資本資産評価模型における市場ポートフォリオの特性

香村　俊武・野澤　　智

要　旨

資本資産評価模型（CAPM）にしたがって市場ポートフォリオを求め，その株価の変動を解析する。市場ポートフォリオの株価の変動はそれを構成する銘柄間の株価変動相関係数行列の固有ベクトルで展開できる。個々の固有ベクトルが市場ポートフォリオの固有発展のモードを規定する。2003 年の東京証券所第 1 部において選んだ複数の銘柄の市場ポートフォリオを求め，固有発展モードの特性を調べる。

キーワード：資本資産評価模型（CAPM），市場ポートフォリオ，相関係数

1.　はじめに

資本資産評価模型（CAPM）における市場ポートフォリオの特性を調べる。均衡市場を構成する銘柄群について市場ポートフォリオを決めて，銘柄間の株価変動の相関係数行列をスペクトル分解する。そして，その固有ベクトルを市場ポートフォリオの株価変動の固有変動モードと定義する。固有変動モードは，市場ポートフォリオを構成する個別の銘柄のリスク価格よりもリスク価格が高い固有変動モードと，低い固有変動モードに分類できる。全般的に株価が上昇した 2003 年 1 年間における東証第 1 部から選んだ銘柄の市場ポートフォリオについて，固有変動モードの特性を論じる。

2.　資本資産評価模型（CAPM）

現代企業金融論では，企業の資産において，株式資本が債券資本に並んで重要な役割を果たす。株式資本の評価額，すなわち，株価が上昇することが株式市場においてその企業の経営が評価されていることを示す指標になる。投資家は株価が上昇することを期待して企業に投資する。企業

家は，その期待に応えるべく株価を上げるために，株式資本を有効に活かして，企業業績を上げることを求められる。このため，投資家から株価の上昇を期待されることは企業家にとって株式資本を導入することのコストと見なされる。

株式投資した企業の株価の収益率は資本資産評価模型（CAPM）において解析されており，その銘柄が均衡市場に属しているとすると，その市場における市場ポートフォリオの株価の収益率と関係付けられる。

私達はこれまで経済指標の変動の数理解析を行ってきた。本論文においては，企業金融において企業が株式資本を最高効率で活用する方策を探る研究の一環として，資本資産評価模型における市場ポートフォリオの特性を議論する。市場ポートフォリオは，均衡市場を構成する銘柄の組み合わせからなるポートフォリオのうち，リスク価格を最大にするポートフォリオであると定義される。私達は，市場ポートフォリオを構成する銘柄間の株価変動の相関係数行列を扱い，この行列の固有ベクトルを市場ポートフォリオの株価変動の固有変動モードと定義する。市場ポートフォリオの株価の変動を固有変動モードに分解すると，市場ポートフォリオを構成する個別銘柄のリスク価格よりもリスク価格が高い固有変動モードと，低い固有変動モードに分解する。全般的に株価が上昇した2003年1年間の東証第1部について市場ポートフォリオの特性を調べた。リスク価格が高い固有変動モードは市場ポートフォリオの株価の一年間にわたる変動の全般的な上昇変動成分に対応し，リスク価格が低い固有変動モードは市場ポートフォリオの株価変動の振動変動成分に対応することを解明した。

3.　市場ポートフォリオ

⑴　市場ポートフォリオ

株式の M 銘柄について，それぞれの株価の月末値を記録する。所定の N ヶ月間における銘柄 m の各月の収益率 r_m の平均値を μ_m，その標準偏差を σ_m とする。ただし，$m = 1, 2, \cdots, M$。この M 銘柄でポートフォリオを組み，銘柄 m への投資比率を w_m とすると，このポートフォリオの収益率の平均値は

$$\mu_M = \sum_{m=1}^{M} w_m \mu_m \quad (1)$$

であり，収益率の標準偏差は

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{mm'} \mathrm{Cov}(r_m, r_{m'}) w_m w_{m'}} \quad (2)$$

である。ただし，$\mathrm{Cov}(r_m, r_{m'})$ は銘柄 m と m' の株価の変動間の共分散を表す。この M 銘柄の

株式が均衡市場を成すとする。資本資産評価模型では，M 銘柄を組み合わせて作る任意のポートフォリオのうちそのリスク価格 $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$ を最大にするポートフォリオを，この均衡市場における最高効率のポートフォリオであるとして，市場ポートフォリオと呼ぶ。ただし，r_f はリスクフリーの債券の金利である。ポートフォリオのリスク価格 $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$ を各銘柄の投資比率 w_m で偏微分して，

$$\frac{\partial}{\partial w_m}\frac{\sum_m (\mu_m - r_f) w_m}{\sqrt{\sum_{mm'} \mathrm{Cov}(r_m, r_{m'}) w_m w_{m'}}} = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_M} - \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M^3}\sum_{m'} \mathrm{Cov}(r_m, r_{m'}) w_{m'}$$

$$= \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_M} - \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M^3}\mathrm{Cov}(r_m, r_M) = 0 \qquad (3)$$

とおくと，市場ポートフォリオにおける銘柄 m の収益率の平均値 μ_m と市場ポートフォリオの収益率の平均値 μ_M の間に次の関係式が成り立つ。

$$\mu_m - r_f = \frac{\mathrm{Cov}(r_m, r_M)}{\mathrm{Var}(r_M)}(\mu_M - r_f)$$

$$= \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}\sum_{m'=1}^{M} \mathrm{Cov}(r_m, r_{m'}) w_{m'}$$

$$= \frac{(\mu_M - r_f)\sigma_m}{\sigma_M^2}\sum_{m'=1}^{M} \rho_{mm'}\sigma_{m'} w_{m'}. \qquad (4)$$

ただし，r_M は市場ポートフォリオの各月の収益率を表し，$\rho_{mm'}$ は銘柄 m と m' の株価の変動間の相関係数を表す。分散 $\mathrm{Var}(r_M)$ と共分散 $\mathrm{Cov}(r_m, r_{m'})$ は，標準偏差 σ と相関係数 ρ を用いて，

$$\mathrm{Var}(r_M) = \sigma_M^2,$$
$$\mathrm{Cov}(r_m, r_{m'}) = \sigma_m \rho_{mm'} \sigma_{m'} \qquad (5)$$

と表される。式(4)により，

$$\frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}\sum_{m'} \rho_{mm'}\sigma_{m'} w_{m'} \qquad (6)$$

が成り立つ。したがって，未知数

$$x_m = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}\sigma_m w_m \qquad (7)$$

を定義すると，x_m は連立方程式

$$\rho_{11}x_1+\rho_{12}x_2+\cdots+\rho_{1M}x_M=u_1,$$
$$\rho_{21}x_1+\rho_{22}x_2+\cdots+\rho_{2M}x_M=u_2,$$
$$\cdots$$
$$\rho_{M1}x_1+\rho_{M2}x_2+\cdots+\rho_{MM}x_M=u_M \tag{8}$$

を満たす。ただし，

$$\rho_{mm}=1 \tag{9}$$

であり，また，

$$u_m=\frac{\mu_m-r_f}{\sigma_m} \tag{10}$$

は銘柄 m のリスク価格である。

連立方程式（8）の解は

$$x_m=\frac{D_m}{D} \tag{11}$$

である。ただし，

$$D=\begin{vmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} & \cdots & \rho_{1M}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2m} & \cdots & \rho_{2M}\\ & & & \cdots & & \\ \rho_{M1} & \rho_{M2} & \cdots & \rho_{Mm} & \cdots & \rho_{MM}\end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$D_m=\begin{vmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & u_1 & \cdots & \rho_{1M}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & u_2 & \cdots & \rho_{2M}\\ & & & \cdots & & \\ \rho_{M1} & \rho_{M2} & \cdots & u_M & \cdots & \rho_{MM}\end{vmatrix}. \tag{13}$$

ここで，行列式 D_m は行列式 D の m 列の ρ の値を u に置き換えたものである。市場ポートフォリオにおける投資比率 w_m の和

$$\sum_{m=1}^{M} w_m=1 \tag{14}$$

であるから，連立方程式（8）の解 x_m (11)を得ると，和

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{x_m}{\sigma_m}=\sum_{m=1}^{M}\frac{\mu_M-r_f}{\sigma_M^2}w_m$$
$$=\frac{\mu_M-r_f}{\sigma_M^2} \tag{15}$$

により $\dfrac{\mu_M-r_f}{\sigma_M^2}$ の値が定まり，この値を用いて市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率

$$w_m = \frac{x_m}{\sigma_m \dfrac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}} \tag{16}$$

が求まる。

(2) 投資比率

本節において，市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率 w_m の特性について論じる。銘柄 m の第 n 月（$n=1, 2, \cdots, N$）の収益率 r_m^n の平均値 μ_m からのずれを収益率の標準偏差 σ_m で規格化して，$v_m^n = \dfrac{r_m^n - \mu_m}{\sqrt{N}\,\sigma_m}$ と表すと，v_m^n（$n=1, 2, \cdots, N$）を成分とする N 次元のベクトル

$$\vec{v}_m = \begin{pmatrix} v_m^1 \\ v_m^2 \\ \cdots \\ v_m^N \end{pmatrix} \tag{17}$$

は N ヶ月間に銘柄 m の株価が変動した状況を表すベクトルとなり，これは N 次元空間における単位ベクトルになる。この単位ベクトル $\vec{v}_m$ を銘柄 m の変動ベクトルと呼ぶ。銘柄 m と m' の株価の変動間の相関係数 $\rho_{mm'}$ は銘柄 m と m' の変動ベクトルの内積になる：

$$\begin{aligned} \rho_{mm'} &= \frac{\mathrm{Cov}(r_m, r_{m'})}{\sigma_m \sigma_{m'}} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{(r_m^n - \mu_m)}{\sqrt{N}\,\sigma_m} \frac{(r_{m'}^n - \mu_{m'})}{\sqrt{N}\,\sigma_{m'}} \\ &= \vec{v}_m \cdot \vec{v}_{m'}. \end{aligned} \tag{18}$$

相関係数 $\rho_{mm'}$ が単位ベクトルの内積であるため，連立方程式(8)の解 x_m (11)の分母にある相関係数 $\rho_{mm'}$ の行列の行列式 D (12)は，次の性質をもつ。

① 均衡市場を構成する株式の銘柄数 M が，変動ベクトル $\vec{v}_m$ が張る空間の次元 N よりも大きくなく（$M \leq N$），かつ，変動ベクトル $\vec{v}_m$（$m=1, 2, \cdots, M$）が互いに線形独立である場合には，行列式 D は正値になる：$D > 0$。銘柄数 $M \leq N$ であり，かつ，ベクトル $\vec{v}_m$ が互いに線形従属である場合には，$D=0$ になる。行列式 $D=0$ である場合には，連立方程式(8)の解は存在せず，市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率は決まらない。

② 銘柄数 M が，変動ベクトル $\vec{v}_m$ が張る空間の次元 N よりも大きい（$M > N$）場合には，必ずベクトル $\vec{v}_m$（$m=1, 2, \cdots, M$）の中に互いに線形従属なベクトルが存在する。このため，行列式 $D=0$ になる。この場合にも，連立方程式(8)の解は存在せず，各銘柄への投

資比率は決まらない。

変動ベクトル $\vec{v}_m$ が互いに線形独立である銘柄群については，連立方程式（8）の解 x_m (11)において，行列式 $D>0$ であるから，行列式 $D_m>0$ であれば，連立方程式の解 $x_m>0$ になるが，$D_m<0$ であれば，解 $x_m<0$ になる。市場ポートフォリオにおける銘柄 m への投資比率 $w_m=\frac{\sigma_M^2 x_m}{\sigma_m(\mu_M-r_f)}$ (16)であり，市場ポートフォリオの収益率 μ_M はリスクフリー債券の収益率 r_f よりも大きいと考えられ，$\mu_M-r_f>0$ であるから，解 x_m，すなわち，行列式 D_m の正負符号が銘柄 m への投資比率 w_m の正負を決める。

ここでしばらく問題を簡単にして，均衡市場がただ二株式銘柄だけから成る場合を扱い，この二銘柄の組み合わせで，市場ポートフォリオを組み，各銘柄への投資比率が正になるか，負になるかを検討する問題を扱う。この二銘柄を $m=1$ と 2 とすると，この場合，市場ポートフォリオにおけるそれぞれの銘柄への投資比率に関する連立方程式（8）は

$$\begin{aligned}\rho_{11}x_1+\rho_{12}x_2&=u_1,\\ \rho_{21}x_1+\rho_{22}x_2&=u_2\end{aligned}\tag{19}$$

になる。この連立方程式の解は，

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{D_1}{D},\\ x_2&=\frac{D_2}{D},\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1&\rho_{12}\\ \rho_{21}&1\end{vmatrix},\\ D_1&=\begin{vmatrix}u_1&\rho_{12}\\ u_2&1\end{vmatrix},\\ D_2&=\begin{vmatrix}1&u_1\\ \rho_{21}&u_2\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{22}$$

である。投資比率 w_1 と w_2 がともに正であるためには，x_1 と x_2 がともに正であることが必要であり，このため，銘柄1と2の株価の変動が互いに線形独立であり，行列式 $D>0$ である場合には，D_1 と D_2 がともに正であることが必要になる。したがって，

$$\begin{aligned}D_1&=u_1-\rho_{12}u_2>0,\\ D_2&=u_2-\rho_{21}u_1>0.\end{aligned}\tag{23}$$

リスク価格 u_1 と u_2 がともに正である場合を扱うことにすると，上の二不等式により，

$$\frac{u_1}{u_2} > \rho_{12},$$

$$\frac{u_2}{u_1} > \rho_{21} \tag{24}$$

がともに成立しなければならない。銘柄1が2よりもリスク価格が高く，$u_1 > u_2 > 0$ であるとすると，$\frac{u_1}{u_2} > 1 > \frac{u_2}{u_1}$ である。また，株価変動の相関係数 ρ は対称，すなわち，$\rho_{12} = \rho_{21}$ であり，かつ，$1 > \rho_{12} > -1$ であるから，(24)の両式が成り立つためには，

$$1 > \frac{u_2}{u_1} > \rho_{12} \tag{25}$$

でなければならない。すなわち，リスク価格が低い銘柄2が市場ポートフォリオに含まれて，その投資比率 $w_2 > 0$ になるためには，リスク価格の比 $\frac{u_2}{u_1}$ が相関係数 ρ_{12} よりも大きくなければならない。リスク価格 $u_m = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m}$ が低いため上の条件を満たさない銘柄は，その銘柄への投資比率が負になり，市場ポートフォリオに正の投資比率でもって入ることができない。三以上の銘柄が均衡市場を構成する場合にも，同様に，リスク価格が低い銘柄は，市場ポートフォリオに正の投資比率でもって入ることができない。

⑶　株価変動の線形独立性

ここで再び一般的に M 銘柄からなる均衡市場に戻ることにする。銘柄 m の株価の変動ベクトル $\vec{v}_m$ は，縦ベクトル $|m\rangle$ で表すことができ，また，横ベクトル $\langle m|$ で表すこともできる：

$$|m\rangle = \begin{pmatrix} v_m^1 \\ v_m^2 \\ \cdots \\ v_m^N \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\langle m| = (v_m^1 v_m^2 \cdots v_m^N). \tag{27}$$

これらの表式を用いると，銘柄 m と m' の株価の変動間の相関係数

$$\rho_{mm'} = \vec{v}_m \cdot \vec{v}_{m'} = \langle m|m'\rangle \tag{28}$$

と表される。

本節では，Schmidt の直交化法と行列式の性質を用いて，銘柄間の株価変動相関係数の行列式 D (12)を対角行列の行列式で表す。銘柄 m の株価の変動を表す縦ベクトル $|m\rangle$ ($m = 1, 2, 3, \cdots, M$) を，Schmidt の直交化法を用いて，$|1\rangle$ から順に互いに直交化して，直交縦ベクトル群

$$|\bar{m}\rangle = |m\rangle - \sum_{k=1}^{m-1} |\bar{k}\rangle\langle\bar{k}|m\rangle / \langle\bar{k}|\bar{k}\rangle \tag{29}$$

を定義する。同様に，横ベクトルについても，直交横ベクトル群

$$\langle \bar{m}| = \langle m| - \sum_{k=1}^{m-1} \langle m|\bar{k}\rangle\langle\bar{k}|/\langle\bar{k}|\bar{k}\rangle \tag{30}$$

を定義する。ただし，$|\bar{1}\rangle = |1\rangle, \langle\bar{1}| = \langle 1|$ とする。ベクトル $|\bar{m}\rangle$ はベクトル $|m\rangle$ の $|1\rangle$, $|2\rangle, \cdots, |m-1\rangle$ に直交する成分を表し，ベクトル $\langle\bar{m}|$ についても同様である。

これらの直交ベクトル $|\bar{m}\rangle$ と $\langle\bar{m}|$ を用いて，銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ の行列式 D (12)を対角行列の行列式で表すことができる：

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \langle\bar{1}|\bar{1}\rangle & & & 0 \\ & \langle\bar{2}|\bar{2}\rangle & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \langle\bar{M}|\bar{M}\rangle \end{vmatrix} \\ &= \prod_{m=1}^{M} \langle\bar{m}|\bar{m}\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

附録において上式を証明する。

⑷　逆 行 列 法

本節において，逆行列を用いて連立方程式(8)を解く方法について述べる。銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ の行列 A ，解 x_m を表すベクトル $\vec{x}$ とリスク価格 u_m を表すベクトル $\vec{u}$ を用いて，連立方程式(8)をベクトル方程式として表すと，

$$A\vec{x} = \vec{u} \tag{32}$$

になる。ただし，

$$A = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1M} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2M} \\ & & \cdots & \\ \rho_{M1} & \rho_{M2} & \cdots & \rho_{MM} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_M \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_M \end{pmatrix}. \tag{35}$$

行列 A の行列式 $D \neq 0$ である場合には，行列 A の逆行列 A^{-1} が存在する。方程式(32)の両辺に逆行列 A^{-1} を掛けると，

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{u}. \tag{36}$$

単位行列を I と表すと，

$$A^{-1}A = I \tag{37}$$

であるから，連立方程式(8)，すなわち，(32)の解が求まる：

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{u}. \tag{38}$$

得られた解 x_m に式(15)-(16)の操作を行うと，投資比率 w_m が求まる。

⑸ 対 角 化 法

本節において，銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ の行列 A を直交行列により対角化することにより，連立方程式(8)，すなわち，(32)の解を得る方法を考察する。株価変動相関係数の行列 A の固有値 λ_i に対応する固有単位ベクトルを $\vec{e}_i$ と表す：

$$A\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i. \tag{39}$$

対称行列 A は，その固有単位ベクトルを並べてできる直交行列

$$O = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_M) \tag{40}$$

を用いて直交変換すると，対角行列になる：

$$O^{-1}AO = A'. \tag{41}$$

対角行列 A' の対角成分は行列 A の固有値 λ_i である。

方程式(32)は，行列 A を直交行列 O により対角化する処方により，

$$A'O^{-1}\vec{x} = O^{-1}\vec{u} \tag{42}$$

になる。ベクトル

$$\vec{x}' = O^{-1}\vec{x}, \tag{43}$$

$$\vec{u}' = O^{-1}\vec{u} \tag{44}$$

を定義すると，(42)式は，

$$A'\vec{x}' = \vec{u}' \tag{45}$$

になる。行列 A' は対角行列であるから，連立方程式(8)は分解して，

$$\lambda_i x_i' = u_i' \tag{46}$$

になる。したがって，方程式(45)の解

$$x_i' = \frac{u_i'}{\lambda_i} \tag{47}$$

が求まる。解 x_i' が求まると，直交変換 O により，解 x_m が求まる：

$$\vec{x} = O\vec{x}'. \tag{48}$$

得られた解 x_m に式(15)-(16)の操作を行うと，投資比率 w_m が求まる。

銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ の行列 A の固有値は非負である。行列 A の固有値の中に値が極端に小さい固有値 λ_i が存在すると，方程式(45)の解 x'_i (47)の絶対値が大きくなり，市場ポートフォリオにおける銘柄 m への投資比率の条件 $1 > w_m > 0$ に適しなくなる。したがって，銘柄のある一定の組み合わせについて，株価変動の相関係数の行列 A の固有値のうち，一つ以上の固有値が極端に小さくなる場合には，各銘柄への投資比率をすべて正にして，市場ポートフォリオを組むことができない。銘柄間の株価変動が互いに線形従属であり，変動相関係数の行列 A の固有値に 0 が含まれる場合には，リスク価格が低い銘柄への投資比率が負になる。各銘柄への投資比率をすべて正にして，市場ポートフォリオを組むことができるためには，その銘柄の組み合わせが，相関係数の行列 A が極端に小さい固有値をもたず，また，リスク価格が低い銘柄を除いた組み合わせでなければならない。

⑹ 固有変動モード

銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ は企業 m と m' の特徴により決まる量であり，株価が変動する局面においても，その収益率ほど急激には変化しないと考えられる。すると，銘柄間の株価変動相関係数の行列 A の固有値，および，それに対応する固有ベクトルは時間とともに変化する度合いが収益率の変化に比べて小さい。したがって，株価変動相関係数の行列 A の固有ベクトルに対応する銘柄の組み合わせは持続的に設定され，固有ベクトルに対応する銘柄の組み合わせごとにその株価が互いに独立な変動をして，固有な変動モードを生じる。本節において，銘柄間の株価変動相関係数行列をスペクトル分解して，上述した連立方程式(8)を解くための二方法，すなわち，逆行列法と対角化法を関連づけ，市場ポートフォリオの株価変動を固有変動モードに分解する処方を述べる。

銘柄間の株価変動相関係数の行列 A を，その固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{e}_i$ を用いて，スペクトル分解すると，

$$A = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \vec{e}_i \vec{e}_i^{\mathrm{T}}. \tag{49}$$

ただし，T は転置ベクトルを表す。このスペクトル分解の表式を用いると，行列 A の逆行列は

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{-1} \vec{e}_i \vec{e}_i^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

と表される。したがって，行列 A の逆行列を用いる連立方程式(8)の解の表式(38)は

$$\begin{aligned}\vec{x} &= A^{-1}\vec{u}\\ &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{-1}\vec{e}_i\vec{e}_i^{\mathrm{T}}\cdot\vec{u}\\ &= \sum_{i=1}^{M} \frac{\vec{e}_i^{\mathrm{T}}\cdot\vec{u}}{\lambda_i}\vec{e}_i \end{aligned} \tag{51}$$

となり，市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率に関するベクトル $\vec{x}$ が行列 A の固有ベクトル $\vec{e}_i$ の線形結合で表される。この線形結合の係数は $\dfrac{\vec{e}_i^{\mathrm{T}}\cdot\vec{u}}{\lambda_i}=\dfrac{u_i'}{\lambda_i}$ となり，これは対角化法における解 x_i' (47)に相当する。株価変動相関係数の行列 A の固有ベクトル $\vec{e}_i$ が表す変動を固有変動モードと呼び，そして，上式のように市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率 $\vec{x}$ を固有変動モード $\vec{e}_i$ で分解することを固有変動モード分解と呼ぶ。

株価変動相関係数の行列 A の固有ベクトル $\vec{e}_i$ に対応する銘柄の組み合わせの株価の変動が固有変動モードに相当する。その固有変動モードの発現の強さ $\dfrac{u_i'}{\lambda_i}=\dfrac{\vec{e}_i^{\mathrm{T}}\cdot\vec{u}}{\lambda_i}$ はその銘柄の組み合わせを構成する各銘柄 m のリスク価格 u_m により決まる。

4. 東証における市場ポートフォリオ

2003 年 1 年間の東証 1 部に上場する株式銘柄の株価の変動を用いて，市場ポートフォリオを組むことを試みる。まず，東証 1 部に上場する銘柄の中から主な銘柄に着目し，その中でリスク価格が最も高い 12 銘柄を選び，表 1 にそれをリスク価格が高い順に並べて，その株価と月収益率を示した。12 銘柄を選んだ理由は，1 年，すなわち，12 ヶ月（$N=12$）において各銘柄の株価の変動が互いに線形独立になるのは，高々12 銘柄（$M=N=12$）に限られるからである。それ以上の数の銘柄を採用すると，各銘柄の株価の変動が互いに線形従属になり，株価変動の相関係数の行列式 $D=0$ となり，連立方程式(8)の解が存在せず，市場ポートフォリオを組むことができない。なお，本論文の解析において，昨今，リスクフリー債券の収益率 r_f は極端に小さく抑えられているため，これを無視し，また，株式の収益には株式の売買価だけを考慮し，配当の寄与は小さいとして，これも無視した。選んだ 12 銘柄について銘柄間の株価変動の相関係数 $\rho_{mm'}$ を表 2 に示した。

表 3 に，この 12 銘柄の中から，リスク価格が高い銘柄から順に 1 銘柄，2 銘柄，…，12 銘柄だけに限った場合について，それぞれ，それらの銘柄について株価変動相関係数の行列の行列式 D を計算し，その値を示した。この 12 銘柄全体については株価変動の相関係数が成す 12 行 12 列の行列の行列式 D は 0 であった。これはこの 1 年間においてこれら銘柄の株価の変動が互いに線形独立ではなくて，線形従属であったことを意味する。したがって，これら 12 銘柄全体については連立方程式(8)の解は存在せず，12 銘柄の全てを用いて，市場ポートフォリオを組む

表１　株価，収益率とリスク価格

年　月	三洋電	月収益率	日野自	月収益率	大成建	月収益率	旭化成	月収益率
Jan. −03	340	0.100	423	0.039	215	0.138	316	0.075
Feb. −03	324	−0.047	467	0.104	222	0.033	331	0.047
Mar.−03	324	0.000	492	0.054	222	0.000	309	−0.066
Apr.−03	373	0.151	568	0.154	254	0.144	325	0.052
May−03	381	0.021	531	−0.065	234	−0.079	341	0.049
Jun. −03	411	0.079	567	0.068	236	0.009	343	0.006
Jul. −03	451	0.097	545	−0.039	272	0.153	366	0.067
Aug.−03	474	0.051	584	0.072	285	0.048	442	0.208
Sep. −03	467	−0.015	585	0.002	305	0.070	421	−0.048
Oct. −03	504	0.079	628	0.074	382	0.252	524	0.245
Nov.−03	490	−0.028	648	0.032	355	−0.071	523	−0.002
Dec. −03	560	0.143	764	0.179	392	0.104	582	0.113
収益率平均値		0.053		0.056		0.067		0.062
収益率標準偏差		0.063		0.068		0.093		0.088
リスク価格		0.832		0.826		0.718		0.704

年　月	UFJ	月収益率	日本粉	月収益率	セイコー	月収益率	東武	月収益率
Jan. −03	137	0.142	262	0.056	174	−0.065	308	−0.022
Feb. −03	139	0.015	273	0.042	236	0.356	323	0.049
Mar.−03	118	−0.151	301	0.103	251	0.064	328	0.015
Apr.−03	96	−0.186	330	0.096	392	0.562	334	0.018
May−03	113	0.177	350	0.061	440	0.122	339	0.015
Jun. −03	176	0.558	335	−0.043	430	−0.023	341	0.006
Jul. −03	239	0.358	309	−0.078	400	−0.070	336	−0.015
Aug.−03	312	0.305	365	0.181	382	−0.045	341	0.015
Sep. −03	439	0.407	397	0.088	518	0.356	357	0.047
Oct. −03	470	0.071	426	0.073	568	0.097	385	0.078
Nov.−03	468	−0.004	389	−0.087	570	0.004	373	−0.031
Dec. −03	515	0.100	433	0.113	563	−0.012	383	0.027
収益率平均値		0.149		0.050		0.112		0.017
収益率標準偏差		0.215		0.077		0.195		0.030
リスク価格		0.694		0.652		0.574		0.563

年　月	コニカミノルタ	月収益率	住友商	月収益率	ソフトバンク	月収益率	東レ	月収益率
Jan. −03	844	−0.020	562	0.102	1543	0.139	255	0.012
Feb. −03	949	0.124	554	−0.014	1562	0.012	258	0.012
Mar.−03	939	−0.011	537	−0.031	1380	−0.117	263	0.019
Apr.−03	1091	0.162	480	−0.106	1337	−0.031	288	0.095
May−03	1097	0.005	506	0.054	1598	0.195	262	−0.090
Jun. −03	1367	0.246	554	0.095	2275	0.424	279	0.065
Jul. −03	1490	0.090	632	0.141	3480	0.530	283	0.014
Aug.−03	1599	0.073	723	0.144	3420	−0.017	410	0.449
Sep. −03	1478	−0.076	666	−0.079	4720	0.380	401	−0.022
Oct. −03	1445	−0.022	763	0.146	5650	0.197	457	0.140
Nov.−03	1296	−0.103	680	−0.109	4150	−0.265	426	−0.068
Dec. −03	1441	0.112	799	0.175	3280	−0.210	448	0.052
収益率平均値		0.048		0.043		0.103		0.056
収益率標準偏差		0.099		0.101		0.242		0.133
リスク価格		0.490		0.426		0.426		0.424

表 2　銘柄間の株価変動相関係数

	三洋電	日野自	大成建	旭化成	UFJ	日本粉	セイコー	東武	コニカミノルタ	住友商	ソフトバンク	東レ
三洋電	1.000	0.411	0.622	0.427	0.019	0.153	−0.114	−0.092	0.481	0.493	0.104	0.271
日野自	0.411	1.000	0.323	0.250	−0.412	0.398	0.282	0.296	0.460	0.020	−0.559	0.356
大成建	0.622	0.323	1.000	0.571	−0.038	0.195	0.088	0.392	0.116	0.406	0.274	0.308
旭化成	0.427	0.250	0.571	1.000	0.040	0.348	−0.239	0.344	0.108	0.683	−0.034	0.668
UFJ	0.019	−0.412	−0.038	0.040	1.000	−0.241	−0.393	−0.073	0.218	0.438	0.741	0.142
日本粉	0.153	0.398	0.195	0.348	−0.241	1.000	0.255	0.503	−0.014	0.138	−0.323	0.567
セイコー	−0.114	0.282	0.088	−0.239	−0.393	0.255	1.000	0.473	0.109	−0.673	−0.060	−0.150
東武	−0.092	0.296	0.392	0.344	−0.073	0.503	0.473	1.000	0.048	0.087	0.088	0.206
コニカミノルタ	0.481	0.460	0.116	0.108	0.218	−0.014	0.109	0.048	1.000	0.288	0.200	0.282
住友商	0.493	0.020	0.406	0.683	0.438	0.138	−0.673	0.087	0.288	1.000	0.277	0.418
ソフトハ゛ンク	0.104	−0.559	0.274	−0.034	0.741	−0.323	−0.060	0.088	0.200	0.277	1.000	−0.096
東レ	0.271	0.356	0.308	0.668	0.142	0.567	−0.150	0.206	0.282	0.418	−0.096	1.000

表 3　銘柄間の株価変動相関係数行列の行列式の値

銘柄数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
行列式	1.000	0.831	0.505	0.335	0.261	0.195	0.119	0.036	0.013	0.001	0.000	0.000
残余成分の大きさ	1.000	0.831	0.608	0.664	0.778	0.749	0.611	0.305	0.369	0.051	0.008	0.000

ことはできない。12 銘柄の中から，リスク価格が最も低い銘柄である東レを除いて，11 銘柄以下を対象にすると，株価変動相関係数の行列の行列式 D が 0 でなくなる。この 1 年間これら 11 銘柄の株価は互いに線形独立に変動したことを示す。このため，リスク価格が上位である 11 銘柄の中の銘柄 k の株価変動はリスク価格がより上位である $k-1$ 銘柄の株価変動とは線形独立であり，その線形結合では表されない残余成分をもつ。式(31)から判るように，リスク価格が上位である k 銘柄について得た株価変動相関係数の行列式の値と上位である $k-1$ 銘柄について得たその値の比は，銘柄 k の株価変動がより上位である $k-1$ 銘柄の株価変動の線形結合では表されない残余成分の大きさの二乗，すなわち，銘柄 k の変動ベクトル $|k\rangle$ の $k-1$ 銘柄の変動ベクトルに直交する成分の大きさの二乗 $\langle \bar{k}|\bar{k}\rangle$ になる。表 3 にその残余成分の二乗の値を示した。大成建の株価の変動は三洋電と日野自の変動の線形結合で表される部分が大きいため，その線形結合で表されない残余成分の大きさは比較的小さく，その二乗の値は 0.608 である。それに対して，UFJ の株価の変動は三洋電，日野自，大成建と旭化成の変動の線形結合で表される部分が小さいため，その線形結合で表されない残余成分の大きさが大きく，その二乗の値は 0.778 である。このことは，大成建の株価は三洋電や日野自の株価に連動して変動する傾向が強いが，UFJ の株価は三洋電，日野自，大成建や旭化成の株価と独立に変動する傾向が強いことを示す。

表 4 に，東レを除いた 11 銘柄から，リスク価格が上位である順に 6-11 銘柄を選んで，これを均衡市場に見立てたそれぞれの場合について，前章(4)，(5)節に述べた方法で求めた市場ポートフォリオにおける各銘柄への投資比率を示した。上位 7-11 銘柄を均衡市場に見立てた場合には，ポートフォリオにおけるいずれかの銘柄への投資比率が負となり，各銘柄への投資比率をすべて正にする市場ポートフォリオの条件を満たさないが，上位 6 銘柄だけが均衡市場を構成すると見なす場合には，すべての銘柄について投資比率が正になり，市場ポートフォリオが成り立つ。この市場ポートフォリオにおいては，日野自への投資比率が最も大きく，0.456 である。日野自の株価の変動は，他銘柄の株価の変動と相関が比較的小さいために，投資比率が大きくなり得る。三洋電は，単独ではリスク価格が最も大きいが，大成建や旭化成の株価の変動と大きな相関をもつ。三洋電への投資比率が大きくなると，よりリスク価格が低い大成建や旭化成への投資比率も連鎖して大きくなり，市場ポートフォリオ全体のリスク価格を下げる機構がはたらくため，市場ポートフォリオにおける三洋電への投資比率が低く抑えられる。

表 5 に，6-12 銘柄が均衡市場を構成するそれぞれの場合について，銘柄間の株価変動相関係数の行列 A の固有値を記した。それぞれの銘柄の組み合わせについて，固有値を大きさの順に並べて，均衡市場を構成する銘柄の数を増し，固有値の値がどのように変わるかを調べてゆくとき，市場を構成する銘柄の数を一つ増すと，銘柄の数が一つ少ない場合の固有値一つ一つの間に，

表 4　市場ポートフォリオにおける投資比率

銘柄数	三洋電	日野自	大成建	旭化成	UFJ	日本粉	セイコー	東武	コニカミノルタ	住友商	ソフトバンク
11	−7.96	262.80	−135.80	49.12	−33.64	3.09	18.00	−186.3	−110.90	57.12	85.42
10	0.40	5.08	−1.61	0.03	1.33	−1.09	3.36	−8.21	−3.76	5.47	—
9	0.48	0.77	−0.22	0.33	0.33	−0.01	0.29	−0.52	−0.46	—	—
8	0.05	0.71	0.06	0.46	0.40	0.27	0.37	−1.32	—	—	—
7	0.20	0.30	−0.07	0.17	0.18	0.06	0.15	—	—	—	—
6	0.09	0.46	0.07	0.02	0.18	0.19	—	—	—	—	—

表 5　銘柄間の株価変動相関係数行列の固有値

銘柄数	固有値											
12	3.67	2.82	1.56	1.43	1.03	0.54	0.43	0.29	0.17	0.06	0.01	0.00
11	3.21	2.82	1.54	1.38	0.88	0.50	0.30	0.22	0.11	0.03	0.00	—
10	3.21	2.47	1.39	1.02	0.80	0.48	0.30	0.21	0.10	0.02	—	—
9	2.96	1.92	1.32	1.02	0.75	0.47	0.30	0.16	0.10	—	—	—
8	2.85	1.85	1.14	0.79	0.57	0.43	0.24	0.13	—	—	—	—
7	2.57	1.76	0.84	0.68	0.56	0.37	0.22	—	—	—	—	—
6	2.55	1.36	0.82	0.56	0.39	0.31	—	—	—	—	—	—

固有値が一つずつ現われる。12 銘柄全体を対象にすると，固有値の最大値は 3.67 であり，最小値は 0 である。相関係数行列の固有値は対応する固有ベクトルが張る空間の次元の大きさに相当するので，固有値の最大値が 3.67 であることは，株価が位相を揃えて連動する銘柄の数の最大はおおよそ 4 銘柄であることを意味する。

表 6 に，リスク価格が上位である 6 銘柄を対象にする場合について，株価変動相関係数の行列 A の各固有値に対応する固有変動モードを，固有値が大きい順に，固有変動モード 1，2，3，…，6 と定義して，市場ポートフォリオにおける各銘柄の投資比率への各固有変動モードの寄与の値を示した。それぞれの銘柄について，固有変動モードの寄与の和は市場ポートフォリオにおけるその銘柄への投資比率 w_m になる。

リスク価格が上位である 6 銘柄を対象にする場合の市場ポートフォリオの各月収益率とその平均値および標準偏差を表 7 に示した。市場ポートフォリオの月収益率の平均値は 0.0721 で，標準偏差は 0.0476 であり，リスク価格は 1.516 である。市場ポートフォリオのリスク価格はポートフォリオを構成する各銘柄のリスク価格に比べて約 2 倍に大きくなる。また，表 7 に，固有変動モード 1–6 における投資比率に従って銘柄を組み合わせた場合の月収益率とその平均値および標準偏差を示した。株価変動相関係数の行列 A の最大固有値 2.552 に対応する固有変動モード 1 は，三洋電，日野自，大成建と旭化成の 4 銘柄への投資比率がすべて正であり，これらの銘柄の収益率が位相を揃えて変動する銘柄の組み合わせになっていて，6 個ある固有変動モードの中でリスク価格が最も高く，0.958 であり，市場ポートフォリオにおける投資比率の構成に最も大きく 0.525 寄与する。市場ポートフォリオにおける投資比率に二番目に大きく寄与する固有振動モード 4 は，三洋電と日野自への投資比率は正であるが，大成建と旭化成への投資比率は負であるポートフォリオから成る。この固有変動モードは株価変動相関係数の行列 A の四番目に大きい固有値 0.561 に対応する固有変動モードであり，リスク価格は 0.915 であり，市場ポートフォリオにおける投資比率の構成に 0.373 寄与する。その他の 4 個の固有変動モードは市場ポートフォリオにおける投資比率の構成への寄与は小さく，それぞれ 0.05 以下である。

表 6　各固有変動モードから市場ポートフォリオにおける投資比率への寄与

	三洋電	日野自	大成建	旭化成	UFJ	日本粉	和
固有変動モード 1	0.139	0.120	0.100	0.097	−0.014	0.084	0.525
固有変動モード 2	0.058	−0.076	0.042	0.041	0.042	−0.059	0.048
固有変動モード 3	−0.068	−0.041	−0.021	0.050	0.015	0.102	0.037
固有変動モード 4	0.208	0.252	−0.135	−0.187	0.100	0.134	0.373
固有変動モード 5	−0.070	0.116	−0.050	0.085	0.011	−0.077	0.015
固有変動モード 6	−0.181	0.085	0.138	−0.070	0.023	0.005	0.002
和（市場ポートフォリオ）	0.087	0.456	0.074	0.016	0.178	0.189	1.000

表７　市場ポートフォリオと各固有変動モードの収益率

年　月	市場ポートフォリオ	固有変動モード１	固有変動モード２	固有変動モード３	固有変動モード４	固有変動モード５	固有変動モード６
Jan. -03	0.0571	0.0171	−0.0092	0.0051	0.0103	0.0148	0.0191
Feb. -03	0.0160	0.0108	−0.0192	0.0027	0.0245	−0.0090	0.0062
Mar.-03	0.0803	0.0697	−0.0083	−0.0101	0.0355	−0.0049	−0.0017
Apr.-03	0.0100	−0.0053	0.0087	0.0142	0.0154	−0.0037	−0.0193
May-03	0.1294	0.0089	0.0261	−0.0039	0.0815	0.0118	0.0050
Jun. -03	0.0520	0.0189	0.0375	−0.0074	0.0029	−0.0034	0.0034
Jul. -03	0.1325	0.0514	0.0102	0.0260	0.0384	0.0094	−0.0029
Aug.-03	0.0928	0.0021	0.0120	0.0121	0.0494	−0.0086	0.0257
Sep. -03	0.0894	0.0737	0.0184	0.0069	−0.0278	0.0063	0.0119
Oct. -03	−0.0104	−0.0145	−0.0022	−0.0069	0.0001	0.0157	−0.0025
Nov.-03	0.1428	0.0707	0.0013	−0.0006	0.0650	0.0076	−0.0011
収益率平均値	0.0721	0.0288	0.0075	0.0032	0.0263	0.0025	0.0039
収益率標準偏差	0.0476	0.0301	0.0153	0.0100	0.0287	0.0089	0.0110
リスク価格	1.5163	0.9583	0.4880	0.3192	0.9147	0.2836	0.3519

固有変動モードの中に，そのリスク価格が市場ポートフォリオを構成する個別銘柄のリスク価格よりも高い固有変動モードと，低い固有変動モードがある。2003 年 1 年間に東証第 1 部における株価は全般的に上昇した。その中から私達が選んだリスク価格が上位である 6 銘柄の市場ポートフォリオについては，そのリスク価格が個別銘柄のリスク価格よりも高い固有変動モード 1 と 4 は市場ポートフォリオの株価変動の 1 年間にわたる上昇変動成分に対応し，リスク価格が低い固有変動モード 2，3，5，および，6 は市場ポートフォリオの株価変動の振動変動成分に対応する。市場ポートフォリオの株価変動の 1 年間にわたる上昇変動成分に対応する固有変動モード 1 と 4 は株価の収益率が他のモードよりも大きく，市場ポートフォリオの株価変動の振動変動成分に対応する固有変動モード 2，3，5，および，6 は株価の収益率の平均値が小さく，その標準偏差が平均値に比して大きい特徴がある。

以上，私達は東証第 1 部における 2003 年 1 年間の株価の変動を扱って，その市場ポートフォリオの特性を解析した。12 ヶ月の株価の変動を対象にすると，互いに独立な変動を行う銘柄の数は最大 12 銘柄に限られるから，東証第 1 部の株式銘柄全体を対象にしても，市場ポートフォリオを構成する銘柄の数は最大 12 銘柄に限られる。より長期にわたる株価を扱えば，互いに独立に変動する銘柄の数は増して，より多くの固有変動モードが市場ポートフォリオに寄与することが予想される。しかし，本論文において私達が示した市場ポートフォリオを扱う処方は，そのように長期間の株価の変動を対象にする場合にもそのまま適応し，その場合の市場ポートフォリ

オにも，私達が本論文で例として扱った場合の市場ポートフォリオの特性が充分当てはまることと考えられる。現在，固有変動モードの特性が長期的にどのように変化するかという点に着目して，株価の変動をスペクトル分解して，解析している。

附録　相関係数の行列の行列式

数学的帰納法を用いて(31)式を証明する。その際，Schmidt の直交化法と行列式の性質を用いる。

行列式の性質を用いて，まず，銘柄間の株価変動相関係数の行列式(12)，

$$D = \begin{vmatrix} \langle 1|1\rangle & \langle 1|2\rangle & \cdots & \langle 1|M\rangle \\ \langle 2|1\rangle & \langle 2|2\rangle & & \langle 2|M\rangle \\ & & \cdots & \\ \langle M|1\rangle & \langle M|2\rangle & & \langle M|M\rangle \end{vmatrix} \tag{52}$$

の左上隅の 2 行 2 列を対角的にする。D の第 2 列成分 $\langle m|2\rangle$ から対応する第 1 列成分 $\langle m|1\rangle$ の $\langle 1|2\rangle/\langle 1|1\rangle$ 倍を引く。すると，式(29)により，第 2 列成分は $\langle m|\bar{2}\rangle$ になる。次いで，D の第 2 行成分 $\langle 2|m\rangle$ から対応する第 1 行成分 $\langle 1|m\rangle$ の $\langle 2|1\rangle/\langle 1|1\rangle$ 倍を引く。すると，式(30)により，第 2 行成分は $\langle\bar{2}|m\rangle$ になる。以上の操作を行うと，直交性 $\langle\bar{2}|1\rangle=\langle 1|\bar{2}\rangle=0$ のために，D の左上隅の 2 行 2 列は対角的になり，

$$D = \begin{vmatrix} \langle\bar{1}|\bar{1}\rangle & 0 & \langle\bar{1}|3\rangle & \cdots & \langle\bar{1}|M\rangle \\ 0 & \langle\bar{2}|\bar{2}\rangle & \langle\bar{2}|3\rangle & \cdots & \langle\bar{2}|M\rangle \\ \langle 3|\bar{1}\rangle & \langle 3|\bar{2}\rangle & \langle 3|3\rangle & \cdots & \langle 3|M\rangle \\ & & & \cdots & \\ \langle M|\bar{1}\rangle & \langle M|\bar{2}\rangle & \langle M|3\rangle & \cdots & \langle M|M\rangle \end{vmatrix} \tag{53}$$

となる。

順次このように，D の左上隅の対角的に変換された部分行列の行と列を 1 行 1 列ずつ増やす操作を $M'-1$ 回繰り返して，対角的部分行列の次元を増してゆく。左上隅の M' 行 M' 列が対角的になっているとき，D の第 $M'+1$ 列成分 $\langle m|M'+1\rangle$ から対応する第 k 列 成分 $\langle m|\bar{k}\rangle$ の $\langle\bar{k}|M'+1\rangle/\langle\bar{k}|\bar{k}\rangle$ 倍を引く操作を全ての $k\leq M'$ である列について行って，これを新たな第 $M'+1$ 列成分とする。次いで，D の第 $M'+1$ 行成分 $\langle M'+1|m\rangle$ から対応する第 k 行成分 $\langle\bar{k}|m\rangle$ の $\langle M'+1|\bar{k}\rangle/\langle\bar{k}|\bar{k}\rangle$ 倍を引く操作を全ての $k\leq M'$ である行について行って，これを新たな第 $M'+1$ 行成分とする。このようにすると，D の左上隅の $M'+1$ 行 $M'+1$ 列が対角化され，

$$D=\begin{vmatrix}\langle\bar{1}|\bar{1}\rangle & & & 0 & \langle\bar{1}|M'+2\rangle & \cdots & \langle\bar{1}|M\rangle\\ & \langle\bar{2}|\bar{2}\rangle & & & \langle\bar{2}|M'+2\rangle & \cdots & \langle\bar{2}|M\rangle\\ & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & & & \langle\overline{M'+1}|\overline{M'+1}\rangle & \langle\overline{M'+1}|M'+2\rangle & \cdots & \langle\overline{M'+1}|M\rangle\\ \langle M'+2|\bar{1}\rangle & \langle M'+2|\bar{2}\rangle & \cdots & \langle M'+2|\overline{M'+1}\rangle & \langle M'+2|M'+2\rangle & \cdots & \langle M'+2|M\rangle\\ & & \cdots & & & \cdots & \\ \langle M|\bar{1}\rangle & \langle M|\bar{2}\rangle & \cdots & \langle M|\overline{M'+1}\rangle & \langle M|M'+2\rangle & \cdots & \langle M|M\rangle\end{vmatrix} \quad (54)$$

となる。

以上の操作を繰り返すと，M 行 M 列の行列式 D 全体を対角的にすることができ，得られる対角行列式の対角成分は直交ベクトル $|\bar{m}\rangle$ のノルムの二乗 $\langle\bar{m}|\bar{m}\rangle$ になる：

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}\langle\bar{1}|\bar{1}\rangle & & & 0\\ & \langle\bar{2}|\bar{2}\rangle & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \langle\bar{M}|\bar{M}\rangle\end{vmatrix}\\ &=\prod_{m=1}^{M}\langle\bar{m}|\bar{m}\rangle.\end{aligned} \quad (55)$$

以上，数学的帰納法により，式(31) を証明した。

参考文献

グロービスマネジメントインスティテュート著『MBA ファイナンス』ダイヤモンド社

木島正明 [経済入門シリーズ]『金融工学』日本経済新聞社

香村俊武・野澤　智「経済指標の変動の解析的研究―株価は過去を記憶して変動する―」『城西大学経済経営紀要』**21**（2003)，1

香村俊武・野澤　智「経済指標の変動の解析的研究Ⅱ―株価が下降局面から上昇局面に転ずる時点を探る―」『城西大学大学院研究年報』経済学研究科，**19**（2003)，23

Satoshi Nozawa and Toshitake Kohmura “A Study of the Evolution of Stock Price Indices in terms of Oscillation Theory Part I. Statistical Properties” *The Josai Journal of Business Administration,* **1**（2004)，45

香村俊武・野澤　智「経済指標の変動の解析的研究Ⅲ―株価の中期的変動傾向と平均変動量―」『城西大学経済経営紀要』**22**（2004)，1

香村俊武・野澤　智「経済指標の変動の解析的研究Ⅳ―株価の変動に関する変動速度依存力理論と仮想均衡価格理論―」『城西大学大学院研究年報』経済学研究科，**20**（2004)，37

木島正明・青沼君明『Excel & VBA で学ぶファイナンスの数理』金融財政事情研究会

Distinctive Evolution Features of Market Portfolios in Capital Asset Pricing Model

Toshitake Kohmura and Satoshi Nozawa

Abstract

We analyze the evolution of the stock price for a market portfolio in the capital asset pricing model (CAPM). The stock price evolution of the market portfolio for a group of stock brands is composed of the eigen-vectors of the matrix of the correlations between pairs of the price evolutions of individual stock brands. The eigen-evolution modes for the market portfolio are defined to be the eigen-vectors of the evolution correlation matrix. We investigate some distinctive features of the eigen-evolution modes of the market portfolio for a group of stock brands chosen in the first section of Tokyo Stock Market in 2003.

Keywords: capital asset pricing model (CAPM), market portfolio, correlations