集合分割問題を解く dual all integer algorithm に対する分析

1978.11.17. 第1版 30頁
1979.1.11. 第2版 35頁

城西大（数学）
岩村覚三

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

目次

以上

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
Lexicographical orderingについて						参照番号
						作成者

長さmのベクトル$\vec{x}$, $\vec{y}$とスカラーkに対し$\vec{x}+\vec{y}$, $k\vec{x}$を普通に定義する。

Def 1. $\vec{x} \overset{L}{>} 0 \leftrightarrow \exists i=\min\{i \mid x_i \neq 0\} \;\&\; x_i > 0$

Def 2. $\vec{x} \overset{L}{>} \vec{y} \leftrightarrow \vec{x}-\vec{y} \overset{L}{>} 0$

Def 3. $\vec{x} \overset{L}{<} 0 \leftrightarrow -\vec{x} \overset{L}{>} 0$

Def 4. $\vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \leftrightarrow \vec{x} \overset{L}{>} 0$ or $\vec{x}=0$

Def 5. $\vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \leftrightarrow \vec{x}-\vec{y} \overset{L}{\geqq} 0$

Def 6. $\vec{x} \overset{L}{\leqq} 0 \leftrightarrow -\vec{x} \overset{L}{\geqq} 0$

Prop. 1. $\begin{cases} \vec{x} \overset{L}{>} 0 \;\&\; k>0 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{>} 0 \\ \vec{x} \overset{L}{>} 0 \;\&\; k<0 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{<} 0 \end{cases}$

Prop. 2. $\vec{x} \overset{L}{>} 0 \;\&\; \vec{y} \overset{L}{>} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{>} 0$

Prop. 3. $\vec{x} \overset{L}{>} \vec{y} \;\&\; \vec{y} \overset{L}{>} \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \overset{L}{>} \vec{z}$

Prop. 4. $\vec{x}+\vec{y} \overset{L}{>} 0 \Leftrightarrow \vec{x} \overset{L}{>} (-\vec{y})$

Prop. 5. $\vec{x} \overset{L}{>} \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \pm \vec{z} \overset{L}{>} \vec{y} \pm \vec{z}$

Prop. 6. $\vec{x} \overset{L}{>} 0 \;\&\; k>1 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{>} \vec{x}$

Prop. 7. $\begin{cases} \vec{x} \overset{L}{>} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{>} \vec{y} \\ \vec{x} \overset{L}{<} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{<} \vec{y} \end{cases}$

Prop. 8 $\vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \overset{L}{>} \vec{y}$ or $\vec{x}=\vec{y}$

Prop. 9 $\begin{cases} \vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \;\&\; k \geqq 0 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \\ \vec{x} \overset{L}{\leqq} 0 \;\&\; k \leqq 0 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{\leqq} 0 \end{cases}$

Prop. 10 $\vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \;\&\; \vec{y} \overset{L}{\geqq} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{\geqq} 0$

Prop. 11 $\vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \;\&\; \vec{y} \overset{L}{\geqq} \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{z}$

Prop. 12 $\vec{x}+\vec{y} \overset{L}{\geqq} 0 \Leftrightarrow \vec{x} \overset{L}{\geqq} (-\vec{y})$

Prop. 13 $\vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \pm \vec{z} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \pm \vec{z}$

Prop. 14 $\vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \;\&\; k \geqq 1 \Rightarrow k\vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{x}$

Prop. 15 $\begin{cases} \vec{x} \overset{L}{\geqq} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \\ x \overset{L}{\leqq} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{\leqq} \vec{y} \end{cases}$

Prop. 16 $\vec{x} \overset{L}{>} 0 \;\&\; \vec{y} \overset{L}{\geqq} 0 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \overset{L}{>} 0$

Prop. 17 $\begin{cases} \vec{x} \overset{L}{\geqq} \vec{y} \;\&\; \vec{y} \overset{L}{>} \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \overset{L}{>} \vec{z} \\ \vec{x} \overset{L}{>} \vec{y} \;\&\; \vec{y} \overset{L}{\geqq} \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \overset{L}{>} \vec{z} \end{cases}$

Prop. 18 $\begin{cases} k_1 \geqq k_2,\ \vec{\alpha} \overset{L}{\geqq} 0 \Rightarrow k_1\vec{\alpha} \overset{L}{\geqq} k_2\vec{\alpha} \\ k_1 \geqq k_2,\ \vec{\alpha} \overset{L}{>} 0 \Rightarrow k_1\vec{\alpha} \overset{L}{\geqq} k_2\vec{\alpha} \\ k_1 > k_2,\ \vec{\alpha} \overset{L}{\geqq} 0 \Rightarrow k_1\vec{\alpha} \overset{L}{\geqq} k_2\vec{\alpha} \\ k_1 > k_2,\ \vec{\alpha} \overset{L}{>} 0 \Rightarrow k_1\vec{\alpha} \overset{L}{>} k_2\vec{\alpha} \end{cases}$

Prop. 19 $\begin{cases} \vec{x}_1 \overset{L}{\geqq} \vec{x}_2,\ k \geqq 0 \Rightarrow k\vec{x}_1 \overset{L}{\geqq} k\vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \overset{L}{\geqq} \vec{x}_2,\ k>0 \Rightarrow k\vec{x}_1 \overset{L}{\geqq} k\vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \overset{L}{>} \vec{x}_2,\ k \geqq 0 \Rightarrow k\vec{x}_1 \overset{L}{\geqq} k\vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \overset{L}{>} \vec{x}_2,\ k>0 \Rightarrow k\vec{x}_1 \overset{L}{>} k\vec{x}_2 \end{cases}$

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
Dual All Integer Algorithm (Huの本)						参照番号
						作成者

$$
\begin{array}{llll}
 & & -x_{N_s} & -x_{N_j}\ (1\le j\le n,\ j\neq s) \\
x_0 & a^t_{00} & a^t_{0s} & a^t_{0j} \\
x_1 & a^t_{10} & a^t_{1s} & a^t_{1j} \\
x_2 & a^t_{20} & a^t_{2s} & a^t_{2j} \\
x_i = & a^t_{i0} & a^t_{is} & a^t_{ij} \\
x_v & a^t_{v0} & a^t_{vs} & a^t_{vj} \\
\vdots & & & \\
x_{n+m} & a^t_{n+m,0} & & \\
\text{cut row} & \left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] & \left[\frac{a^t_{vs}}{\lambda}\right] = -1 & \left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right]
\end{array}
$$

$\boxed{\text{STEP0}}$ $\alpha_j \succ 0$（$\alpha_j = 0$ な x_{N_j} は tableauから除去する）($1\le j\le n$)

$\boxed{\text{STEP1}}$ $\{i : a^t_{i0} < 0\} \neq \phi$? $\xrightarrow{NO}$ optimal

↓YES

$\boxed{\text{STEP2}}$ STEP0 $a^t_{v0} < 0$, $v \equiv \min\{i : a^t_{i0} < 0\}$

Cut $s = \left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right](-x_{N_j}) \ge 0$ integer

$\{j : a^t_{vj} < 0\}_{1\le j\le n} \neq \phi$? $\xrightarrow{NO}$ infeasible

↓YES

STEP1 $\alpha_s \equiv \operatorname{lexmin}_{j : a^t_{vj} < 0} \alpha_j$

STEP2 $\mu_j \equiv \max\{ u_j \text{ integer} \mid \alpha_s \prec \alpha_j / u_j \}$ (≥ 1)

for $j \neq s$: $a^t_{vj} < 0$; $\mu_s \equiv 1$

STEP3 $\lambda_j \equiv -a^t_{vj}/\mu_j (>0)$ $(\forall j : a^t_{vj} < 0)$

STEP4 $\lambda \equiv \max_{j : a^t_{vj} < 0} \lambda_j (>0)$

$\begin{cases} \lambda = 1 \rightarrow x_v\text{-row の copy} \\ \lambda > 1 \rightarrow s = \left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right](-x_{N_j}) \ge 0 \text{ integer} \end{cases}$

をタブローの最下部に付け加えこれを掃き出し行とする。

$\boxed{\text{STEP3}}$ 双対シンプレックス法を実行する。

掃き出し行を除去し $\boxed{\text{STEP1}}$ に戻る。

Note $\lambda_s = -a^t_{vs} \ge 1 \therefore \lambda \ge 1$

$\lambda = 1 \Rightarrow \lambda_s = -a^t_{vs} \le 1 \therefore a^t_{vs} = -1$

Note STEP1 で tie がなくれば

$\forall j \neq s$, $a^t_{vj} < 0$, $\exists \mu_j \ge 1$ (integer) $\alpha_s \prec \alpha_j/\mu_j$

よって STEP2 においても tie はない。

Note STEP1 で tie がなくれば

$\alpha_s \prec \frac{\alpha_j}{-\left[a^t_{vj}/\lambda\right]}$

$j \neq s$, $a^t_{vj} < 0$, $\lambda = \max_{j : a^t_{vj} < 0} \lambda_j$

Note $-\left[\frac{a^t_{vs}}{\lambda}\right] \equiv 1$

Note $\forall j \neq s$, $a^t_{vj} < 0$ $\alpha^{t+1}_j = \alpha^t_j + \alpha^t_s \left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right]$

$\ge \alpha^t_j - \alpha^t_s \mu_j \succ 0$

$\alpha^{t+1}_s = \alpha^t_s \succ 0$ 但し最下部の cut row は無視して考える。

Note $\forall j : a^t_{vj} \ge 0$, $\left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right] \ge 0$ より

$\alpha^{t+1}_j = \alpha^t_j + \alpha^t_s \left[\frac{a^t_{vj}}{\lambda}\right] \succ 0$

$\alpha^{t+1}_0 = \alpha^t_0 + \alpha^t_s \left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] \prec \alpha^t_0$ as $\left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] < 0$

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

$\lambda=1$ 即ち $a^t_{vs}=-1$ の時はCUTを付け加えないで $\alpha^t_{vs}=-1$ でpivotしても

$\alpha_s^{t+1}=\alpha_s^t>0$, $\alpha_j^{t+1}>0$ for j: nonbasic & $j\neq s$ が言える。

$$\forall j\neq s,\quad a_{ij}^{t+1}=\begin{cases}-a^t_{vj} & (i=v)\\ a^t_{ij}+a^t_{is}\,a^t_{vj} & (i\neq v)\end{cases}$$

(i) $a^t_{vj}<0$ の時

$\alpha_j^{t+1}=\alpha_j^t+\alpha_s^t\,a_{vj}^t$ except for v-row

$a_{vj}^{t+1}=-a_{vj}^t>0$

$$\max_{j:a^t_{vj}<0}\left(\frac{-a^t_{vj}}{\mu_j}\right)=1$$

$$\frac{-a^t_{vs}}{\mu_s}=-a^t_{vs}=1$$

$\forall j\neq s, a^t_{vj}<0$ $\quad \dfrac{-a^t_{vj}}{\mu_j}\le 1$ i.e. $-a^t_{vj}\le\mu_j$

$$\alpha_s^t<\frac{\alpha_j^t}{\mu_j}\le\frac{\alpha_j^t}{-a^t_{vj}}\ \text{よって}\ \alpha^t_s<\frac{\alpha^t_j}{-a^t_{vj}}$$

$$\xrightarrow{-a^t_{vj}>0}\ \alpha^t_j+\alpha^t_s\,a^t_{vj}>0$$

$\min\{i\mid a^t_{ij}+a^t_{is}\,a^t_{vj}\neq 0\}\left\{\begin{matrix}\ge v-1\\ \le v+1\end{matrix}\right\}$ に

分けて考えれば $\alpha_j^{t+1}>0$ $(\forall j\neq s, a^t_{vj}<0)$

(ii) $a^t_{vj}=0$ の時 $\quad \alpha_j^{t+1}=\alpha_j^t>0$

(iii) $a^t_{vj}>0$ の時 $\quad \alpha^t_j>0, \alpha^t_s>0, a^t_{vj}>0$, $a^t_{vs}=-1$ より $i_j\equiv\min\{i\mid a^t_{ij}\neq 0\}\le v$,

$a^t_{i_j j}>0$, $i_s\equiv\min\{i\mid a^t_{is}\neq 0\}\le v-1$, $a^t_{i_s s}>0$

$i_s\le i_j$ と $i_s>i_j$ の2通りに分けて考えると $a^t_{\bullet j}+a^t_{\bullet s}\,a^t_{vj}=0$

for $0\le\bullet\le\min\binom{i_s}{i_j}-1$, >0 for $\bullet=\min\binom{i_s}{i_j}$ よって $\alpha^{t+1}_j>0$

しかしこの様にすると変数 x_v と変数 x_{N_s} を交換しなくればならない。

これを避けるには、タブローの最下部に x_v row の copy を持って来て

このrowを掃出し行とし、dual simplex 1回実行後このrowを棄てる。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
$\lambda=1$の時 x_v-rowのcopyをtableauの最下部に持ってきて このrowをpivot 後としてpivotしても $\alpha_j^{t+1}>0$ $\forall j\in\hat{R}$, $\alpha_0^{t+1}<\alpha_0^t$ の関係が成立する。						登録番号 参照番号 作成者

		$-x_{N_s}$	$-x_{N_j}\ (1\le j\le n, j\ne s)$
x_0	a_{00}^t	a_{0s}^t	a_{0j}^t
x_1	a_{10}^t	a_{1s}^t	a_{1j}^t
x_2	a_{20}^t	a_{2s}^t	a_{2j}^t
x_i	a_{i0}^t	a_{is}^t	$\boxed{a_{ij}^t}$
x_v	a_{v0}^t	a_{vs}^t	a_{vj}^t
⋮			
x_{m+n}	$a_{m+n,0}^t$		
copy x_v	a_{v0}^t	$a_{vs}^t = -1$	a_{vj}^t

$\lambda = 1$ i.e. $a_{vs}^t = 1$, $\dfrac{-a_{vj}^t}{\mu_j} \le 1$ $(\forall j\ne s, a_{vj}^t<0)$

(0) for $j=s$, $\alpha_s^{t+1} = \alpha_s^t$ except for bottom row
>0

$\forall j\ne s$

$$a_{ij}^{t+1} = a_{ij}^t + a_{is}^t a_{vj}^t \quad (0\le i\le m+n)$$

$$\alpha_j^{t+1} = \alpha_j^t + \alpha_s^t a_{vj}^t \text{ except for bottom rows}$$

(i) $a_{vj}^t<0$ の時

$0<-a_{vj}^t\le\mu_j$ と α_s^tの決め方より

$\alpha_s^t < \dfrac{\alpha_j^t}{\mu_j} \leqq \dfrac{\alpha_j^t}{-a_{vj}^t}$ よって $\alpha_s^t < \dfrac{\alpha_j^t}{-a_{vj}^t}$

$, 0<\alpha_j^t + \alpha_s^t a_{vj}^t = \alpha_j^{t+1}$

(ii) $a_{vj}^t = 0$ の時 $\alpha_j^{t+1} = \alpha_j^t > 0$

(iii) $a_{vj}^t>0$ の時 $\alpha_s^t>0$, $\alpha_j^t>0$ より $\alpha_j^t + \alpha_s^t a_{vj}^t > 0$ つまり $\alpha_j^{t+1}>0$

もちろん

$\alpha_0^{t+1} = \alpha_0^t + \alpha_s^t a_{v0}^t < \alpha_0^t$ as $a_{v0}^t<0$ & $\alpha_s^t>0$.

文献

T.C. Hu "Integer Programming and Network Flows" Addison-Wesley 1970
p. 246-254

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

α_sの決定でtieのある場合

$$S \equiv \{\tilde{s} \mid \alpha^t_{\tilde{s}} = \operatorname*{lexmin}_{j:\, a^t_{vj}<0} \alpha^t_j\},\quad R=\{j : a^t_{vj}<0\} \qquad \alpha^t_{\tilde{s}}=\alpha^t_s,\ \underset{s\neq\tilde{s}}{s,\tilde{s}\in S}$$

STEP 1　sの代わりにSを考える。

STEP 2　$\mu_j = \max\{u_j \text{ integer} \mid \alpha^t_S < \frac{\alpha^t_j}{\mu_j}\}\ (\geq 1)$ for $j\in R\setminus S$

STEP 3　$\lambda_j = -a^t_{vj}/\mu_j\ (>0)$ for $j\in R\setminus S$

STEP 4　$\mu_s \equiv 1$, $\lambda_s = -a^t_{vs}\ (>0) =$ constant for $s\in S$,

$$\lambda \equiv \max_{j\in R} \lambda_j\ (>0)$$

$S\ni s$をpivot columnとする。

$$\alpha^{t+1}_s = \alpha^t_s > 0$$

$\alpha^{t+1}_{\tilde{s}} = 0$ for $\tilde{s}\in S\setminus\{s\}$　変数 $\alpha_{N_{\tilde{s}}}$, $\tilde{s}\in S\setminus\{s\}$をタブローから落してよい。

$$\alpha^{t+1}_0 = \alpha^t_0 + \alpha^t_s\left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right] < \alpha^t_0$$

$$\left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right]<0,\ \alpha^t_s>0 \qquad \alpha^t_s\left[\frac{a^t_{v0}}{\lambda}\right]<0$$

tableauをHuの本の説明の様に持ち $\lambda=1$の場合の取扱いを本メモの通りに行なうならば α_sの決定でtieが有ろうが無かろうが 有限収束する dual all integer algorithmを得る。

最初のtableauにidenticalなtableauが無ければα_sは一意に決る。

伊倉のdual all integer algorithmによる集合分割問題のコードが収束しない時があったというのはtime overのせいか?

タイトル
λの計算法に対するSalkin & Koncalの注意

年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
					参照番号
					作成者

Lemma $a^t_{vs} \leq a^t_{vj} < 0 \Longrightarrow \lambda_s \geq \lambda_j$, for $j: a^t_{vj} < 0, j \neq s$

$$\lambda_s = \frac{-a^t_{vs}}{1} \geq \frac{-a^t_{vj}}{1} \geq \frac{-a^t_{vj}}{\mu_j} = \lambda_j \quad \text{for } j: j \neq s,\ a^t_{vs} \leq a^t_{vj} < 0$$

$$1 \geqq \frac{1}{\mu_j}, \ -a^t_{vj} > 0$$

従って $a^t_{vs} \leq a^t_{vj} < 0$ な $j(\neq s)$ に対しては μ_j の計算はもちろん λ_j の計算も必要でない。

文献
Salkin & Koncal "A Pseudo Dual All-Integer Algorithm for the Set Covering Problem" Technical Memorandum No. 204, Nov. 1970 Case Western Reserve University

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
Gomory cutの強化 Wilson cut						参照番号
						作成者

source eq. $s_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j(-x_j)$, $\boxed{a_0<0}$

$1 \le {}^{\exists}j \le n,\ a_j<0 \xrightarrow{NO}$ Infeasible

$\downarrow$ YES $\{j: \text{nonbasic} \ \& \ a_j<0\} \neq \phi$

lexicographically smallest column $\equiv k$

$\lambda_{min} \equiv \max_{a_j<0} \left(=\frac{a_j}{\mu_j}\right)$

$\lambda_{min}>1 \Rightarrow$ Gomory cut $s_2 = s_2(\lambda_{min}) = \left[\frac{a_0}{\lambda_{min}}\right] + \left[\frac{a_k}{\lambda_{min}}\right](-x_k) + \sum_{\substack{a_j<0 \\ j\neq k}} \left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right](-x_j) + \sum_{a_j>0}\left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right](-x_j) \geq 0$ integer

<u>Def.</u> $0<\lambda_0^* \begin{cases} \equiv a_0/(1+[a_0/\lambda_{min}]) - \varepsilon & ([\frac{a_0}{\lambda_{min}}]<-1 \text{ の時}, \text{ 即ち } \lambda_{min}<-a_0) \\ \equiv +\infty & \text{(otherwise)} \end{cases}$

$0<\lambda_j^* \begin{cases} \equiv a_j/[a_j/\lambda_{min}] & \text{for } j \in \{j: \text{nonbasic} \ \& \ \lambda_{min} \le a_j \ \& \ a_j>0\} \\ \equiv +\infty & \text{for } j: \text{nonbasic} \ \& \ \lambda_{min} > a_j > 0 \end{cases}$

$\lambda_{min} \le a_j$, $a_j > 0$

$J^* \equiv \{j: \text{nonbasic} \ \& \ a_j>0\} + \{0\}$, $\lambda^* \equiv \max\{\lambda_{min}, \min_{j\in J^*} \lambda_j^*\}$

$\boxed{\min_{j\in J^*} \lambda_j^* < \infty \text{ の時}}$ (有限のλ^*が存在する時)

<u>Case 1</u> $\lambda_{min} \geq \min_{j\in J^*} \lambda_j^*$ の時

$\lambda^* = \lambda_{min} > 1$

$s_2^* = s_2(\lambda^*) = \left[\frac{a_0}{\lambda^*}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_j}{\lambda^*}\right](-x_j) \geq 0$ integer o.k.

<u>Case 2</u> $\lambda_{min} < \min_{j\in J^*} \lambda_j^*$ の時

$\lambda^* = \min_{j\in J^*} \lambda_j^* > \lambda_{min} > 1$

Wilson cut $s_2(\lambda^*) = \left[\frac{a_0}{\lambda^*}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_j}{\lambda^*}\right](-x_j) \geq 0$ integer, valid cut.

(ア) for $j=k$, $a_k<0$; $\lambda^* > \lambda_{min} > 1 \to \frac{1}{\lambda^*} < \frac{1}{\lambda_{min}} \to \frac{a_k}{\lambda_{min}} < \frac{a_k}{\lambda^*} < 0 \longrightarrow$

$-1 = \left[\frac{a_k}{\lambda_{min}}\right] < \frac{a_k}{\lambda^*} < 0 \longrightarrow \left[\frac{a_k}{\lambda^*}\right] = [a_k/\lambda_{min}] = -1$ (イ)

(イ) for $j\neq k$, $a_j<0$; $\lambda^* \geq \lambda_{min} \geq \lambda_j > 0 \to \lambda^* \geq \lambda_j > 0 \to \alpha_0 < \frac{\alpha_j}{-[a_j/\lambda^*]}$ (ロ)

$\lambda^* > \lambda_{min} \to 1/\lambda_{min} > 1/\lambda^* \to \frac{a_j}{\lambda_{min}} \leq \frac{a_j}{\lambda^*} \to [a_j/\lambda^*] \geq [a_j/\lambda_{min}]$ (ハ)

(イ), (ロ)よりWilson cut 行でpivot後のnonbasic column $\succ 0$,

new RHS column $\prec$ old RHS column

(ウ) for $j\geq 1$ & $a_j>0$ & $a_j \geq \lambda_{min}$

$a_j/\lambda_j^* = [a_j/\lambda_{min}] (\geq 1)$, $0<\lambda^* \leq \lambda_j^* \longrightarrow a_j/\lambda^* \geq [a_j/\lambda_{min}]$

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A　B　C　D　E

一方 $\lambda^* > \lambda_{min}$ より $a_j/\lambda^* < a_j/\lambda_{min} \to [a_j/\lambda^*] < \frac{a_j}{\lambda_{min}} \to [a_j/\lambda^*] \le [a_j/\lambda_{min}]$

即ち $[a_j/\lambda^*] = [a_j/\lambda_{min}]$ (ニ)

(エ) for $j \ge 1$ & $a_j > 0$ & $a_j < \lambda_{min}$

$\lambda_{min} < \lambda^*$, $0 < a_j/\lambda_{min} < 1$, $[\frac{a_j}{\lambda_{min}}] = 0 = [a_j/\lambda^*]$ (ホ)

(オ) for $j = 0$

$$0 < \lambda^* \le \lambda_0^* < \frac{a_0}{1+[a_0/\lambda_{min}]} \to \frac{a_0}{\lambda^*} \le \frac{a_0}{\lambda_0^*} < a_0\frac{1+[a_0/\lambda_{min}]}{a_0} = 1+[a_0/\lambda_{min}]$$

$$\to [\frac{a_0}{\lambda^*}] < 1+[a_0/\lambda_{min}] \to [\frac{a_0}{\lambda^*}] \le [a_0/\lambda_{min}]$$

一方 $0 < \lambda_{min} < \lambda^* \to \frac{a_0}{\lambda_{min}} < \frac{a_0}{\lambda^*} \to [\frac{a_0}{\lambda_{min}}] \le [\frac{a_0}{\lambda^*}]$

よって $[\frac{a_0}{\lambda^*}] = [\frac{a_0}{\lambda_{min}}]$ (ヘ)

λ_0^*が存在しない時は $[\frac{a_0}{\lambda_{min}}] = -1 \leftrightarrow \lambda_{min} \ge -a_0$

$\lambda^* > \lambda_{min} \ge -a_0$ より $[\frac{a_0}{\lambda^*}] = -1$. λ_0^*が存在しない時でも(ヘ)が成立する。

上記(イ), (ニ), (ホ), (ヘ)より

$$s_2(\lambda^*) - s_2(\lambda_{min}) = \sum_{\substack{a_j<0 \\ j \ne k}} \left([\frac{a_j}{\lambda^*}] - [\frac{a_j}{\lambda_{min}}]\right)(-x_j) \le 0$$

$s_2(\lambda^*) \le s_2(\lambda_{min})$

$0 \le s_2(\lambda^*) \Rightarrow \underset{0\le}{} s_2(\lambda_{min})$ つまり $s_2(\lambda^*)$の方が $s_2(\lambda_{min})$ より強い

A　B　C　D　E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

$\boxed{\min_{j\in J^*} \lambda^*_j = \infty \text{ の時}}$ （有限の λ^* が存在しない時）

$\Updownarrow$

Case3 $(\lambda_{min} \geq -a_0 \ \& \ \forall j: \text{nonbasic } a_j \leq 0)$

or

Case4 $(\lambda_{min} \geq -a_0 \ \& \ \forall j: \text{nonbasic } a_j > 0 \Rightarrow \lambda_{min} > a_j)$

<u>Note</u> $\lambda_{min} \geq -a_0 \Longleftrightarrow \left[\frac{a_0}{\lambda_{min}}\right] = -1$

<u>Case 3</u>

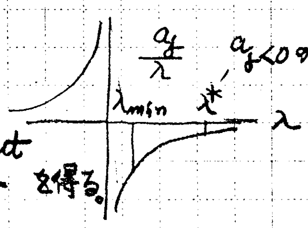
$$s_2(\lambda_{min}) = -1 + \sum_{a_j<0} \left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right](-x_j)$$

λ^* を十分大きく取れば $\lambda^* > \lambda_{min} > 1$

$\left[\frac{a_0}{\lambda^*}\right] = -1$,

$$s_2(\lambda^*) - s_2(\lambda_{min}) = \sum_{a_j<0} \Big(\overbrace{\left[\frac{a_j}{\lambda^*}\right] - \left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right]}^{\geq 0}\Big)(-x_j) \leq 0$$

$s_2(\lambda^*) \geq 0 \Rightarrow s_2(\lambda_{min}) \geq 0$



$\lambda^* = \max\{\lambda_{min}, \max\{-a_j : 1\leq j\leq n\}\}$ として常に cut

$s_2(\lambda^*) = -1 + \sum_{1\leq j, a_j<0} (-1)(-x_j) \geq 0$ integer を得る。

<u>Case 4</u>

$$s_2(\lambda_{min}) = -1 + \sum_{a_j<0} \left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right](-x_j) + \sum_{a_j>0} \underbrace{\left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right]}_{=0}(-x_j)$$

λ^* を十分大きく取れば $\lambda^* > \lambda_{min} > 1$

$\left[\frac{a_0}{\lambda^*}\right] = -1$, $\left[\frac{a_j}{\lambda^*}\right] = 0$ に注意して

$$s_2(\lambda^*) - s_2(\lambda_{min}) = \sum_{a_j<0} \Big(\overbrace{\left[\frac{a_j}{\lambda^*}\right] - \left[\frac{a_j}{\lambda_{min}}\right]}^{\geq 0}\Big)(-x_j) \leq 0$$

よって $s_2(\lambda^*) \geq 0 \Rightarrow s_2(\lambda_{min}) \geq 0$

$\lambda^* = \max\{\lambda_{min}, \max\{-a_j : 1\leq j\leq n\}\}$ として常に cut

$s_2(\lambda^*) = -1 + \sum_{1\leq j, a_j<0} (-1)(-x_j) \geq 0$ integer を得る。

参考文献

Wilson ORSA (1967) 1174-1177

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

$x_0 = x_{B_0} = y_{00} - \sum_{j\in R} y_{0j} x_j$

A B C D E

$x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j\in R} y_{ij} x_j \ (0 \le i \le m)$

Garfinkel & Nemhauser の本 P. 170-171

Algorithm

Step 1: Begin with an all-integer tableau with $y_j > 0$ for all $j \in R$.

1

Step 2: $y_{i0} \ge 0 \ (1 \le \forall i \le m) \xrightarrow{YES}$ Optimal.

$\downarrow$ NO

Step 3: Choose a row ($i \ne 0$) in the tableau with $y_{i0} < 0$, say $i = r$.

2

The topmost row with y_{i0} must be chosen at least periodically.

$\exists j \in R, y_{rj} < 0 \xrightarrow{NO}$ Infeasible

$\downarrow$ YES

3

$y_k = \text{lex}\min_{j \in R, y_{rj} < 0} y_j$ integer Note $y_j - y_k > 0 \ \forall j \in R, y_{rj} < 0, j \ne k$

但し同一カラムはないものとする。

$\overline{M}_k \equiv -1$, $\overline{M}_j \equiv \min\{\alpha \mid y_j + \alpha y_k > 0\} = \min\{-(-\alpha) \text{ integer} \mid y_k < y_j/(-\alpha)\}$

for $j \in R, y_{rj} < 0, j \ne k$

4

$\overline{h} \equiv \min_{j \in R, y_{rj} < 0} \frac{\overline{M}_j}{y_{rj}} = \frac{M_j}{y_{rs}}$

$\overline{h} = 1 \Rightarrow$ Execute one dual simplex iteration with pivot element y_{rk}

5

$\overline{h} < 1 \Rightarrow$ Adjoin the cut $s = [h y_{r0}] - \sum_{j \in R} [h y_{rj}] x_j \ge 0$ integer with $h = \overline{h}$ to the bottom of the tableau.

Execute one dual simplex iteration with s as the departing variable and x_k as the entering variable.

6

If x_k is a slack from a cut, delete the x_k row.

Return to step 2.

7

最終的に必要な tableau の大きさは Hu の book の記述と同じだけ必要になる可能性がある。但し $x_j = -(-x_j)$ ($j \in R$) に対する pivot 計算が不要である。又集合分割問題の dual all integer algorithm に対する

A B C D E

ページ 11

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

岩材のコア節約法が最も適用し易い。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
Salkin & Koncal[1,2]のまとめ						登録番号 参照番号 作成者

A B C D E

Salkin & Koncal のまとめ

問題：Set Covering Problem $\min\{cx \mid Ex \geq e,\ x\text{:binary}\}$

$$E = \overset{m\times n}{(0,1)},\quad e = \left.\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right\}m,$$

Lemke, Salkin and Spielberg (1971, OR 998-1022) より次を仮定してよい。

<u>Ass.</u> E は zero column を持たず、E の各 row は少なくとも1つの1をもつ。

& $c>0$

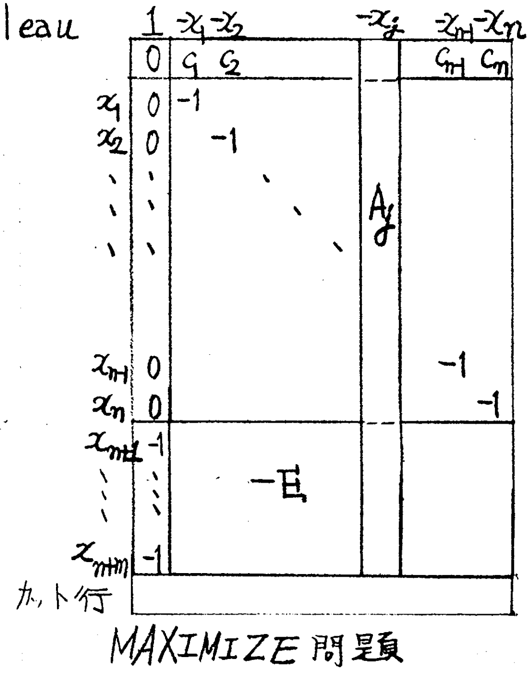
上述<u>Ass.</u>の下で $\min\{cx \mid Ex \geq e,\ x\text{:binary}\} = \min\{cx \mid Ex \geq e,\ x \geq 0 \text{ integer}\}$

が証明出来る。

$$\min\{cx \mid Ex \geq e,\ x\text{: binary}\} = \min\left\{cx \mid Ex - \tilde{x} = e,\ \begin{pmatrix}x\\ \tilde{x}\end{pmatrix} \geq 0 \text{ integer}\right\},\quad \tilde{x} \equiv \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ \vdots \\ x_{n+m}\end{pmatrix}$$

$$= -\max\left\{c(-x) \,\middle|\, \begin{cases} x = (-I)(-x) \\ \tilde{x} = -e + (-E)(-x)\end{cases},\ \begin{pmatrix}x\\ \tilde{x}\end{pmatrix} \geq 0 \text{ integer}\right\}$$

出発tableau



MAXIMIZE 問題

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{0j} \\ a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \\ a_{n+1,j} \\ \vdots \\ a_{n+m,j}\end{pmatrix} > 0 \quad \text{as } a_{0j} = c_j > 0$$

$R \equiv$ Index set of nonbasic variable.

tableau サイズ $= (m+n+2)*(n+1)*l$ バイト

但し整数を l バイトで持つとする。

A B C D E

The Algorithm

Step 0 Start with an all integer matrix $A=(a_{ij})=(A_1,\cdots,A_n)$, $A_j \succ 0$.

Step 1 $\exists v = \min\{i \mid 1\le i\le n+m,\ a_{i0}<0\}$? $\xrightarrow{\text{NO}}$ Optimal.

↓YES

Step 2 $a_{vj}\ge 0\ \forall j\in R$? $\xrightarrow{\text{YES}}$ Infeasible.

↓no

Select column A_s so that

$$\frac{A_s}{a_{vs}} = \underset{j\in R,\, a_{vj}<0}{\operatorname{lex\,max}} \frac{A_j}{a_{vj}}$$

$a_{vs}=-1 \Rightarrow$ label row v the pivot row and A_s the pivot column; go to Step 4.

$a_{vs}<-1 \Rightarrow$ go to Step 3

Step 3 Gomoryの提案する方法でλ（>1，必ず$\lambda>1$となる）を計算せよ。 Gomory cutをタブローの最下部におけ。

$$g=[a_{v0}/\lambda]+\sum_{j\in R}[a_{vj}/\lambda](-x_j)\ge 0 \quad \text{integer}$$

このGomory cut行をpivot rowとしλ決定時に決められたカラムA_sをpivot columnとせよ。

Step 4 Dual simplex iterationを1回行え。Gomory slack変数g（以前追加されたもの）がbasicになったらgとgを定義しているrowを除去せよ。

Step 1に戻れ。

演習「有限収束性のきちんとした証明を与えよ」

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A B C D E

λの計算とA_sの決定（Gomoryの提案）

(i) vをソース行とする。

$$A_s \equiv \underset{a_{vj}<0}{\operatorname{lexmin}} A_j$$

(ii) $\mu_s \equiv 1\ ,\ \mu_j \equiv \max\{ u_j \text{ integer} \mid A_s \prec \frac{A_j}{u_j} \} (\geq 1)\ \forall j \neq s, a_{vj}<0$

(iii) $\lambda \equiv \max_{j: a_{vj}<0} \left(-a_{vj}/\mu_j\right) = \max_{j: a_{vj}<0} \lambda_j\ ,\ \lambda_j = -a_{vj}/\mu_j \text{ for } \forall j, a_{vj}<0$

Note $\lambda \geq 1$

Lemma Step3に制御が移って上述の方法でλが計算されるならば $\lambda > 1$.

Proof

$$\frac{A_s}{a_{vs}} = \underset{j\in R, a_{vj}<0}{\operatorname{lexmax}} \frac{A_j}{a_{vj}}\ ,\ a_{vs} < -1$$

$$A_{\tilde{s}} = \underset{a_{vj}<0}{\operatorname{lexmin}} A_j\ ,\ \lambda = \max_{j: a_{vj}<0} \left(\frac{-a_{vj}}{\mu_j}\right) = 1,\ \mu_{\tilde{s}} = 1 \quad \text{とする。}$$

$$\lambda = 1 \geq \frac{-a_{v\tilde{s}}}{\mu_{\tilde{s}}} = \overset{\text{integer}}{-a_{v\tilde{s}}} > 0 \text{ より } a_{v\tilde{s}} = -1.$$

$$\begin{cases} s = \tilde{s} \Rightarrow -1 = a_{v\tilde{s}} = a_{vs} < -1 \quad \text{矛盾} \\ s \neq \tilde{s} \Rightarrow \dfrac{A_s}{a_{vs}} \succ \dfrac{A_{\tilde{s}}}{a_{v\tilde{s}}} = -A_{\tilde{s}} \text{(イ)},\ \lambda = 1 \geq \dfrac{-a_{vs}}{\mu_s} > 0,\ \mu_s \geq -a_{vs} > 0 \end{cases}$$

$$A_{\tilde{s}} \prec \frac{A_s}{\mu_s} (\mu_s\text{の定義}) \overset{A_s \succ 0}{\preceq} \frac{A_s}{-a_{vs}}$$

つまり

$$-A_{\tilde{s}} \succ \frac{A_s}{a_{vs}} \quad \text{(ロ)}$$

(イ), (ロ) より

$$-A_{\tilde{s}} \prec \frac{A_s}{a_{vs}} \prec -A_{\tilde{s}} \quad \text{即ち} \quad -A_{\tilde{s}} \prec -A_{\tilde{s}} \quad \text{矛盾}$$

いずれにせよ矛盾が生じるので

$$\frac{A_s}{a_{vs}} = \underset{j\in R, a_{vj}<0}{\operatorname{lexmax}} \frac{A_j}{a_{vj}}, a_{vs} < -1 \ \&\ A_{\tilde{s}} = \underset{a_{vj}<0}{\operatorname{lexmin}} A_j \Rightarrow \lambda > 1 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A B C D E

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

Lemma $\dfrac{A_s}{a_{vs}} = \underset{j\in R,\, a_{vj}<0}{\operatorname{lexmax}} \dfrac{A_j}{a_{vj}}$, $a_{vs} < -1$

$A_{\tilde{s}} = \underset{a_{vj}<0}{\operatorname{lexmin}} A_j$, $\mu_{\tilde{s}}=1$, $\mu_j = \max\{u_j \text{ integer} \mid A_{\tilde{s}} \prec \dfrac{A_j}{u_j}\}$ for $\forall j \neq \tilde{s}$, $a_{vj}<0$

$\lambda = \underset{a_{vj}<0}{\max}\left(-a_{vj}/\mu_j\right)$ において

$s = \tilde{s} \Longrightarrow \lambda > 1$

Proof $s=\tilde{s}$ & $\lambda = 1$ とせよ。

$\lambda = 1 \geqq \dfrac{-a_{v\tilde{s}}}{\mu_{\tilde{s}}} = -a_{v\tilde{s}} = -a_{vs} > 0$ ∴ $a_{vs} = -1$ 矛盾 Q.E.D.

Salkin & Koncal のアルゴリズムに対する検当

(i) $\dfrac{A_s}{a_{vs}} = \operatorname*{lexmax}_{j\in R,\, a_{vj}<0} \dfrac{A_j}{a_{vj}}$ の計算は重い。$a_{vs} < -1$ の時には

$$A_{\tilde{s}} = \operatorname*{lexmin}_{a_{vj}<0} A_j,\quad \mu_j = \{u_j \text{ integer} \mid A_s < A_j/u_j\} \text{ for } j \neq \tilde{s},\ a_{vj}<0$$

の計算もしなければならない。 $\dfrac{A_s}{a_{vs}} = \operatorname*{lexmax}_{j\in R,\, a_{vj}<0} \dfrac{A_j}{a_{vj}}$ の計算は $A_{\tilde{s}}$ と λ の決定計算と同程度の量である。

Gomory の dual all integer algorithm を直接適用した方が計算量は少ないだろう。要詳細検当。$s = \tilde{s}$ の場合はむしろ骨折り損のくたびれもうけ。

(ii) アルゴリズムをこのままにして $x = -(-x)$ を出発タブローにくっつけておかねばならぬ理由はない。

(iii) Garfinkel & Nemhauser の記述にある計算法(dual all integer algorithm)を採用した方が記憶容量、計算時間の双方から見て有利である。

(iv) 下記文献2. はより大きなサイズを扱える様になったが bookkeeping に要する時間により反って遅くなったと報告している。プログラムリストを見なければ更に調べることが出来ない。

文献

1. Salkin & Koncal "A Pseudo dual all-integer algorithm for the set covering problem" T.M. No.204, Nov. 1970, CWRU
2. Salkin & Koncal "A dual all-integer algorithm (in revised simplex form) for the set covering problem" T.M. No.250, Aug. 1971, CWRU
3. Garfinkel & Nemhauser "Integer Programming" 1972, John Wiley & Sons

Hu "Integer Programming & Network Flows" 1970, Addison-Wesley

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

集合分割問題を
Dual All Integer Algorithm
で解くための変形方法について

集合被覆問題を解くdual all integer algorithmで解くコードを作成したSalkin & Koncal[文献3,4]は集合分割問題を集合被覆問題に変形して解いた。Salkin & Koncalの変形に対し記憶域、計算時間双方に改善する変形法及び人為変数の処理法を考察する。

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A　B　C　D　E

Salkin & Koncalの方法［文献3,4　］

Lemke, Salkin & Spielberg (1971) の方法でCovering Problemに変換する。

$L > \sum_{j=1}^{m} c_j$ な任意のLに対し［文献1の p.300, 文献2］

$$\min\{cx \mid Ax = e, x: \text{binary}\} = \min\Big\{\sum_{j=1}^{n}\Big(c_j + L\cdot\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Big)x_j \,\Big|\, Ax \geq e, x: \text{binary}\Big\}$$

$h_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ を用いて

$$= \min\Big\{\sum_{j=1}^{n}(c_j + Lh_j)x_j \,\Big|\, Ax \geq e, x: \text{binary}\Big\}$$

$$= -\max\Big\{\sum_{j=1}^{n}(c_j + Lh_j)(-x_j) \,\Big|\, Ax \geq e, x: \text{binary}\Big\}$$

出発tableau 及び最大tableauサイズ

$$\begin{array}{lccccc}
 & 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\
x_0 & 0 & c_1 + Lh_1 & c_2 + Lh_2 & & c_n + Lh_n \\
x_1 & 0 & -1 & & & \\
x_2 & 0 & & -1 & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
x_n & 0 & & & & -1 \\
x_{n+1} & -1 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & -a_{ij} & \\
x_{n+m} & -1 & & & & \\
\text{cut row} & & & & &
\end{array}$$

最大tableauサイズ

$= (m+n+2)*(n+1)*l$ バイト，但し整数はlバイトで持つ。

(m, n)	$(m+n+2)*(n+1)*l$	
	$l = 2$	$l = 4$
(134, 1642)	5,842,508	
(50, 905)	1,734,084	
(26, 777)	1,252,580	
(46, 683)	1,000,008	
(200, 500)	703,404	
(104, 498)	602,792	
(36, 455)	449,616	
(50, 450)	452,804	

A　B　C　D　E

岩村の方法

$$\min\{cx \mid Ax=e,\ x\geq 0\ \text{integer}\} \leq \max\{cx \mid Ax=e,\ x\geq 0\ \text{integer}\} < \left\{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} c_j + 1 \\ \langle m \cdot \max_{1\leq j\leq n} (c_j/h_j)\rangle + 1 \\ \langle \sum_{\ell=1}^{s} v_\ell + v_{s+1}(m - \sum_{\ell=1}^{s} n_\ell)\rangle + 1 \end{array}\right\} M$$

$$\| $$

$$-\max\{-cx \mid Ax=e,\ x\geq 0\ \text{integer}\}$$

(P1) $\max\{-cx \mid Ax=e,\ x\geq 0\ \text{integer}\}\ (> -M)$

(P2) $\max\left\{-cx - M(x_{n+1}+\cdots+x_{n+m}) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = 1\ (1\leq i\leq m),\ x_\ell \geq 0\ \text{integer}\ (1\leq \ell\leq n+m)\right\}$

性質a. (P2) は dual feasible integer solution $x_\ell = 0\ (1\leq \ell\leq n)$, $x_\ell = -1\ (n\leq \ell\leq n+m)$ を持つ。

$$x_0 = -M\Big(\sum_{i=1}^{m}\big(-1+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\big)\Big) - cx = -M\big(-m+\sum_{j=1}^{n} h_j x_j\big) - cx$$
$$= mM + \sum_{j=1}^{n} (Mh_j + c_j)(-x_j)$$

$$\left[\ x_{n+i} = -1 + \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})(-x_j)\ (1\leq i\leq m),\quad Mh_j + c_j > 0\ (1\leq j\leq n)\ \right]$$

性質b. (P1) が feasible integer solution を持つ。

$\Updownarrow$

(P2) が $-M$ より大の目的函数値をもつ feasible integer solution を持つ。

性質c. (P2) の目的函数値 $\geq -\sum_{j=1}^{n} c_j - mM$

上記 a, b, c. より (P2) に dual all integer algorithm を適用して有限回の dual simplex iteration の後に (P2) の optimal integer solution が得られる。この目的函数値が

$$\begin{cases} -M\text{より大} \Rightarrow \text{(P2)の optimal integer solution は (P1) の optimal integer solution.} \\ -M\text{以下} \Rightarrow \text{(P1) は infeasible.} \end{cases}$$

確かに目的函数値が $-M$ より大ならば、この optimal integer solution の

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

$x_\ell^0=0\ (n+1\le \ell\le n+m)$ で x^ℓ は $(P2)\Big|_{x_\ell=0(n+1\le \ell\le n+m)}$ の optimal integer solution でもある。$(P2)\Big|_{x_\ell=0(n+1\le \ell\le n+m)}$ は問題として(P1)そのものであるから確かに(P1)の optimal integer solution になる。

出発tableau　及び出発tableauサイズ

$$\begin{array}{cc|c|cccc} & & 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\ x_0 & & mM & Mh_1+c_1 & Mh_2+c_2 & \cdots & Mh_n+c_n \\ \hline x_{n+1} & & -1 & & & & \\ \vdots & = & \vdots & & -a_{ij} & & \\ x_{n+m} & & -1 & & & & \\ \hline \text{カット行} & & & & & & \end{array}$$

→但し集合分割問題の特性$(-a_{ij}=-1)$から最初はカット行不要。

出発tableauサイズ　$=(m+1)*(n+1)*\ell$ バイト

但し整数はℓバイト固定小数点数で持つ。

用いるdual all integer algorithmは文献1, P.170−171で述べられたものを用いる。

人為変数$x_{n+1}\sim x_{n+m}$のうちのどれかが非基底変数になったら、例えばx_u, $n+1\le u\le n+m$, このx_uと対応するカラムをタブローから除去する。正当性はこの人為変数x_uと対応するカラムを落とした後のタブローが問題(P2)で$x_u=0$としたもの即ち問題$(P2)\Big|_{x_u=0}$に対応していることから解る。この手続は誰でも考え付くものであると思われるが不思議なことに文献3, 4には何一つふれられていない。文献3, 4は強引にCovering問題に変形して解いているだけである。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

この様にした場合の最大タブローサイズは、

a. 出発タブローの大きさ ------------ $(m+1)*(n+1)$

b. $\bar{h}=1$ で非基底に入る変数が $x_{n+1}\sim x_{n+m}$ である dual simplex pivot が d 回続いた時の最終タブローの大きさ $(1\le d\le m)$ ---- $(m+1)*(n+1-d) \geq (m+1)*(n-m+1)$

c. CUT を入れて基底が大きくなった場合の最終（最大）タブローサイズ ------ $(m+n+2-d)*(n+1-d) \geq (n+2)*(n-m+1)$

$$\text{比}\ r(d) \equiv \frac{(m+n+2-d)*(n+1-d)}{(m+n+2)*(n+1)}$$

$$r(m) = \frac{(n+2)*(n-m+1)}{(m+n+2)*(n+1)} \begin{cases} \approx \dfrac{1\cdot(1-\frac{m}{n})}{(1+\frac{m}{n})\cdot 1} \approx 1-2\dfrac{m}{n} & \left(\dfrac{m}{n}\ll 1\right) \\ \approx 0 & \left(\dfrac{m}{n}\approx 1\right) \end{cases}$$

即ち $\frac{m}{n}$ が十分小さい時は効果はあまりない。

	$(m+n+2-d)*(n+1-d)*l$				
	$d=m\,[(n+2)*(n+1-m)*l]$		$d=m/2\,[(n+2+m/2)*(n+1-m/2)*l]$		
(m, n)	$l=2$	$l=4$	$l=2$	$l=4$	$m/2$
(134, 1642)	4,961,592		5,393,072		67
(50, 905)	1,552,784		1,642,184		25
(26, 777)	1,171,616		1,211,760		13
(46, 683)	874,060		935,976		23
(200, 500)	302,204		482,804		100
(104, 498)	395,000		493,488		52
(36, 455)	383,880		416,100		18
(50, 450)	362,504		406,404		25

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
岩村の方法の節約率						参照番号
						作成者

$$節約率 = 1 - r(d)$$

	$d = m$		$d = m/2$	
(m, n)	$r(d)$	$1-r(d)$	$r(d)$	$1-r(d)$
134, 1642	.85	.15	.92	.08
50, 905	.90	.10	.95	.05
26, 777	.94	.06	.97	.03
46, 683	.87	.13	.94	.06
200, 500	.43	.57	.69	.31
104, 498	.66	.34	.82	.18
36, 455	.85	.15	.93	.07
50, 450	.80	.20	.90	.10

不要なカラムをtableauから落すに必要な bookkeeping に要する分だけ計算時間が増加するのである一定数のカラムが不要になったらタブローから落す様にした方が良いかも知れない。タブローから落とした分だけピボット計算が不要になるので book-keeping による over head を十分相殺出来る。$n \leq 5m$ に対しては十分メリットがあると思われる。
記憶域の大きさと計算時間との双方を解善させることが十分期待出来る。

数理計画の研究で理論家は自分の理論をどうインプリメントするかに対して現在責任を負っていない。一方プログラムを作成して効率の実験をする実験家の実験結果はソースプログラムリストを公表したがらない。このような現状ではプログラムデザイン的仕事が十分価値を持つのではないかと思い、あえて報告いたします。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
岩村の方法による計算例						登録番号 参照番号 作成者

集合分割問題を岩村の方法で解く場合 $x_{n+1} \sim x_{n+m}$ が非基底変数になったら対応するカラムを対象からはずす（非基底に入った変数 x_ℓ, $n+1 \leq \ell \leq n+m$ の値を0にし x_ℓ を常に非基底にとどめておく）というルールを採用して2〜3の例題を解いてみること。

タイトル 例1A

年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
					参照番号
					作成者

集合分割問題を解く dual all integer algorithm に対するコア節約法

例 G.N. の book p. 315, Example $m=5,\ n=8,\ M=\sum_{j=1}^{8} c_j+1=53$

$h=(1,2,1,2,2,2,2,1)$ $2\times 53=106$

$Mh=(53,106,53,106,106,106,106,53)$ $mM= 265$

$C=(3\ 7\ 5\ 8\ 10\ 4\ 6\ 9)$

$Mh+C=(56\ 113\ 58\ 114\ 116\ 110\ 112\ 62)$

	1	$-x_1$ (k)	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
x_0	265	56	113	58	114	116	110	112	62
x_9	-1	-1	-1						
x_{10}	-1			-1	-1	-1			
x_{11} =	-1					-1	-1	-1	
x_{12}	-1							-1	-1
x_{13}	-1		-1		-1		-1		

Cr $R_h=\{1,2\}$

$k=1,\ \overline{M}_1=-1,\ \overline{M}_2=-2$

$\overline{h}=\min(-1/-1,\ -2/-1)=1$

113 − 56 = 57

	1	$-x_9$	$-x_2$	$-x_3$ (k)	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
x_0	209	56	57	58	114	116	110	112	62
x_1	1	-1	1						
x_{10}	-1			-1	-1	-1			
x_{11} =	-1					-1	-1	-1	
x_{12}	-1							-1	-1
x_{13}	-1		-1		-1		-1		

$R_h=\{3,4,5\}$

Cr $k=3,\ \overline{M}_3=-1,\ \overline{M}_4=-1,\ \overline{M}_5=-2$

$\overline{h}=\min(-1/-1,\ -1/-1,\ -2/-1)=1$

114 − 58 = 56

	1	$-x_2$	$-x_{10}$	$-x_4$	$-x_5$ (k)	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
x_0	151	57	58	56	58	110	112	62
x_1	1	1						
x_3	1		-1	1	1			
x_{11} =	-1				-1	-1	-1	
x_{12}	-1						-1	-1
x_{13}	-1	-1		-1		-1		

$R_h=\{5,6,7\}$

$k=5,\ \overline{M}_6=-1,\ \overline{M}_7=-1$

Cr $\overline{h}=\min(-1/-1,\ -1/-1,\ -1/-1)=1$

151 − 58 = 93   110 − 58 = 52

	1	$-x_2$	$-x_4$	$-x_{11}$	$-x_6$	$-x_7$ (k)	$-x_8$
x_0	93	57	56	58	52	54	62
x_1	1	1					
x_3	0		1	1	-1	-1	
x_5 =	1			-1	1	1	
x_{12}	-1					-1	-1 Cr
x_{13}	-1	-1	-1		-1		

$R_h=\{7,8\}$

$k=7,\ \overline{M}_8=-1$

$\overline{h}=\min(-1/-1,\ -1/-1)=1$

93 − 54 = 39   62 − 54 = 8

	1	$-x_2$	$-x_4$	$-x_6$ (k)	$-x_{12}$	$-x_8$
x_0	39	57	56	52	54	8
x_1	1	1				
x_3	1		1	-1	-1	1
x_5	0			1	1	-1
x_7	1				-1	1
x_{13}	-1	-1	-1	-1		Cr

$R_h=\{2,4,6\}$

$k=6,\ \overline{M}_2=-1,\ \overline{M}_4=-1$

$\overline{h}=1$

52 − 39 = 13

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A B C D E

	1	$-x_2$	$-x_4$	$\cancel{-x_3}$	$-x_8$
x_0	-13	5	4	$\cancel{52}$	8
x_1	1	1			
x_3	2	1	2	$\cancel{-1}$	1
x_5	-1	-1	-1	$\cancel{1}$	-1 (r
x_7	1				1
x_6	1	1	1	$\cancel{-1}$	

$R_h = \{2, 4, 8\}$

$k = 4$, $\overline{M_2} = -1$, $\overline{M_8} = -1$

$\overline{h} = \min(-1/-1, -1/-1, -1/-1) = 1$

	1	$-x_2$	$-x_5$	$-x_8$
x_0	-17	1	4	4
x_1	1	1		
x_3	0	-1	2	-1
x_4	1	1	-1	1
x_7	1			1
x_6	0	0	1	-1

Optimal

Stop.

A B C D E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
例B						参照番号
						作成者

例 G. N. の book p.320 Exercise 16 但 x_4 カラムの R4 row の値を 0 に変形したもの。 $m=6$, $n=10$, $M=\langle \sum_{\ell=1}^{s} v_\ell + v_{s+1}(m-\sum_{\ell=1}^{s} n_\ell)\rangle+1=62$, $mM=372$

$h=(3,2,3,3,2,2,2,1,2,1)$

$Mh=(186\ 124\ 186\ 186\ 124\ 124\ 124\ 62\ 124\ 62)$

$c=(36\ 18\ 24\ 22\ 14\ |\ 17\ 14\ 8\ 14\ 7)$

$(-Mh+C=(222\ 142\ 210\ 208\ 138\ |\ 141\ 138\ 70\ 138\ 69)$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$	$-x_1$	$-x_8$	$-x_2$	$-x_6$	$-x_5$	$-x_3$	$-x_7$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	372	222	142	210	208	138	141	138	70	138	69
x_{16}	-1	-1	-1	-1	-1	-1					
x_{11}	-1						-1	-1			
x_{15} =	-1		-1		-1				-1	-1	
x_{14}	-1			-1				-1			-1
x_{12}	-1	-1				-1	-1				
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	

$R_r=\{1,2,3,4,5\}$
$k=5$, $\overline{M_j}=-1$ $j\in R_r\setminus\{k\}$
$\overline{h}=1$

	1	$-x_4$	$-x_1$	$-x_8$	$-x_2$	$-x_{16}$	$-x_5$	$-x_3$	$-x_7$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	234	84	4	72	70		141	138	70	138	69
x_6	1	1	1	1	1						
x_{11}	-1						-1	-1			
x_{15} =	-1		-1		-1				-1	-1	
x_{14}	-1			-1				-1			-1
x_{12}	0	0	1	1	1		-1				
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	

$R_r=\{6,7\}$
Cr $k=7$, $\overline{M_6}=-1$
$\overline{h}=1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$	$-x_1$	$-x_8$	$-x_2$		$-x_5$	$-x_{11}$	$-x_7$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	96	84	4	72	70		3		70	138	69
x_6	1	1	1	1	1						
x_3	1						1				
x_{15} =	-1		-1		-1				-1	-1	
x_{14}	0			-1			1				-1
x_{12}	0		1	1	1		-1				
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	

$R_r=\{2,4,8,9\}$
Cr $k=2$, $\overline{M_4}=-17$, $\overline{M_8}=-17$, $\overline{M_9}=-34$
$\overline{h}=1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$	$-x_{15}$	$-x_8$	$-x_2$		$-x_5$		$-x_7$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	92	84		72	66		3		66	134	69
x_6	0	1		1					-1	-1	
x_3	1						1				
x_1 =	1				1				1	1	
x_{14}	0			-1			1				-1
x_{12}	-1			1			-1		-1	-1	
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	

$R_r=\{6,8,9\}$
$k=6$, $\overline{M_8}=-21$, $\overline{M_9}=-44$
$\overline{h}=1$

Cr

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$		$-x_8$	$-x_2$		$-x_{12}$		$-x_7$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	89	84		75	66				63	81	69
x_6	0	1		1					-1	-1	
x_3	0			1					-1	-1	
$x_1 =$	1				1				1	1	
x_{14}	-1								-1	-1	-1 Cr
x_5	1			-1					1	1	
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	

$R_h = \{8, 9, 10\}$
$k = 8$, $\overline{M_9} = -2$, $\overline{M_{10}} = -1$
$\overline{h} = 1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$		$-x_8$	$-x_2$				$-x_{14}$	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	26	84		75	66					68	6
x_6	1	1		1							1
x_3	1			1							1
$x_1 =$	0				1						-1
x_7	1									1	1
x_5	0			-1							-1
x_{13}	-1	-1		-1	-1					-1	Cr

$R_h = \{1, 3, 4, 9\}$
$k = 4$ $\overline{M_1} = -1 = \overline{M_3} = \overline{M_9}$
$\overline{h} = 1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$		$-x_8$	$-x_{13}$					$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	-40	18		9						2	6
x_6	1	1		1							1
x_3	1			1							1
$x_9 =$	-1	-1		-1						-1	-1 Cr
x_7	1									1	1
x_5	0			-1							-1
x_2	1	1		1						1	

$R_h = \{1, 3, 9, 10\}$
$k = 9$, $\overline{M_1} = -9$, $\overline{M_3} = -4$, $\overline{M_{10}} = -3$
$\overline{h} = 1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	$-x_4$		$-x_8$						$-x_7$	$-x_{10}$
x_0	-42	16		7						2	4
x_6	1	1		1							1
x_3	1			1							1
$x_9 =$	1	1		1						-1	1
x_7	0	-1		-1						1	
x_5	0			-1							-1
x_2	0									1	-1

OPTIMAL

STOP

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
例C						参照番号
						作 成 者

Feasible integer solution を持たない例 (G. N. book p. 303 Example)

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$	$-x_9$	
	x_0	511	229	297	300	152	301	159	157	296	298	
1	x_{10}	−1	−1	−1	−1		−1		−1	−1		σ
2	x_{11}	−1		−1	−1					−1		
3	x_{12}	−1		−1			−1	−1		−1	−1	
4	x_{13}	−1				−1						
5	x_{14}	−1	−1		−1		−1	−1			−1	
6	x_{15}	−1		−1	−1				−1		−1	
7	x_{16}	−1	−1			−1	−1			−1	−1	

$m=7,\ n=9,\ M=\sum_{j=1}^{9} c_j+1 = 73$

$h=(3\ 4\ 4\ 2\ 4\ 2\ 2\ 4\ 4)$

$Mh=(219\ 292\ 292\ 146\ 292\ 146\ 146\ 292\ 292)$

$c=(10\ 5\ 8\ 6\ 9\ 13\ 11\ 4\ 6)$

$Mh+c=(229\ 297\ 300\ 152\ 301\ 159\ 157\ 296\ 298)$
$\quad\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9$

$73\times2=146$
$73\times3=219$
$73\times4=292$
$73\times7=511$

$R_r=\{1,2,3,5,7,8\}$

$k=7,\ \mu_j=1,\ j\in R_r$

$\bar{h}=\min(1/-(-1),\ \ )=1$

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_{10}$	$-x_8$	$-x_9$	
	x_0	354	72	140	143	152	144	159	157	139	298	
1	x_7	1	1	1	1		1		−1	1		
2	x_{11}	−1		−1	−1					−1		Cr
3	x_{12}	−1		−1			−1	−1		−1	−1	
4	x_{13}	−1				−1						
5	x_{14}	−1	−1		−1		−1	−1			−1	
6	x_{15}	0	1				1		1	1	−1	
7	x_{16}	−1	−1			−1	−1			−1	−1	

$R_r=\{2,3,8\}$

$k=8,\ \mu_j=1,\ j\in R_r$

$\bar{h}=1$

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_{11}$	$-x_9$	
	x_0	215	72	1	4	152	144	159	139	298	
1	x_7	0	1				1		1		
2	x_8	1		1	1				−1		
3	x_{12}	0			1		−1	−1	−1	−1	
4	x_{13}	−1				−1					Cr
5	x_{14}	−1	−1		−1		−1	−1		−1	
6	x_{15}	−1	1	−1	−1		1		1	−1	
7	x_{16}	0	−1	1	1	−1	−1		−1	−1	

$R_r=\{4\}$

$k=4,\ \mu_4=1$

$\bar{h}=1$

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_{13}$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_9$	
	x_0	63	72	1	4	152	144	159	298	
1	x_7	0	1				1			
2	x_8	1		1	1					
3	x_{12}	0			1		−1	−1	−1	
4	x_4	1				−1				
5	x_{14}	−1	−1		−1		−1	−1	−1	Cr
6	x_{15}	−1	1	−1	−1		1		−1	
7	x_{16}	1	−1	1	1	−1	−1		−1	

$R_r=\{1,3,5,6,9\}$

$k=3,\ \mu_1=18,\ \mu_3=1,\ \mu_5=36,\ \mu_6=39,\ \mu_9=74$

$\bar{h}=\min(18/1,\ 1/1,\ 36/1,\ 39/1,\ 74/1)=1$

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

	1	$-x_1$	$-x_2$	x_{14}	$-x_5$	$-x_6$	$-x_9$	
x_0	59	68	1	4	140	155	294	
1 x_7	0	1			1			
2 x_8	0	-1	1	1	-1	-1	-1	
3 x_{12}	-1	-1		1	-2	-2	-2	Cr
4 x_4	1							
5 x_3	1	1		-1	1	1	1	
6 x_{15}	0	2	-1	-1	2	1		
7 x_{16}	0	-2	1	1	-2	-1	-2	
Cut s_{17}	-1	-1			-1	-1	-1	

$R_n = \{1, 5, 6, 9\}$

$k = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_5 = 2,\ \mu_6 = 2,\ \mu_9 = 4$

$\bar{h} = \min(1, 2/2, 2/2, 4/2) = 1/2$

	1	$-s_{17}$	$-x_2$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_9$	
x_0	-9	68	1	72	87	226	
1 x_7	-1	1			-1	-1	Cr
2 x_8	1	-1	1				
3 x_{12}	0	-1		-1	-1	-1	
4 x_4	1						
5 x_3	0	1					
6 x_{15}	-2	2	-1		-1	-2	
7 x_{16}	2	-2	1		1		
8 x_1	1	-1		1	1	1	

$R_n = \{6, 9\}$

$k = 6,\quad \mu_9 = 2$

$\bar{h} = \min(1/1, 2/1) = 1$

	1	$-s_{17}$	$-x_2$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_9$	
x_0	-96	155	1	72	87	139	
1 x_6	1	-1			-1	1	
2 x_8	1	-1	1				
3 x_{12}	1	-2		-1	-1		
4 x_4	1						
5 x_3	0	1					
6 x_{15}	-1	1	-1		-1	-1	Cr
7 x_{16}	1	-1	1		1	-1	
8 x_1	0			1	1		

$R_n = \{2, 7, 9\}$

$k = 2,\ \mu_7 = 86,\ \mu_9 = 139$

$\bar{h} = \min(1/1, 86/1, 139/1) = 1$

実はこの時点で $y_{00} = -96 < -73 = -M$

だから（P1）はinfeasibleであることが解る。

	1	$-s_{17}$	$-x_{15}$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_9$
x_0	-97	156	1	72	86	138
1 x_6	1	-1			-1	1
2 x_8	0		1		-1	-1
3 x_{12}	1	-2		-1	-1	
4 x_4	1					
5 x_3	0	1				
6 x_2	1	-1	-1		1	1
7 x_{16}	0		1			-2
8 x_1	0			1	1	

(P2) optimal, $-97 < -73 = -M$

よって（P1）は

Infeasible.

検算

	x_6	x_{12}	x_4	x_2		
1				1	$\boxed{1}$	
2				1	$\boxed{1}$	
3	1	-1		1	$\boxed{1}$	
4			1		$\boxed{1}$	
5	1				$\boxed{1}$	O.K.
6				1	$\boxed{1}$	
7			1		$\boxed{1}$	

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

集合分割問題の上界値の計算法

岩村の変形をした後 dual all integer algorithm で解く時に上界値Mが大きす過るとコスト行は実数で持たなければならなくなり演算スピードを落とす。そこであまり手間をかけずに出来るだけ小さい上界値Mを計算する方法を考えておく必要がある[文献2]。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
集合分割問題の上界値の計算						登録番号 参照番号 作成者

A B C D E

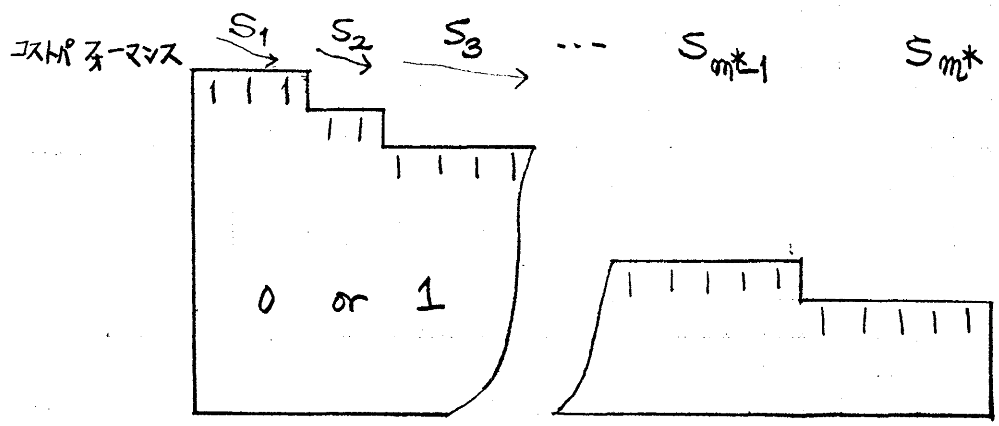
${}_{m\times n}A=(0 \text{ or } 1)$, $e=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\}m$

$\min\{cx \mid Ax=e, x\geq 0 \text{ integer}\}$

上記が feasible ならば

$\min\{cx \mid Ax=e, x\geq 0 \text{ integer}\} \leqq \max\{cx \mid Ax=e, x\geq 0 \text{ integer}\}$

$\max\{cx \mid Ax=e, x\geq 0 \text{ integer}\}$ に対し Pierce & Lasky のデータ構造を作る。ただしソートはコストパフォーマンスの大きいカラムを左におく。



$h_j \equiv \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

$\eta_p \equiv \max_{j\in S_p} h_j$, $\bar{\delta}_p = \max_{j\in S_p} c_j/h_j$, Note $\bar{\delta}_1 \geq \bar{\delta}_2 \geq \cdots \geq \bar{\delta}_{m^*-1} \geq \bar{\delta}_{m^*}$

$v_p \equiv \eta_p \bar{\delta}_p$, $\underline{\eta}_p \equiv \min_{j\in S_p} h_j$, $\tilde{\eta}_p \equiv \eta_p - \underline{\eta}_p \geq 0 \ (1\leq p\leq m^*)$

$\max\{cx \mid Ax=e, x\geq 0 \text{ integer}\}$

$=\max\{\sum_{\ell=1}^{m^*}\sum_{j\in S_\ell} c_j x_j \mid \sum_{\ell=1}^{m^*}\sum_{j\in S_\ell} a_{ij}x_j = 1\ (1\leq i\leq m),\ x_j\in\{0,1\}\ (1\leq j\leq n)\}$

上記が feasible のときは optimal solution を $(x_j^0\ (1\leq j\leq n))$ として

optimal value $=\sum_{\ell=1}^{m^*} c_j x_j^0$, $\sum_{\ell=1}^{m^*}\sum_{j\in S_\ell} a_{ij}x_j^0 = 1\ (1\leq i\leq m)$, $x_j^0\in\{0,1\}\ (1\leq j\leq n)$.

そこで $\exists L' \subseteq \{1,2,\cdots,m^*\}$, $x_j^0=\begin{cases}1 & \text{for } j = {}^{\exists 1} j(\ell)\in S_\ell\\ 0 & \text{for } j\in S_\ell\setminus\{j(\ell)\}\end{cases}$ $(\ell\in L'=\{1',2',\cdots,N'\},\ N\leq m^*)$

Note $s\leq s'$

$x_j^0 = 0$ for $j\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\bigcup_{s=1}^{N} S_{s'}$

A B C D E

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A　B　C　D　E

optimal value $= \sum_{\ell=1'}^{\nu'} c_{j(\ell)}$, $\sum_{\ell=1'}^{\nu'} \sum_{j\in S_\ell} h_j x_j^\circ = m$ 即ち $\sum_{\ell=1'}^{\nu'} h_{j(\ell)} = m$.

$$\sum_{\ell=1'}^{\nu'} c_{j(\ell)} = \sum_{\ell=1'}^{\nu'} \frac{c_{j(\ell)}}{h_{j(\ell)}} h_{j(\ell)} \le \sum_{\ell=1'}^{\nu'} \bar{\delta}_\ell h_{j(\ell)}$$

$$= \sum_{\ell\in L'} \bar{\delta}_\ell h_{j(\ell)} \le \max\left\{ \sum_{\ell\in L'} \bar{\delta}_\ell \tilde{h}_\ell \;\middle|\; \sum_{\ell\in L'} \tilde{h}_\ell = m,\ \tilde{h}_\ell \in \{h_u, u\in S_\ell\} (\ell\in L') \right\}$$

$$= \max\left\{ \sum_{\ell\in L'} \bar{\delta}_\ell \tilde{h}_\ell \;\middle|\; \sum_{\ell\in L'} \tilde{h}_\ell = m,\ 0\le \tilde{h}_\ell \le n_\ell (\ell\in L') \right\}$$

$$\leqq \max\left\{ \sum_{\ell=1}^{m^*} \bar{\delta}_\ell \tilde{h}_\ell \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{m^*} \tilde{h}_\ell = m,\ 0\le \tilde{h}_\ell \le n_\ell (1\le \ell \le m^*) \right\}$$

$$= \max\left\{ \sum_{\ell=1}^{m^*} n_\ell \bar{\delta}_\ell \left(\frac{\tilde{h}_\ell}{n_\ell}\right) \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{m^*} n_\ell \left(\frac{\tilde{h}_\ell}{n_\ell}\right) = m,\ 0\le \frac{\tilde{h}_\ell}{n_\ell} \le 1 (1\le \ell \le m^*) \right\}$$

$$= \max\left\{ \sum_{\ell=1}^{m^*} v_\ell \omega_\ell \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{m^*} n_\ell \omega_\ell = m,\ 0\le \omega_\ell \le 1 (1\le \ell \le m^*) \right\}$$

$\sum_{\ell=1}^{s} n_\ell \le m < \sum_{\ell=1}^{s+1} n_\ell$ なるsがあるから（$m \le \sum_{\ell=1'}^{\nu'} n_\ell \le \sum_{\ell=1}^{m^*} n_\ell$ に注意）

$$\sum_{\ell=1'}^{\nu'} c_{j(\ell)} \leqq \sum_{\ell=1}^{s} v_\ell + v_{s+1}\left(m - \sum_{\ell=1}^{s} n_\ell\right) \quad (1)$$

例1 (G.N. book p.315, Example)

カラム場所	1	2	3	4	5	6	7	8
カラム名	x_8	x_7	x_3	x_5	x_4	x_2	x_1	x_6
コスト	9	6	5	10	8	7	3	4
R4	1	1						
R2			1	1	1			
R1						1	1	
R3		1		1				1
R5					1	1		1
HJ2( )	1	2	1	2	2	2	1	2
コストパフォーマンス	9.	3.	5.	5.	4.	3.5	3.	2.

n_i	2	2	2	2
$\bar{\delta}_i$	9.	5.	3.5	2.
v_i	18.	10.	7.	4.

$m=5$, $m^*=4$, $n_1+n_2 < m < n_1+n_2+n_3$

上界値 $= 28+3.5 = 31.5$ (1)

例2 (G.N. の book p.320 Exercise 16)
C4 の R4 を 0 に変形したもの

カラム場所	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
カラム名	x_4	x_1	x_8	x_2	x_6	x_5	x_3	x_7	x_9	x_{10}
コスト	36	18	24	22	14	17	14	8	14	7
R6	1	1	1	1	1					
R1						1	1			
R5		1		1				1	1	
R4			1				1			1
R2	1				1	1				
R3	1		1	1					1	
HJ2	3	2	3	3	2	2	2	1	2	1
コストパフォーマンス	12.	9.	8.	7.3	7.	8.5	7.	8.	7.	7.

n_i	3	2	2	1
$\bar{\delta}_i$	12.	8.5	8.	7.
v_i	36.	17.	16.	7.

$m=6$, $n=10$, $m^*=4$, $n_1+n_2 < m < n_1+n_2+n_3$

上界値 $= 53+8. = 61.$ (1)

A　B　C　D　E

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

Optimal feasible solution を x^0 とすれば

$$cx^0 = \sum_{j:x_j^0=1} c_j \cdot 1 \leq \sum_{j=1}^{n} c_j < \sum_{j=1}^{n} c_j + 1 \quad (2)$$

Lemke, Salkin & Spielberg の方法によって Set Covering 問題に変形する時は現在のところこの値を用いなければならない。岩村の方法によれば

$\min\{cx \mid Ax=e,\ x \geq 0 \text{ integer}\}$

より大，従って

$\max\{cx \mid Ax=e,\ x \geq 0 \text{ integer}\}$ (又は $\max\{cx \mid Ax=e, 0 \leq x \leq 1\}$)

より大な整数値ならば何でも良い。このことはコスト行の値、特に出発タブローでの $Mh_j + c_j$ の値、を固定小数点で正しく持ち、かつ固定小数点桁あふれを防ぐ上で重要である。

$$cx^0 = \sum_{j:x_j^0=1} c_j$$

$$= \sum_{j:x_j^0=1} h_j \left(c_j/h_j\right) \quad , \quad Ax^0=e \text{ より } \sum_{j:x_j^0=1} h_j = m, \quad c_j/h_j \leq \max_{1\leq j\leq n} c_j/h_j$$

$$\leqq m \cdot \max_{1\leq j\leq n} \left(c_j/h_j\right)$$

$$< m \cdot \max_{1\leq j\leq n} \left(c_j/h_j\right) + 1 \quad (3)$$

前出の例について (2), (3) の値を計算してみると

例1 (G.N. の book p.315, Example)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = 52. \quad (2)$$

$$m \cdot \max_{1\leq j\leq n} \left(c_j/h_j\right) = 5 \times 9 = 45. \quad (3)$$

例2 (G.N. の book p.320 Exercise 16 の Column 4, Row 4 を 0 に変形したもの)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = 174. \quad (2)$$

$$m \cdot \max_{1\leq j\leq n} \left(c_j/h_j\right) = 6 \times 12 = 72. \quad (3)$$

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
集合分割問題の上界値の計算						登録番号
						参照番号
						作成者

Optimal feasible solution x^0 に対し $\{j \mid x_j^0 = 1\} = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_t\}$ とし、
h を昇順に $h_{a(1)} \le h_{a(2)} \le \cdots \le h_{a(n)}$,
コスト c を降順に $c_{d(1)} \ge c_{d(2)} \ge \cdots \ge c_{d(n)}$ とソートしておく。
すると

$$m = \sum_{s=1}^{t} h_{j_s} \ge \sum_{s=1}^{t} h_{a(s)}, \quad \text{従って} \quad \sum_{s=1}^{t_0} h_{a(s)} \ge m \text{ なる } t_0 \text{ に対し } t_0 \ge t.$$

$$cx^0 = \sum_{s=1}^{t} c_{j_s} \le \sum_{s=1}^{t} c_{d(s)} \le \sum_{s=1}^{t_0} c_{d(s)}$$

即ち

$$\underline{\min\{cx \mid Ax = e, x : \text{binary}\} \le \sum_{s=1}^{t_0} c_{d(s)}} \qquad (4)$$

特に $\sum_{s=1}^{m} h_{a(s)} \ge m$ よって

$$\underline{\min\{cx \mid Ax = e, x : \text{binary}\} \le \sum_{s=1}^{m} c_{d(s)}} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}
\min\{cx \mid Ax = e, x : \text{binary}\} &\le \max\{cx \mid Ax = e, x : \text{binary}\} \\
&\le \max\{cx \mid \sum_{j=1}^{n} h_j x_j = m,\ 0 \le x \le 1\} \\
&\le \max\{cx \mid \sum_{j=1}^{n} h_j x_j \le m,\ 0 \le x \le 1\}
\end{aligned}$$

上界値としての良さと計算量との trade-off!

<u>Continuous Knapsack Bound</u> (5)

例1 (G.N. book P.315, Example)
$m = 5$
$h: 1 \le 1 \le 1 \le 2 \le 2 \le 2 \le 2 \le 2$
$c: 10 \ge 9 \ge 8 \ge 7 \ge 6 \ge 5 \ge 4 \ge 3$
よって $t_0 = 4$, $\sum_{s=1}^{t_0} c_{d(s)} = 34.$

$j \leftrightarrow j$: 8 3 5 4
c_j/h_j: 9. 5. 5. 4.
h_j: 1 1 2 2
$\text{CNB} = 9. + 5. + 5 \times 2 + 4 \times (5-4)$
$= 9 + 5 + 10. + 4. = 28.$

(5) < (1) < (4) < (6) < (3) < (2)
28. 31.5 34. 40. 45. 52.

例2 (G.N. の book P.320, Exercise 16 で C4 の R4 を 0 に変形したもの) $m = 6$
$h: 1 \le 1 \le 2 \le 2 \le 2 \le 2 \le 2 \le 3 \le 3 \le 3$
$c: 36 \ge 24 \ge 22 \ge 18 \ge 17 \ge 14 \ge 14 \ge 14 \ge 8 \ge 7$
よって $t_0 = 4$, $\sum_{s=1}^{t_0} c_{d(s)} = 100$

$x_j \leftrightarrow j$: 4 1 5
c_j/h_j: 12. 9. 8.5
h_j: 3 2 2

$\text{CNB} = 12 \times 3 + 9. \times 2 + 8.5 \times (6-5)$
$= 36. + 18. + 8.5 = 62.5$

(1) < (5) < (3) < (4) < (6) < (2)
61. 62.5 72. 100. 131. 174.

ページ エ19/

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
文献						登録番号 参照番号 作成者

A B C D E

2. Lemke, Salkin & Spielberg (1971), "Set Covering by Single Branch Enumeration with Linear Programming Subproblems," Opns. Res. 19, 998-1022

1. Garfinkel & Nemhauser (1972) "Integer Programming" John Wiley & Sons.

3. Salkin & Koncal "A Pseudo dual all-integer algorithm for the set covering problem" T. M. No. 204, Nov. 1970, CWRU

4. Salkin & Koncal "A Dual all-integer algorithm (in revised simplex form) for the set covering problem" T. M. NO. 250, Aug. 1971, CWRU

5. Salkin & Koncal "Set Covering by an All Integer Algorithm: Computational Experience" J. ACM, vol 20, no. 2, 1973, 189-193

A B C D E