ	IV	上昇期	373.7		347.4
Oct. 99					385.8	
	振動	IV	上昇期	443.0		449.5
Nov. 99					490.1	
	上げ	I	上昇期	532.7		493.8
Dec. 99					498.0	
	振動	IV	上昇期	467.3		486.2
Jan. 00					467.6	
	不安定	I	上昇期	467.7		426.0
Feb. 00					417.8	
	下げ傾向	I	下降期	-522.0		-431.4
Mar. 00					-823.0	
	振動	II	下降期	-1209.3		-790.8
Apr. 00					-655.0	
	振動	III	下降期	-975.3		-977.9
May. 00					-914.8	
	下げ傾向	I	下降期	-749.0		-542.3
Jun. 00					-290.4	
	振動	III	上昇期	176.3		-249.4
Jul. 00					-206.8	
	下げ傾向	IV	下降期	-554.7		-302.3
Aug. 00					-443.1	
	振動	II	下降期	-395.7		-531.1
Sep. 00					-1382.7	
	振動	III	下降期	-737.3		-534.3
Oct. 00					-705.4	
	下げ傾向	IV	下降期	-653.7		-555.5
Nov. 00					-422.9	
	振動	II	下降期	-232.0		-415.8
Dec. 00					-408.0	
	下げ傾向	I	下降期	-588.3		-420.0
Jan. 01					-431.4	
	振動	III	下降期	-262.0		-273.3
Feb. 01					-2.0	
	振動	IV	上昇期	30.0		-241.9
Mar. 01					18.6	
	振動	I	上昇期	126.0		40.3
Apr. 01					51.0	
	振動	II	下降期	-10.3		-152.7
May. 01					-435.3	
	下げ	II	下降期	-691.0		-569.9
Jun. 01					-787.0	
	振動	II	下降期	-849.3		-846.4
Jul. 01					-1199.2	
	振動	III	下降期	-999.0		-1465.5
Aug. 01					-1773.6	

表4 (つづき)

年 月	短期的変動	変動位相	中期的変動	平均変動量 (19)	平均変動量 (28)	平均変動量 (34)
	振動	Ⅲ	下降期	-498.3		-501.0
Sep. 01					-311.7	
	振動	Ⅳ	下降期	-5.7		-137.1
Oct. 01					296.8	
	振動	Ⅰ	上昇期	190.3		1013.3
Nov. 01					-65.6	
	振動	Ⅱ	下降期	-122.7		-163.6
Dec. 01					-128.3	
	振動	Ⅲ	下降期	-36.3		3.4
Jan. 02					70.5	
	振動	Ⅳ	上昇期	160.7		202.9
Feb. 02					456.1	
	上げ	Ⅰ	上昇期	498.3		455.0
Mar. 02					450.8	
	振動	Ⅰ	上昇期	392.0		558.3
Apr. 02					513.5	
	下げ傾向	Ⅰ	下降期	-134.3		-97.3
May. 02					-296.6	
	振動	Ⅱ	下降期	-538.3		-451.7
Jun. 02					-723.9	
	振動	Ⅲ	下降期	-715.0		-750.4
Jul. 02					-667.1	
	不安定	Ⅲ	下降期	-413.0		-702.8
Aug. 02					-415.3	
	下げ	Ⅱ	下降期	-412.7		-351.9
Sep. 02					-350.1	
	振動	Ⅲ	下降期	-134.3		-246.4
Oct. 02					-190.3	
	下げ傾向	Ⅳ	下降期	-268.0		-178.1
Nov. 02					-165.3	
	振動	Ⅱ	下降期	-100.0		-196.4
Dec. 02					-270.0	
	不安定	Ⅲ	下降期	-284.3		-254.3
Jan. 03					-305.1	
	下げ傾向	Ⅰ	下降期	-202.0		-220.0
Feb. 03					-185.7	
	振動	Ⅱ	下降期	-169.7		-100.5
Mar. 03					557.6	
	振動	Ⅲ	上昇期	20.7		99.3
Apr. 03					167.6	
	振動	Ⅳ	上昇期	370.0		310.0
May. 03					694.0	
	振動	Ⅰ	上昇期	577.3		456.7
Jun. 03					598.3	
	上げ	Ⅳ	上昇期	639.7		575.3
Jul. 03					565.5	
	振動	Ⅰ	上昇期	378.7		439.4
Aug. 03					357.0	
平均値				-158.2	-169.2	-162.6
的中率			38/48		40/48	40/48

図2 日経平均株価の変動傾向 (Sep. 99~Aug. 01)

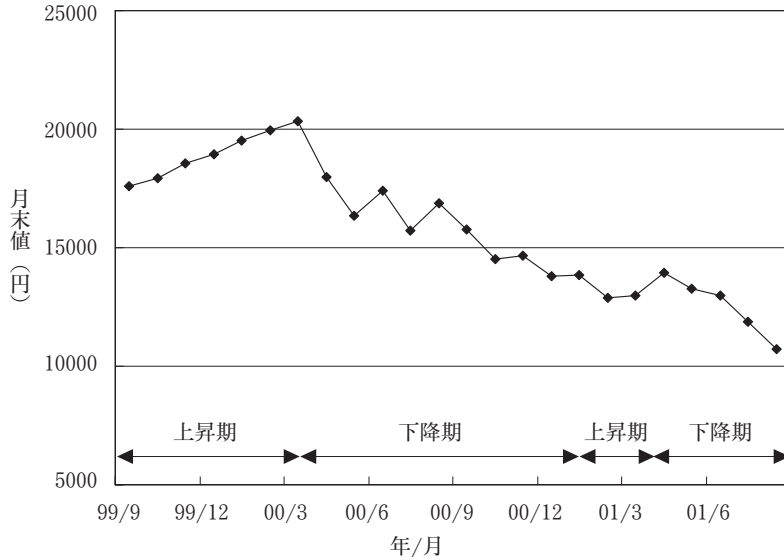
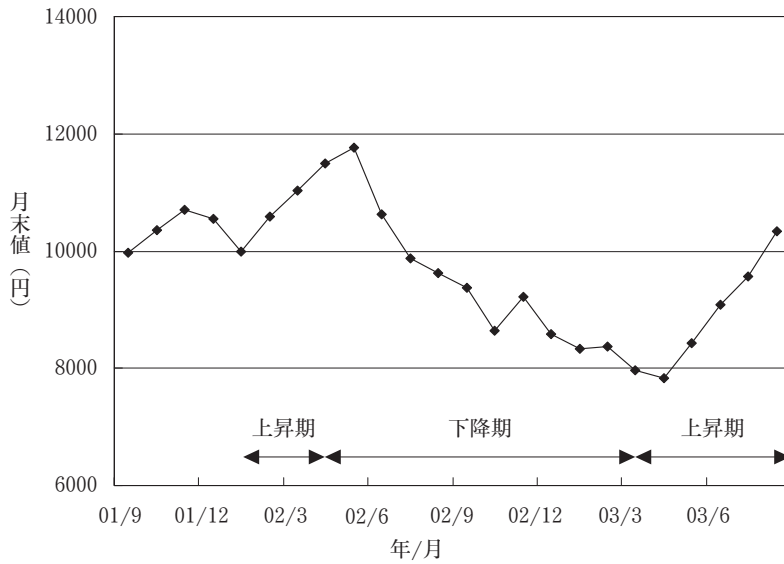


図3 日経平均株価の変動傾向 (Sep. 01~Aug. 03)



すると、株価が上昇あるいは下降変動を継続する平均月数

$$\begin{aligned}
 n &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \tag{44}
 \end{aligned}$$

である。実際に、表3に見られるように、日経平均株価はこの48ヶ月の間に21回上昇から下降や下降から上昇に変動の向きを変え、上昇あるいは下降変動の平均継続月数は2.3ヶ月である。

表4の第4列に示した中期的変動傾向の判定結果では、この期間中に日経平均株価が上昇期から下降期や下降期から上昇期に転換した回数は合計10回であり、上昇期や下降期が継続した平均月数は4.4ヶ月になる。このように、中期的変動傾向の判定は、株価の月々の変動傾向をよりなだらかな変動の傾向に均して捉え、半年程度の中期的な期間にわたる株価の変動を表して、今後の中期的期間にわたる変動を予想するのに適する。表4第4列の最下欄に、先月の中期的変動傾向が次月も継続すると考えて、先月の中期的変動傾向の判定結果でもって次月の中期的変動傾向を予想した場合のこの48ヶ月における予想的中率を示した。約79パーセントの確率で的中していて、良く的中することが判る。

表4第5列に、中期的変動傾向の判定に対応して、日経平均株価の3ヶ月間の変動量を1ヶ月当たり平均した平均変動量 $y_t(19)$ を示す。そして、同表の第6列に株価の変動を1次関数変動と振動変動の和で表す理論で求めた平均株価の1ヶ月当たりの平均変動量(28)を示す。また、第7列には株価を2次関数変動と振動変動の和で表す理論で求めた平均株価の1ヶ月当たりの平均変動量(34)を示す。また、3種の理論において求めた日経平均株価の1ヶ月当たりの平均変動量をこの48ヶ月について平均した値を各列の下から2番目の欄に示す。この3種類の理論は平均としてほとんど同じ大きさの株価の平均変動量を与えることが判る。しかし、これらの1ヶ月当たりの平均変動量は表3第3列の下欄に与えた1ヶ月当たりの変動量の単純な平均値に比べて、負数の絶対値がやや大きくなっている。これは、対象にしている48ヶ月の期間の初めと終わりの時期に、株価がたまたま上昇傾向であるため、各月の平均変動量は前後の月における変動量を含めて平均化しているため、全期間にわたる平均値においてこれらの端の時期における正の変動量をより軽い重みで取り入れていて、全期間にわたる平均値が小さくなるためである。

表4第6および7列の最下欄には、それぞれの理論を用いて計算した先月の日経平均株価の1ヶ月当たりの平均変動量が正であるか、負であるかによって、次月の平均株価の平均変動量が正であるか負であるかを予想した場合の予想的中率を示した。この二つの理論では的中率は約83パーセントであり、中期的変動傾向を判定する方法で変動傾向を予想する場合に比べて、的中率が約4パーセント大きくなっている。株価の変動を、1次関数変動と振動変動の和で表す理論でも、また、2次関数変動と振動変動の和で表す理論でも、ともに、1ヶ月当たりの株価の平均変動量がこの48ヶ月の期間中に、正から負に、あるいは、負から正に、転換した回数は合計8回であり、株価の平均変動量が月々継続して正であったり、負であった平均継続月数は5.3ヶ月になる。このことは、振動変動項の他に多次数変動項を取り入れる方法の方が、中期的変動傾向の判定により上昇期か下降期かを判定する方法よりも、変動の傾向をより長期にわたるなだらかな

な変動の観点で捉えていることを示す。すなわち、株価の変動を1次関数変動と振動変動の和で表す方法や2次関数変動と振動変動の和で表す方法で株価の変動の向きを判定すると、より長期にわたる変動の傾向を知ることができる。しかし、中期的変動傾向の判定による方法も十分に実用に堪え、この方法は簡便であり、数式の取扱いに慣れていない人々に推奨するのに適している方法である。

付録 ランダム・ウォーク理論における変動速度係数の解析的表式

ここでは、本文で得られた三つの変動速度係数 w/y , u/z , v/w に対する確率密度関数の解析的表式を導出する。

A.1 ランダム・ウォークモデル

はじめにランダム・ウォークのモデルを定義する。ある時刻における株価を x , 1次の変動量を y , 2次の変動量を z , 3次の変動量を w とした時, 1次の変動量 y が平均値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うと仮定する。すなわち, 1次の変動量 y の確率密度関数が

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A1})$$

で与えられるとする。同様に, n 個の時点における 1次の変動量 (y_1, y_2, \dots, y_n) に対する同時確率密度関数は

$$\rho(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)\right\} \quad (\text{A2})$$

で与えられる。この時, 全確率は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \rho(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1 \quad (\text{A3})$$

である。

A.2 $\frac{w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)}$ の確率密度関数

本文で示されたように, 3次の変動量 w と 1次の変動量 y の比 $w\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)/y\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)$ が重要なパラメータである。ここでは, この変動速度係数が次式で与えられる区間の値をもつ確率を計算して, その微分をして確率密度関数を導く。

$$a < \frac{w\left(\frac{3}{2} \Delta t\right)}{y\left(\frac{3}{2} \Delta t\right)} < a+h, \quad (0 < h \ll 1) \quad (\text{A4})$$

w にその定義式を代入することにより、(A4)式は3次元位相空間における二つの領域 A , B で表されることが分かる。

$$\begin{cases} A: y_2 > 0, -y_1+(a+2)y_2 < y_3 < -y_1+(a+h+2)y_2 \\ B: y_2 < 0, -y_1+(a+2)y_2 > y_3 > -y_1+(a+h+2)y_2 \end{cases} \quad (\text{A5})$$

従って、 w/y が(A4)式で表される区間の値をもつ確率密度は、(A2)式を $n=3$ として、領域 A , B について体積積分し、微分することによって求まる。すなわち

$$\begin{aligned} P_I(a) &= \frac{1}{h} \int^A dy_1 dy_2 dy_3 \rho(y_1, y_2, y_3) + \frac{1}{h} \int^B dy_1 dy_2 dy_3 \rho(y_1, y_2, y_3) \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} dy_2 \int_{-y_1+(a+2)y_2}^{-y_1+(a+h+2)y_2} dy_3 \rho(y_1, y_2, y_3) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^0 dy_2 \int_{-y_1+(a+h+2)y_2}^{-y_1+(a+2)y_2} dy_3 \rho(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

である。(A6)式を計算するために、次式のように極座標表示に変換する。

$$(y_1, y_2, y_3) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \quad (\text{A7})$$

$$\int^V dy_1 dy_2 dy_3 = \int_0^{\infty} dr r^2 \int^{\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{A8})$$

$$\rho(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^3 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A9})$$

これらの式を代入し、さらに r に関する積分を実行することにより、(A6)式は次のように変形される。

$$P_I(a) = \frac{1}{4\pi h} \left\{ \int^{\Omega_A} \sin \theta d\theta d\phi + \int^{\Omega_B} \sin \theta d\theta d\phi \right\} \quad (\text{A10})$$

ここで、 Ω_A, Ω_B はそれぞれ、(A6)式の領域 A, B を表わす立体角である。(A10)式は初等積分であり、解析的に求まる。しかしながら、途中の計算式は煩雑であり、ここではその結果だけを示す。 w/y が a と $a+h$ の間の値をもつ確率密度は次式で与えられる。

$$P_I(a) = \frac{1}{\pi h} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{a+h+2}{\sqrt{(a+h+2)^2+2}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{a+2}{\sqrt{(a+2)^2+2}} \right) \right\} \quad (\text{A11})$$

ここでさらに、 $h \rightarrow 0$ の極限をとることにより、 w/y に対する確率密度関数を導くことができる。すなわち、

$$P_I(a) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(x+2)^2+2} \quad (\text{A12})$$

が求まる。(A 12)式がランダム・ウォーク理論における変動速度係数 w/y の値に対する確率密度関数の解析的表式である。(A 12)式はモデルの標準偏差 σ に依らない定数であることに注意したい。さらに、(A 12)式を全空間に対して積分することにより全確率は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx P_I(x) = 1 \quad (\text{A13})$$

を満たす。

A.3 $\frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)}$ の確率密度関数

本文で示されたように 4 次の変動量 u と 2 次の変動量 z の比 $u(2\Delta t)/z(2\Delta t)$ が次式の区間の値をもつ確率密度関数を求める。

$$a < \frac{u(2\Delta t)}{z(2\Delta t)} < a+h, \quad (0 < h \ll 1) \quad (\text{A14})$$

u, z にそれぞれの定義式を代入することにより(A 14)式は次のように表される。

$$a < \frac{1}{y_3 - y_2} (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) < a+h \quad (\text{A15})$$

ここで、次のような変数変換を行う。

$$\begin{cases} y_{23} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3), & Y_{23} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_3) \\ y_{14} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_4), & Y_{14} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_4) \end{cases} \quad (\text{A16})$$

(A 16)式を(A 15)式に代入することにより、(A 15)式は 4 次元位相空間における二つの領域 C, D で表されることが分かる。

$$\begin{cases} C: y_{23} > 0, (a+3)y_{23} < y_{14} < (a+h+3)y_{23} \\ D: y_{23} < 0, (a+3)y_{23} > y_{14} > (a+h+3)y_{23} \end{cases} \quad (\text{A17})$$

従って、変動速度係数 u/z が(A 14)式で表される区間の値をもつ確率密度は、(A 2)式を $n = 4$ として、領域 C, D について体積積分し、微分することによって求まる。すなわち

$$\begin{aligned} P_{II}(a) &= \frac{1}{h} \int^C dy_{23} dY_{23} dy_{14} dY_{14} \rho(y_{23}, Y_{23}, y_{14}, Y_{14}) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int^D dy_{23} dY_{23} dy_{14} dY_{14} \rho(y_{23}, Y_{23}, y_{14}, Y_{14}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \int^C dy_{23} dy_{14} \rho(y_{23}, y_{14}) + \frac{1}{h} \int^D dy_{23} dy_{14} \rho(y_{23}, y_{14}) \quad (\text{A18})$$

(A 18)式は初等積分であり、途中の計算式は煩雑であるが解析的に求まる。すなわち、 u/z が a と $a+h$ の間の値をもつ確率密度は次式で与えられる。

$$P_{II}(a) = \frac{1}{\pi h} \{ \tan^{-1}(a+h+3) - \tan^{-1}(a+3) \} \quad (\text{A19})$$

前回と同様に、 $h \rightarrow 0$ の極限をとることにより、 u/z に対する確率密度関数を導くことができる。すなわち、

$$P_{II}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\pi(x+3)^2+1} \quad (\text{A20})$$

(A 20)式がランダム・ウォーク理論における変動速度係数 u/z の値に対する確率密度関数の解析的表式である。(A 20)式はモデルの標準偏差 σ に依らない定数であることに注意したい。さらに、全確率は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx P_{II}(x) = 1 \quad (\text{A21})$$

である。

A.4 $\frac{v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)}{w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)}$ の確率密度関数

最後に、5 次の変動量 v と 3 次の変動量 w の比 $v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)/w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)$ が次式で与えられる区間の値をもつ確率密度関数を導く。

$$a < \frac{v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)}{w\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)} < a+h, \quad (0 < h \ll 1) \quad (\text{A22})$$

w, v にそれぞれの定義式を代入することにより (A 22)式は次のように表される。

$$a < \frac{(y_1+y_5)-4(y_2+y_4)+6y_3}{(y_2+y_4)-2y_3} < a+h \quad (\text{A23})$$

ここで、次のような変数変換を行う。

$$\begin{cases} y_{15} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_5), Y_{15} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_5) \\ y_{24} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_4), Y_{24} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_4) \end{cases} \quad (\text{A24})$$

(A 24)式を(A 23)式に代入することにより、(A 23)式は5次元位相空間における二つの領域 E , F で表されることが分かる。

$$\begin{cases} E: (a+4)Y_{24} - \sqrt{2}(a+3)y_3 < Y_{15} < (a+h+4)Y_{24} - \sqrt{2}(a+h+3)y_3 \\ F: (a+4)Y_{24} - \sqrt{2}(a+3)y_3 > Y_{15} > (a+h+4)Y_{24} - \sqrt{2}(a+h+3)y_3 \end{cases} \quad (\text{A25})$$

従って、 v/w が(A 25)式で表される区間の値をもつ確率密度は、(A 2)式を $n = 5$ として、領域 E , F について体積積分し、微分することによって求まる。すなわち

$$\begin{aligned} P_{III}(a) &= \frac{1}{h} \int^E dy_3 dy_{15} dY_{15} dy_{24} dY_{24} \rho(y_3, y_{15}, Y_{15}, y_{24}, Y_{24}) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int^F dy_3 dy_{15} dY_{15} dy_{24} dY_{24} \rho(y_3, y_{15}, Y_{15}, y_{24}, Y_{24}) \\ &= \frac{1}{h} \int^E dy_3 dY_{15} dY_{24} \rho(y_3, Y_{15}, Y_{24}) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int^F dy_3 dY_{15} dY_{24} \rho(y_3, Y_{15}, Y_{24}) \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

(A 26)式は初等積分であり、解析的に求めることができる。しかしながら、途中の計算式は非常に煩雑であり、ここではその結果だけを示す。すなわち、変動速度係数 v/w が a と $a+h$ の間の値をもつ確率密度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{III}(a) &= \frac{1}{\pi h} \left[\sin^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3(a+h+3)+1}{\sqrt{3(a+h+3)^2+2(a+h+3)+2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3(a+3)+1}{\sqrt{(a+3)^2+2(a+3)+2}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

(A 27)式において、 $h \rightarrow 0$ の極限をとることにより、 v/w に対する確率密度関数を導くことができる。すなわち、

$$P_{III}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} \quad (\text{A28})$$

が求まる。(A 28)式がランダム・ウォーク理論における変動速度係数 v/w の値に対する確率密度関数の解析的表式である。(A 28)式はモデルの標準偏差 σ に依らない定数であることに注意

したい。さらに、(A 28)式を全空間に対して積分することにより全確率は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx P_{III}(x) = 1 \quad (\text{A29})$$

が得られる。

参考文献

- [1] 香村俊武, 野澤 智「経済指標の変動の解析的研究」城西大学経済経営紀要, 第 21 巻第 1 号, 1-14
- [2] 香村俊武, 野澤 智「経済指標の変動の解析的研究 II」城西大学大学院研究年報, 第 19 号, 23-37, 城西大学大学院経済学研究科
- [3] Satoshi Nozawa and Toshitake Kohmura, Study on Evolution of Stock Price Indices in terms of Oscillation Theory I. Statistical Properties, Josai Journal of Business Administration, 印刷中
ランダム・ウォークについては次の論文を参照した。
- [4] 木島正明「金融工学」日経文庫, 日本経済新聞社
- [5] 高安秀樹, 高安美佐子「エコノフィジックスー市場に潜む物理法則」日本経済新聞社
- [6] 東北大学統計グループ著「これだけは知っておこう!」統計学, 有斐閣ブックス

《Summary》

Analytical Study on the Evolution of Economical Indices III

By Toshitake KOHMURA
Satoshi NOZAWA

In view that stock price indices oscillate in their evolution, it is proposed to analyze the fluctuation of stock price indices in a theory for oscillations. The time evolution of Nikkei 225 is analyzed in terms of the theory for oscillations. The variation of the stock price index in the medium-range period (a half year period) is analyzed. The results are also compared with a standard random walk theory.