

資本資産評価モデルにおける 最高投資効率ポートフォリオ

香村 俊武・野澤 智

まえがき

投資家は投資効率が高い商品を求める。しかし、投資効率が高いと期待される商品ほど、元金が保証されないリスクが大きく、このため、ハイリスクーハイリターンと言われる。投資のリスクを定量化するのは難しいが、通常、収益率の変動の標準偏差をリスクと定義する。資本資産評価モデル（CAPM）では、株式投資において、リスク価格（＝月収益率の平均値/月収益率の標準偏差）が大きい銘柄をリスクに比して収益率が大きいとして投資効率が高いと評価する。複数の株式銘柄を組み合わせてポートフォリオを組むとき、そのリスク価格を最大にするように各銘柄への投資比率を配分して組むポートフォリオを投資効率が最高であるポートフォリオとして、これを市場ポートフォリオと呼ぶ。しかし、資本資産評価モデルにより市場ポートフォリオを求める式は、リスク価格の極値を求める式になっている。このため市場ポートフォリオのリスク価格が最小値に相当して、その収益率が負になることがある。

私達はこれまで経済指標の変動の数理解析を行ってきた。本論文においては、実際に、東京証券取引所第1部において着目した八銘柄について、2003年と04年の株価の変動を調べ、株式市場が均衡市場であると考えて、その銘柄の組み合わせのポートフォリオについて、資本資産評価モデルにより市場ポートフォリオを求めると、その収益率が2004年については負になることを示す。資本資産評価モデルの市場ポートフォリオが負の収益率であり、最高投資効率のポートフォリオになっていないこのような場合については、市場ポートフォリオを採用する代わりに、月収益率の標準偏差を投資家が望む一定値に設定する条件のもとで、月収益率の平均値が最大であるポートフォリオを組むことができる。Lagrangeの未定係数法を用いて、最高効率曲線を求め、条件付きの最高投資効率のポートフォリオを求める方法を提案する。

1. 最高投資効率のポートフォリオ

(1) 条件付きの最高投資効率

M 銘柄 ($m = 1, 2, \dots, M$) の株式について、それぞれの株価の月末値を記録する。 N ヶ月 ($n = 1, 2, \dots, N$) 間における銘柄 m の各月の収益率 r_m^n の平均値を μ_m 、その標準偏差を σ_m とする。この M 銘柄でポートフォリオを組み、銘柄 m への投資比率を w_m とすると、このポートフォリオの月収益率の平均値は

$$\mu_P = \sum_{m=1}^M w_m \mu_m \quad (1)$$

であり、その標準偏差は

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{mm'} \text{Cov}(r_m, r_{m'}) w_m w_{m'}} \quad (2)$$

である。ただし、 $\text{Cov}(r_m, r_{m'})$ は銘柄 m と m' の株価の変動間の共分散を表す。ポートフォリオの月収益率の平均値 μ_P は

$$\mu_P - r_f = \sum_{m=1}^M w_m (\mu_m - r_f) \quad (3)$$

と表すこともできる。ただし、 r_f はリスクフリーの債券の月利率である。

この M 銘柄の株式が均衡市場を成すとする。資本資産評価モデルでは、 M 銘柄を組み合わせる任意のポートフォリオのうちそのリスク価格 $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ を最大にするポートフォリオを、この均衡市場における最高投資効率のポートフォリオであるとして、これを市場ポートフォリオと呼ぶ。市場ポートフォリオでは各銘柄への投資比率 w_m がそのリスク価格 $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ を最大にするから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_m} \left(\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} \right) &= \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_P} - \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P^3} \sum_{m'} \text{Cov}(r_m, r_{m'}) w_{m'} \\ &= \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_P} - \frac{(\mu_P - r_f) \sigma_m}{\sigma_P^3} \sum_{m'} \rho_{mm'} \sigma_{m'} w_{m'} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\rho_{mm'}$ は銘柄 m, m' の株価変動間の相関係数であり、

$$\text{Cov}(r_m, r_{m'}) = \rho_{mm'} \sigma_m \sigma_{m'} \quad (5)$$

である。ゆえに、投資比率 w_m は

$$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P^2} \sum_{m'} \rho_{mm'} \sigma_{m'} w_{m'} = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m} \quad (6)$$

を満たす。以下本論文において、式(4)はリスク価格の極値を求める式であり、この式を解いて

得られる市場ポートフォリオはリスク価格を最大ではなく、最小にするポートフォリオになることがあることを示す。

複数の株式銘柄の組み合わせについて、各銘柄への投資比率が任意であるとする、各銘柄への投資比率によって、そのポートフォリオの月収益率の平均値 μ_p と標準偏差 σ_p は値を変えるが、ポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p と平均値 μ_p を二次元平面上の一点 (σ_p, μ_p) として図示すると、これらのポートフォリオを表す点は二次元平面上の一定の限られた領域内に収まる。この領域の境界線は月収益率の標準偏差 σ_p を一定値に設定する条件のもとにおける月収益率の平均値 μ_p を最大（あるいは、最小）にするポートフォリオを表す点を結ぶ曲線になるため、この曲線を最高効率曲線と呼ぶ。（この曲線は σ_p 軸方向に開いた双曲線状の曲線であり、曲線の下半枝はポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p を一定値に設定する条件のもとにおける月収益率の平均値 μ_p の最小値を表す点を結んだ曲線になっている。このため、曲線の下半枝は最低効率曲線とも呼ぶべきものであるが、曲線の上半枝と下半枝は連結した一本の曲線であるので、以下では、この曲線全体を最高効率曲線と呼ぶことにする。）市場ポートフォリオはリスク価格 $\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$ を最大あるいは最小にするポートフォリオであるから、市場ポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p と平均値 μ_p を表す二次元平面上の点 (σ_p, μ_p) は点 $(0, r_f)$ から最高効率曲線に引いた接線の接点になる。通常、Excelの関数ソルバーなどを用いて、月収益率の平均値 μ_p を一定値に定めて、標準偏差 σ_p の最小値を求める方法で、最高効率曲線を求めるが、銘柄の数が増えると、ソルバーは精度が悪くなり、実用に供しない。そのため、私達は、Lagrange の未定係数法を用いて、この最高効率曲線を求める。

以下に本章で、Lagrange の未定係数法を用いて、最高効率曲線を求める、すなわち、複数の株式銘柄の組み合わせについて、そのポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p を一定値に設定する条件のもとで、月収益率の平均値 μ_p を最大あるいは最小にするポートフォリオを求め、そのポートフォリオにおける各銘柄への投資比率 w_m を求める方法を提案する。このために、未定係数 λ と ν を用いて、a) ポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p を一定値 σ_{p_0} に設定する：

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{mm'} \text{Cov}(r_m, r_{m'}) w_m w_{m'}} = \sigma_{p_0}, \quad (7)$$

そして、b) 各銘柄への投資比率 w_m の和

$$W = \sum_m w_m = 1 \quad (8)$$

とする。この二つの条件のもとで、収益率の平均値 μ_p 、すなわち、

$$\mu_p - r_f = \sum_{m=1}^M w_m (\mu_m - r_f) \quad (9)$$

を最大あるいは最小とする投資比率 w_m を求める：投資比率 w_m が

$$S = \mu_P - r_f - \lambda \sigma_P - \nu W \quad (10)$$

の極値を与えるとする、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial w_m} &= \mu_m - r_f - \frac{\lambda}{\sigma_P} \sum_{m'} \text{Cov}(r_m, r_{m'}) w_{m'} - \nu \\ &= \mu_m - r_f - \frac{\lambda \sigma_m}{\sigma_P} \sum_{m'} \rho_{mm'} \sigma_{m'} w_{m'} - \nu = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

ゆえに、投資比率 w_m は

$$\frac{\lambda}{\sigma_P} \sum_{m'} \rho_{mm'} \sigma_{m'} w_{m'} = \frac{\mu_m - r_f - \nu}{\sigma_m} \quad (12)$$

を満たす。

未知数を

$$x_m = \frac{\lambda \sigma_m w_m}{\sigma_P} \quad (13)$$

として、連立方程式

$$\sum_{m'} \rho_{mm'} x_{m'} = u_m \quad (14)$$

を解くと、ポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_P を一定値に設定する条件のもとに、月収益率の平均値 μ_P を最大あるいは最小にする投資比率

$$w_m = \frac{\sigma_P}{\lambda \sigma_m} x_m \quad (15)$$

が求まる。ただし、

$$u_m = \frac{\mu_m - r_f - \nu}{\sigma_m} \quad (16)$$

である。投資比率の和

$$\sum_m w_m = \frac{\sigma_P}{\lambda} \sum_m \frac{x_m}{\sigma_m} = 1 \quad (17)$$

であるので、式(15)における未知数 $\frac{\sigma_P}{\lambda}$ の値が

$$\frac{\sigma_P}{\lambda} = \frac{1}{\sum_m \frac{x_m}{\sigma_m}} \quad (18)$$

と定まる。また、式(12)により、

$$\sum_m (\mu_m - r_f - \nu) w_m = \frac{\lambda}{\sigma_P} \sum_{mm'} \rho_{mm'} \sigma_m w_m \sigma_{m'} w_{m'} \quad (19)$$

であるから、

$$\mu_P - r_f - \nu = \lambda \sigma_P \quad (20)$$

が成り立ち、このポートフォリオのリスク価格

$$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \lambda + \frac{\nu}{\sigma_P} \quad (21)$$

になる。

以上のように、月収益率の標準偏差 σ_P を一定値に設定する条件のもとに、月収益率の平均値 μ_P を最大あるいは最小にするポートフォリオにおける各銘柄への投資比率 w_m は、各銘柄の月収益率の平均値 μ_m に共通な（化学）ポテンシャル ν を導入して、連立方程式(14)を解くことにより得られる。このポートフォリオの月収益率の平均値 μ_P と標準偏差 σ_P は定義式(1)と(2)により得られる。各銘柄の月収益率に導入するポテンシャル ν の値を変えて、連立方程式(14)を解く計算を繰り返すと、ポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_P をそれぞれ異なる一定値に設定する条件のもとで月収益率の平均値 μ_P を最大（あるいは最小）にするポートフォリオが得られる。各銘柄の月収益率のポテンシャル $\nu = 0$ にすると、リスク価格 $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ を最大にする市場ポートフォリオを求める場合になる。

資本資産評価模型により市場ポートフォリオを求めると、市場ポートフォリオが、リスク価格を最小にし、最高投資効率のポートフォリオにならない場合には、リスク価格を最大にするポートフォリオを求めることはやめにして、その代わりに、上記のように、月収益率の標準偏差 σ_P を一定値に設定して、その条件のもとで月収益率の平均値 μ_P を最大にするポートフォリオを求め、これを条件付きの最高投資効率のポートフォリオであるとする事ができる。

(2) 二株式銘柄のポートフォリオ

この節では、簡単に解析的に扱うことができる二株式銘柄だけでポートフォリオを組む場合を扱い、この場合にはポートフォリオの月収益率の平均値 μ_P と標準偏差 σ_P の関係式が双曲線になり、市場ポートフォリオの特性を明らかにすることができることを示す。この二銘柄を $m = 1$ と 2 と表すと、ポートフォリオの月収益率の平均値 μ_P と標準偏差 σ_P は、

$$\mu_P = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2, \quad (22)$$

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + 2w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + w_2^2 \sigma_2^2 \quad (23)$$

と表される。ただし、 ρ は二銘柄の株価変動間の相関係数であり、

$$\text{Cov}(r_1, r_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2 \quad (24)$$

である。投資比率の和

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (25)$$

であるから、式(22)と(25)により、投資比率は

$$w_1 = \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (26)$$

$$w_2 = -\frac{\mu_P - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (27)$$

と表される。これらの表式を(23)式に代入すると、 μ_P と σ_P の関係式は二次形式、

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 \sigma_P^2 = (\mu_P - \mu_2)^2 \sigma_1^2 - 2(\mu_P - \mu_1)(\mu_P - \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + (\mu_P - \mu_1)^2 \sigma_2^2 \quad (28)$$

となり、双曲線、

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \left\{ \mu_P - \frac{\mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \right\}^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (29)$$

になる。この双曲線は、頂点の座標が

$$\sigma_P = \sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}, \quad (30)$$

$$\mu_P = \frac{\mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (31)$$

であり、 σ_P 軸方向に開いている。また、双曲線の中心軸は

$$\mu_P = \frac{\mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (32)$$

である。

二銘柄の月収益率の平均値 μ_m と標準偏差 σ_m をそれぞれ二次元平面上の点 $P_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ と $P_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ で表すと、双曲線(29)は二点 P_1 と P_2 を通る。二銘柄の月収益率の標準偏差が $\sigma_2 < \sigma_1$ であるとして、一般性を失うことはないので、このように仮定すると、この場合には通常、月収益率の平均値が $\mu_2 < \mu_1$ である。そうすると、双曲線(29)の頂点が、二点 P_1 と P_2 の間にある場合と、点 P_2 の外側にある場合の二つの場合があることが以下のようにして判る。上記の双曲線の中心軸の式を変形すると、

$$\mu_P = \mu_2 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\sigma_2(\sigma_1\rho - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(1-\rho)\sigma_1\sigma_2} \quad (33)$$

となり、また、

$$\frac{\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(1-\rho)\sigma_1\sigma_2} > 0 \quad (34)$$

であるから、 $\sigma_1\rho - \sigma_2 < 0$ 、すなわち、二銘柄の株価変動間の相関係数 ρ が小さく、 $\rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ である場合には、双曲線の頂点は二点 P_1 と P_2 の間に存在し、逆に、 $\sigma_1\rho - \sigma_2 > 0$ 、すなわち、相関係数 ρ が大きく、 $\rho > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ である場合には、頂点は P_2 の外側に存在する。

式(29)で表される双曲線に点 $(0, r_f)$ から接線を引くと、 r_f と双曲線の中心軸の高さ μ_P の大小

により、 $\mu_p > r_f$ の場合には直線が双曲線の上半枝に接し、逆に、 $\mu_p < r_f$ の場合には双曲線の下半枝に接する。つまり、 r_f と双曲線の中心軸の高さ μ_p の大小により、接点に対応する市場ポートフォリオの月収益率の平均値 μ_p がリスクフリー債券の月利率 r_f よりも大きくなったり、小さくなったりする。特に、二銘柄の株価変動間相関係数が大きく、 $\rho > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ である場合には、上述のように、双曲線の中心軸が二点 P_1 と P_2 よりも下方になり、中心軸の高さ $\mu_p < r_f$ である場合には、接点は双曲線の下半枝上にあるために、接点に対応する市場ポートフォリオの月収益率の平均値が、リスクフリー債券の月利率 r_f よりも小さくなる。

2. 株式市場における最高投資効率のポートフォリオ

前章で与えた解析法を、2003-04年における東京証券取引所第1部の代表的な銘柄の株価の変動に応用して、これらの銘柄の組み合わせについて市場ポートフォリオと条件付き最高投資効率ポートフォリオを求めて、その特性を議論する。私達が着目した範囲内の株式銘柄の中から、2003年と04年のそれぞれについて、リスク価格が大きかった銘柄を四銘柄ずつ選んだ。選ばれ

表1 八銘柄の株価の月末値 Dec. 02-Dec. 04

銘柄 証券コード	三洋電 6764	日野自 7205	大成建 1801	旭化成 3407	カネカ 4118	古河電 5801	ツガミ 6101	ソフトバンク 9984
Dec. 02	309	407	189	294	635	249	112	1355
Jan. 03	340	423	215	316	652	301	116	1543
Feb. 03	324	467	222	331	563	271	132	1562
Mar. 03	324	492	222	309	557	247	120	1380
Apr. 03	373	568	254	325	541	219	123	1337
May. 03	381	531	234	341	659	295	138	1598
Jun. 03	411	567	236	343	740	392	181	2275
Jul. 03	451	545	272	366	779	418	193	3480
Aug. 03	474	584	285	442	864	424	206	3420
Sep. 03	467	585	305	421	813	396	209	4720
Oct. 03	504	628	382	524	857	416	207	5650
Nov. 03	490	648	355	523	761	365	187	4150
Dec. 03	560	764	392	582	800	356	195	3280
Jan. 04	588	713	392	546	821	405	215	3750
Feb. 04	535	710	380	540	939	391	236	4040
Mar. 04	518	751	440	611	1044	405	293	4870
Apr. 04	500	655	387	603	1019	426	285	5000
May. 04	432	664	369	543	1025	413	249	4700
Jun. 04	449	790	412	565	1033	466	288	4800
Jul. 04	425	800	353	489	976	454	285	3920
Aug. 04	374	729	375	491	1043	443	290	4680
Sep. 04	357	768	350	476	1082	432	291	5110
Oct. 04	339	706	379	452	1105	444	306	4800
Nov. 04	340	683	407	508	1128	511	302	5080
Dec. 04	354	761	399	513	1160	568	319	4990

表 2 月収益率 Jan. 03-Dec. 04

2003年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク	市場ポートフォリオ
Jan. 03	0.100	0.039	0.138	0.075	0.027	0.209	0.036	0.139	0.088
Feb. 03	-0.047	0.104	0.033	0.047	-0.137	-0.100	0.138	0.012	0.051
Mar. 03	0.000	0.054	0.000	-0.066	-0.011	-0.089	-0.091	-0.117	0.063
Apr. 03	0.151	0.154	0.144	0.052	-0.029	-0.113	0.025	-0.031	0.100
May. 03	0.021	-0.065	-0.079	0.049	0.218	0.347	0.122	0.195	0.057
Jun. 03	0.079	0.068	0.009	0.006	0.123	0.329	0.312	0.424	0.148
Jul. 03	0.097	-0.039	0.153	0.067	0.053	0.066	0.066	0.530	0.069
Aug. 03	0.051	0.072	0.048	0.208	0.109	0.014	0.067	-0.017	0.112
Sep. 03	-0.015	0.002	0.070	-0.048	-0.059	-0.066	0.015	0.380	0.121
Oct. 03	0.079	0.074	0.252	0.245	0.054	0.051	-0.010	0.197	0.128
Nov. 03	-0.028	0.032	-0.071	-0.002	-0.112	-0.123	-0.097	-0.265	0.115
Dec. 03	0.143	0.179	0.104	0.113	0.051	-0.025	0.043	-0.210	0.102

2004年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク	市場ポートフォリオ
Jan. 04	0.050	-0.067	0.000	-0.062	0.026	0.138	0.103	0.143	-0.406
Feb. 04	-0.090	-0.004	-0.031	-0.011	0.144	-0.035	0.098	0.077	-0.428
Mar. 04	-0.032	0.058	0.158	0.131	0.112	0.036	0.242	0.205	-0.378
Apr. 04	-0.035	-0.128	-0.120	-0.013	-0.024	0.052	-0.027	0.027	-0.401
May. 04	-0.136	0.014	-0.047	-0.100	0.006	-0.031	-0.126	-0.060	-0.435
Jun. 04	0.039	0.190	0.117	0.041	0.008	0.128	0.157	0.021	-0.419
Jul. 04	-0.053	0.013	-0.143	-0.135	-0.055	-0.026	-0.010	-0.183	-0.364
Aug. 04	-0.120	-0.089	0.062	0.004	0.069	-0.024	0.018	0.194	-0.376
Sep. 04	-0.045	0.053	-0.067	-0.031	0.037	-0.025	0.003	0.092	-0.234
Oct. 04	-0.050	-0.081	0.083	-0.050	0.021	0.028	0.052	-0.061	-0.284
Nov. 04	0.003	-0.033	0.074	0.124	0.021	0.151	-0.013	0.058	-0.347
Dec. 04	0.041	0.114	-0.020	0.010	0.028	0.112	0.056	-0.018	-0.339

表 3 月収益率の平均値, 標準偏差とリスク価格 2003-04年

2003年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク
平均値	0.053	0.056	0.067	0.062	0.024	0.042	0.052	0.103
標準偏差	0.063	0.068	0.093	0.088	0.097	0.160	0.104	0.242
リスク価格	0.832	0.826	0.718	0.704	0.248	0.260	0.503	0.426

2004年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク
平均値	-0.036	0.003	0.006	-0.008	0.033	0.042	0.046	0.041
標準偏差	0.059	0.087	0.090	0.076	0.052	0.070	0.092	0.108
リスク価格	-0.610	0.039	0.061	-0.100	0.629	0.603	0.500	0.383

たのは、2003年については、三洋電、日野自、大成建と旭化成、そして、2004年はカネカ、古河電、ツガミとソフトバンクであった。これらの計八銘柄について、2003-04年における各月末の株価を表1に記録し、表2に月収益率を示した。また、2003年と04年のそれぞれ一年間における月収益率の平均値、標準偏差およびリスク価格を表3に示した。三洋電と旭化成については、リスク価格が、2003年には高かったが、04年には負になった。日野自と大成建も2003年から04

表 4 株価変動間の相関係数

2003年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク
三洋電	1.000	0.411	0.622	0.427	0.411	0.225	0.161	0.104
日野自	0.411	1.000	0.323	0.250	-0.316	-0.452	-0.012	-0.559
大成建	0.622	0.323	1.000	0.571	-0.039	-0.133	-0.108	0.274
旭化成	0.427	0.250	0.571	1.000	0.356	0.113	0.054	-0.034
カネカ	0.411	-0.316	-0.039	0.356	1.000	0.814	0.455	0.364
古河電	0.225	-0.452	-0.133	0.113	0.814	1.000	0.663	0.546
ツガミ	0.161	-0.012	-0.108	0.054	0.455	0.663	1.000	0.538
ソフトバンク	0.104	-0.559	0.274	-0.034	0.364	0.546	0.538	1.000

2004年	三洋電	日野自	大成建	旭化成	カネカ	古河電	ツガミ	ソフトバンク
三洋電	1.000	0.373	0.216	0.327	-0.209	0.885	0.474	0.057
日野自	0.373	1.000	0.250	0.220	0.063	0.201	0.390	-0.120
大成建	0.216	0.250	1.000	0.717	0.481	0.387	0.647	0.525
旭化成	0.327	0.220	0.717	1.000	0.482	0.480	0.544	0.612
カネカ	-0.209	0.063	0.481	0.482	1.000	-0.196	0.545	0.698
古河電	0.885	0.201	0.387	0.480	-0.196	1.000	0.317	0.137
ツガミ	0.474	0.390	0.647	0.544	0.545	0.317	1.000	0.505
ソフトバンク	0.057	-0.120	0.525	0.612	0.698	0.137	0.505	1.000

年にかけてリスク価格の値を下げた。本章の以下で求める市場ポートフォリオについてその月収益率を求めて、その結果を表2の最右欄に示した。2003年には市場ポートフォリオの月収益率が毎月正になっているが、04年には市場ポートフォリオの各月の月収益率が負になっている。表4に2003年と04年における各銘柄の株価変動間の相関係数を示した。

本論文におけるポートフォリオについての計算では、昨今リスクフリー債券の月利率 r_f が極めて低いことを考慮して、 $r_f = 0$ とする。上記の八銘柄が均衡市場を構成していると仮定して、2003年と04年のそれぞれの1年間について、連立方程式(14)を解いて市場ポートフォリオを求めた。それぞれの年の市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率と、市場ポートフォリオの月収益率の平均値、標準偏差およびリスク価格を求め、その結果を表5に示した。2003年には市場ポートフォリオの月収益率の平均値は0.096であるが、04年には-0.368になった。これは、2004年には資本資産評価モデルで最高投資効率を与えるとする市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率に従って株式を購入すると、損失を被る結果になることを示す。市場ポートフォリオのリスク価格は、2003年には八銘柄のいずれよりも高くなっているが、04年には八銘柄のいずれよりも大変に低い負の値になっている。

2004年においても、月収益率の平均値が正である銘柄が八銘柄のうち六銘柄あるので、このような場合にどのような投資比率にすれば、投資効率が高いポートフォリオになるのかを考察する。第1章で述べた方法により、各銘柄の月収益率にポテンシャル ρ を導入して、ポートフォリオの月収益率の標準偏差を一定値に設定する条件のもとにおいて月収益率の平均値の最大（ある

表5 市場ポートフォリオの投資比率と月収益率の平均値、標準偏差とリスク価格 2003-04年

	2003年	2004年
三洋電	0.355	4.556
日野自	2.233	-0.417
大成建	-1.732	1.120
旭化成	0.867	0.464
カネカ	-0.569	0.277
古河電	0.446	-3.532
ツガミ	-1.393	-1.374
ソフトバンク	0.793	-0.094
収益率平均	0.096	-0.368
標準偏差	0.030	0.058
リスク価格	3.250	-6.387

表6 条件付き最高投資効率ポートフォリオの投資比率と月収益率の平均値、標準偏差とリスク価格 2004年

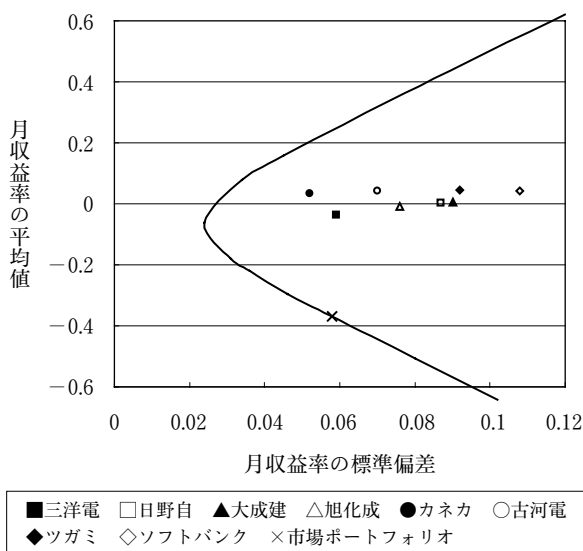
ν	-0.02	0	0.02	0.06	∞	-0.2	-0.15	-0.1
三洋電	6.118	4.556	3.743	2.908	1.165	-0.410	-1.320	-4.717
日野自	-0.588	-0.417	-0.328	-0.236	-0.045	0.128	0.228	0.600
大成建	1.524	1.120	0.910	0.695	0.244	-0.162	-0.397	-1.275
旭化成	0.686	0.464	0.349	0.231	-0.016	-0.239	-0.368	-0.849
カネカ	0.064	0.277	0.387	0.501	0.738	0.952	1.075	1.537
古河電	-4.915	-3.532	-2.813	-2.073	-0.531	0.863	1.668	4.675
ツガミ	-1.795	-1.374	-1.155	-0.930	-0.460	-0.035	0.210	1.125
ソフトバンク	-0.094	-0.094	-0.094	-0.095	-0.095	-0.095	-0.096	-0.097
収益率平均	-0.508	-0.368	-0.295	-0.220	-0.063	0.078	0.159	0.464
標準偏差	0.080	0.058	0.046	0.036	0.024	0.034	0.045	0.094
リスク価格	-6.337	-6.387	-6.347	-6.106	-2.653	2.283	3.528	4.943

いは最小) 値を与えるポートフォリオを求めた。ポテンシャル ν として代表的な値 $\nu = -0.2, -0.15, -0.1, -0.02, 0, 0.02, 0.06$ と ∞ のそれぞれについて連立方程式(14)を解いて、得られたポートフォリオにおける各銘柄への投資比率と、そのポートフォリオの月収益率の平均値、標準偏差およびリスク価格を求めて、その結果を表6に示した。ポテンシャル ν のそれぞれの値について得られたポートフォリオの月収益率の標準偏差 σ_p と平均値 μ_p を表す点 (σ_p, μ_p) を互いに結んで得られる曲線を最高効率曲線として図1に図示した。ポテンシャル ν の値と双曲線状の最高効率曲線上の点が連続的に一対一に対応する。ポテンシャル $\nu = \infty$ は、双曲線状の最高効率曲線の頂点に対応する。また、

$$\nu = \frac{\sum_m \frac{x_m(\nu = 0)}{\sigma_m}}{\sum_m \frac{x_m(\nu = \infty)}{\sigma_m}} = -0.0634 \dots \quad (35)$$

は、ポートフォリオを表す最高効率曲線上の点が双曲線状の曲線の下半枝の無限遠先端から上半

図1 最高効率曲線 八銘柄とポートフォリオの月収益率の平均値と標準偏差 2004年



枝の無限遠先端にとぶの臨界値である。つまり、ポテンシャル $\rho > -0.0634\dots$ である場合のポートフォリオは、曲線の下半枝上の一点に対応し、 $\rho < -0.0634\dots$ である場合のポートフォリオは、曲線の上半枝上の一点に対応する。

図1に八銘柄のそれぞれについて2004年の月収益率の標準偏差 σ_m と平均値 μ_m を表す点 (σ_m, μ_m) も記した。最高効率曲線は八銘柄それぞれの月収益率の平均値と標準偏差を表す八点を左側から包む双曲線状の曲線となり、資本資産評価模型が与える市場ポートフォリオを表す点 \times は、原点 O から最高効率曲線に引いた接線の接点であり、双曲線状の最高効率曲線の下半枝上に存在する。最高効率曲線の上半枝は、この八銘柄の株式によりポートフォリオを組み、月収益率の標準偏差を一定値に設定する条件のもとにおける月収益率の平均値の最大値を表す点を結ぶ曲線であり、文字通りに、ポートフォリオの月収益率の標準偏差を一定値に設定する条件のもとにおける最高投資効率を表す曲線である。2004年には、市場ポートフォリオが月収益率の平均値を負にして、最高投資効率のポートフォリオとして機能せず、リスク価格が最大であるポートフォリオが八銘柄の組み合わせでは得られないことになる。このような場合には、月収益率の標準偏差 σ_p を一定値に設定して、そして、その条件のもとで月収益率の平均値 μ_p を最大にするポートフォリオを求めることができる。これを条件付きの最高投資効率のポートフォリオと呼ぶことにする。条件付きの最高投資効率のポートフォリオを決めるためには、その月収益率の標準偏差の値 σ_p を投資家が望む値に設定する必要がある。

2004年には資本資産評価模型で最高投資効率であるとする市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率に従って株式を購入すると、各月の月収益率が負になり、損失を被る結果になった。選んだ八銘柄のうちの大半である六銘柄の月収益率の平均値が正であったのに、どうして、

市場ポートフォリオの月収益率の平均値が負になったのであろうか。その理由は、2004年には月収益率の標準偏差が小さかった三洋電の月収益率の平均値が負になり、そして、月収益率の標準偏差が大きい銘柄である古河電やツガミと株価変動間の相関係数 $\rho_{mm'}$ が大きかったためである。第1章(2)で、二銘柄でポートフォリオを組む場合について、ポートフォリオの月収益率の平均値と標準偏差の間の関係式は双曲線になり、二銘柄の株価変動間の相関係数 ρ が大きい場合には、市場ポートフォリオを表す双曲線上の点は、二銘柄を表す双曲線上の二点 P_1 と P_1 の外側、つまり、月収益率の標準偏差の小さい銘柄を表す点の外側にある、すなわち、市場ポートフォリオの月収益率の平均値は月収益率の標準偏差が小さい方の銘柄のそれよりも小さいことを示した。実際に、図1に示すように、2004年の八銘柄の市場ポートフォリオを表す点×は三洋電を表す点■の外側、つまり、双曲線状の最高効率曲線の下半枝上にあつて、市場ポートフォリオの月収益率の平均値が負になる。その理由が三洋電と古河電やツガミとの相関係数が大きかったためであることを見るために、三洋電と古河電およびツガミとの相関係数 $\rho_{mm'}$ を、表4にある実際の値を用いずに、仮に0であるとしてポートフォリオを求める計算をすると、2004年の市場ポートフォリオのリスク価格が負から正に変わる。

参考文献

- [1] グロービスマネジメントインスティテュート著「MBA ファイナンス」ダイヤモンド社
- [2] 木島正明「経済入門シリーズ」「金融工学」日本経済新聞社
- [3] 香村俊武・野澤 智「資本資産評価模型における市場ポートフォリオの特性」『城西大学経営紀要』印刷中
- [4] 香村俊武・野澤 智「経済指標の変動の解析的研究—株価は過去を記憶して変動する—」『城西大学経済経営紀要』21(1), 2003
- [5] 香村俊武・野澤 智「経済指標の変動の解析的研究II—株価が下降局面から上昇局面に転ずる時点を探る—」『城西大学大学院研究年報』経済学研究科 19(23), 2003
- [6] Satoshi Nozawa and Toshitake Kohmura「Study on Evolution of Stock Price Indices in terms of Oscillation Theory I. Statistical Properties」『Josai Journal of Business Administration』1(45), 2004
- [7] 香村俊武・野澤 智「経済指標の変動の解析的研究III—株価の中期的変動傾向と平均変動量—」『城西大学経済経営紀要』22(1), 2004
- [8] 香村俊武・野澤 智「経済指標の変動の解析的研究IV—株価の変動に関する変動速度依存力理論と仮想均衡価格理論—」『城西大学大学院研究年報』経済学研究科, 20(37), 2004
- [9] 木島正明・青沼君明「Excel & VBA で学ぶファイナンスの数理」金融財政事情研究会