集合分割問題に対するBalas & Padberg のアルゴリズムのプログラムデザイン

第1版

城西大(理)
岩村覚三

38頁 1979.1.22.
36頁 1979.6.19.

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

目　次

終

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A B C D E

I. Balas & Padberg のアルゴリズムに対する検討

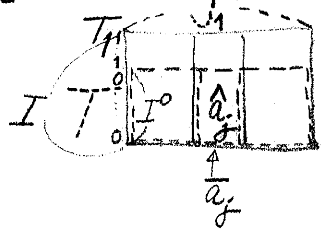
1 1. Bland の対策及びその改良論文の結果を集合分割問題に対する Balas & Padberg のアルゴリズムと組合わせて有限収束する primal integer algorithm（Young と違うやり方の、pivot 計算だけの、cut を用いない）が生み出せないか？ 1979.2.5.

A B C D E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
Balas & Padberg ORSA (1975) Vol 23 74−90						登録番号
						参照番号
						作成者

CGP (Column Generating Procedure)

x^1: basic feasible integer solution to $(P') = \min\{cx \mid Ax = e, x \geq 0\}$
B_1: associated basis
$A \equiv (B_1, R_1)$, $T_1 \equiv B_1^{-1} R_1 \equiv (\bar a_j, j \in J_1)$, $I^0 \equiv \{i \in I_1 \mid x_i^1 = 0\}$
$N = I_1 + J_1$
$I^0 \ni i$: marked $\leftrightarrow$ $\bar a_{ij} \in \{0, -1\}$ ($\forall j \in J \equiv$ current column index set)



start

$J \equiv J_1$, $T \equiv (\bar a_{ij}, i \in I^0, j \in J)$, $Q_j \equiv \{j\}$ ($\forall j \in J$)

1: All rows have been marked? — YES → 4; NO ↓

2: Choose any unmarked row r.
$J^+ \equiv \{j \in J \mid \bar a_{rj} > 0\}$, $J^- \equiv \{j \in J \mid \bar a_{rj} < 0\}$

a. $J^- = \phi$? — YES → $J \leftarrow J - J^+$ → mark row r; NO ↓

b. $J^+ = \phi$? — YES → $J \leftarrow J - \{j \in J \mid \bar a_{rj} < -1\}$ → mark row r; NO ↓

c. Choose any $t \in J^+$ and proceed as follows: note $t \notin J^-$

(i) $S_t \equiv S_t^1 \cap S_t^2 \cap S_t^3$

$S_t^1 \equiv \{j \in J^- \mid a_t a_j = 0\}$

$S_t^2 \equiv \{j \in J^- \mid \bar a_{hj} + \bar a_{ht} \geq -1$ for all marked row $h\}$

$S_t^3 \equiv \{j \in J^- \mid Q_j \cup Q_t$ cannot be partitioned into $\sum_{s=1}^{p} Q_{j_s}$, $J \supseteq \{j_1, \cdots, j_p\} \not\ni t\}$

(ii) $S_t = \phi$? — YES → $T \leftarrow T \setminus \{\hat a_t\}$, $J \leftarrow J \setminus \{t\}$ → B; NO ↓

$T \leftarrow T + \{\hat a_j + \hat a_t \mid j \in S_t\}$, $Q_k \equiv Q_j \cup Q_t$ ($\forall j \in S_t$)
$J \leftarrow J + \{k \mid Q_k = Q_j \cup Q_t, j \in S_t\}$ → B

B

4: Construct the full tableau $\tilde T$ by computing for each column of T the entries in the nondegenerate rows (indexed by $I_1 \setminus I^0$). Denote by $\bar a_j$ the column of $\tilde T$ corresponding to $\hat a_j$. Then create the final tableau T_f by removing from $\tilde T$ all columns $\bar a_j$ that violate the condition $\bar a_{ij} \in \{0, 1\}$ ($\forall i \in I_1 \setminus I^0$).

STOP: T_f yields all integer vertices adjacent to x^1, each in one pivot.

注 $\boxed{B}$ は1の直前，2の直前，2:a.，2:b. のいずれに入っても論理上は正しい。Balas & Padberg のフローチャートでは1に入っている。

integer or not, adjacent to a given vertex, by using Chernikova's algorithm, and then remove the noninteger ones. However, since the number of all adjacent vertices can be vastly superior to that of the integer ones, this does not seem reasonable. In the case of the above numerical example, for instance, Chernikova's procedure generates 10 noninteger vertices adjacent to $x_1=x_3=1$, $x_j=0$, $j\neq 1, 3$, in addition to the three integer vertices that were also generated by our procedure.

3. SET PARTITIONING WITHOUT CUTTING PLANES

IN THIS SECTION we describe two algorithms for solving the equality-constrained set covering problem (P). Both algorithms share the feature that they apply the

TABLE I

AN ILLUSTRATION OF THE COLUMN-GENERATING PROCEDURE

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\end{matrix} & (6,10)\quad (9,10) \\ A= & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}, & \begin{matrix}1&1\\1&1\\1&0\\0&1\\1&1\end{matrix}\end{array}$$

$$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\-1&1&0&-1&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}6&7&8&9&10&11\end{matrix} \\ T_1=B_1^{-1}R_1= & \begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\-1&-1&-1&-1&1&1\\2&2&2&1&-1&-1\\-1&-1&0&1&0&1\\-1&0&-2&-2&2&0\end{bmatrix},\end{array} \qquad B_1^{-1}e=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

primal simplex method to problem (P') without recourse to cutting planes, and use a column-generating procedure to overcome the difficulties caused by degeneracy. In Algorithm I, the column-generating procedure is geared to producing *one* 'improving edge' as soon as possible, i.e., a composite column that can be pivoted into the basis so as to yield an integer solution adjacent to, and better than, the current one. In Algorithm II, CGP is used to generate *all* composite columns that yield an integer solution adjacent to and better than the current one; then, in view of Theorem 4, all remaining columns of the current tableau can be removed. Itis not clear at this stage which of the two procedures is preferable, and hybrid algorithms are also feasible.

Both algorithms start by applying the primal simplex method to (P'), and of course one has only to gain if one can simplify (P') before starting. Thus, the various 'reduction rules' proposed in the literature (*see*, for instance, references 7 and 8) should first be applied to (P'). Also, a good starting solution may be of great help, and any efficient heuristics for finding one can help a lot.

3

ALGORITHM I

PRIMAL. Apply the primal simplex method to (P') as long as you can pivot on $+1$ in a nondegenerate row. Whenever this becomes impossible, let $\bar{x}$ be the current (integer) solu-

TABLE II

TABLEAUX FOR THE ILLUSTRATION OF TABLE I

$T = T_1$:

	6	7	8	9	10	11
2	−1	−1	−1	−1	1	1
4	−1	−1	0	1	0	1
5	−1	0	−2	−2	2	0

T_2:

	6	7	8	9	(6,10)	(8,10)	(9,10)	(6,11)	(7,11)
2	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
4	−1	−1	0	1	−1	0	1	0	0
5	−1	0	−2	−2	1	0	0	−1	0

T_3:

	6	7	8	(6,10)	(8,10)	(6,11)	(7,11)
2	−1	−1	−1	0	0	0	0
4	−1	−1	0	−1	0	0	0
5	−1	0	−2	1	0	−1	0

T_4:

	6	7	(8,10)	(6,11)	(7,11)
2	−1	−1	0	0	0
4	−1	−1	0	0	0
5	−1	0	0	−1	0

$I \setminus I^0$

T_5:

	6	7	(8,10)	(6,11)	(7,11)
1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	1	1

tion, B the associated basis, I and J the basic and nonbasic index sets, $A = (B, R)$, and $\bar{T} = B^{-1}R$ the current (all-integer) simplex tableau. Let $\bar{a}_j$, $j \in J$, be the columns of $\bar{T}$, and $\bar{c}_j$, $j \in J$, the reduced costs, with $\bar{c}_j \geq 0$ required for optimality. If $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in J$, stop: $\bar{x}$ is optimal for (P).

mark row 5

1: yes

4: T_f, I^0

	(8,10)	(6,11)	(7,11)
2	0	0	0
4	0	0	0
5	0	−1	0

$I \setminus I^0$

	(8,10)	(6,11)	(7,11)
1	1	1	1
3	1	1	1

$J = \{6,7,8,9,10,11\}$, $I^0 = \{2,4,5\}$

$\bar{J} = \{6,7,8,9,10,11\}$, $Q_j = \{j\}$ $(\forall j \in J)$

1:

2: $r=2$. $J^+ = \{10,11\}$, $J^- = \{6,7,8,9\}$

2c: $t = 10 \in J^+$

$S^1_{10} = \{6,8,9\}$, $S^2_{10} = J^-$, $S^3_{10} = J^-$, $S_{10} = \{6,8,9\}$

T_1

$J = \{6,7,8,9,11,(6,10),(8,10),(9,10)\}$

2b: $J^+ = \{11\}$, $J^- = \{6,7,8,9\}$

2c: $t = 11 \in J^+$

$S^1_{11} = \{6,7\}$, $S^2_{11} = J^-$, $S^3_{11} = J^-$

$S_{11} = \{6,7\}$

$J = \{6,7,8,9,(6,10),(8,10),(9,10),(6,11),(7,11)\}$

2b: $J^+ = \emptyset$

$\bar{J} = J$, mark row 2

2: $r=4$, $J^+ = \{9,(9,10)\}$, $J^- = \{6,7,(6,10)\}$

2c: $t = 9 \in J^+$

$S^1_9 = \emptyset$,

2c(ii): $S_9 = \emptyset$, $J = \{6,7,8,(6,10),(8,10),(9,10),(6,11),(7,11)\}$

2b: $J^+ = \{(9,10)\}$,

$t = (9,10) \in J^+$

$S^1_{(9,10)} = \emptyset$,

2c(ii): $S_{(9,10)} = \emptyset$, $J = \{6,7,8,(6,10),(8,10),(6,11),(7,11)\}$

2b: $J^+ = \emptyset$

$\bar{J} = J$, mark row 4

2: $r=5$, $J^+ = \{(6,10)\}$, $J^- = \{6,8,(6,11)\}$

2c: $t = (6,10) \in J^+$

2c(ii): $S^1_{(6,10)} = \emptyset$, $J = \{6,7,8,(8,10),(6,11),(7,11)\}$

2b: $J^+ = \emptyset$

$J = \{6,7,(8,10),(6,11),(7,11)\}$

4

ページ 5/

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
CGPの検当						登録番号
						参照番号
						作成者

○ 2:a., 2:b. でYESになる確率は小さい様に思われる。

○そうならば 2:C. の S_t の作成で S_t^2 は大抵 J^- に等しくなってしまう。断定する為には実験が必要である。

○ S_t^3 の実用性にも疑問がわく。S_t^1 で S_t を代用した場合 S_t^1 が S_t と多きく違う時はタブローが大きくなってアラ。結局 S_t^1, S_t^2, S_t^3 によってどのくらい S_t が少さくなるかを計量する変数を入れて多数回テストする必要がある。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
Algorithm I (Balas & Padberg) 廃棄処分	1978.12.21決定					登録番号 / 参照番号 / 作成者

A B C D E

(P): $\min\{cx \mid Ax=e,\ x:\text{binary}\}$
(P'): $\min\{cx \mid Ax=e,\ x\geq 0\}$

start

$NSB = m$

Primal: Apply the primal simplex method to (P') as long as you can pivot on $+1$ in a nondegenerate row. Whenever this becomes impossible,

$\bar{x}$: the current (integer) solution, $A=(B,R)$, $\tilde{T}\equiv B^{-1}R=(\bar{a}_j, j\in J)$ current all integer simplex tableau

$\bar{c}_j = c_j - c_I B^{-1} a_j$, $z = -cx = -c_I B^{-1} b + \bar{c}_J(-x_J)$, $N = I + J$

$x_I = B^{-1}e + B^{-1}R(-x_J)$

$I^0 \equiv \{i\in I \mid \bar{x}_i = 0\}$

$\bar{c}_J \geq 0$ — YES → STOP: $\bar{x}\in(P)$

↓ NO

$T \equiv (\bar{a}_{ij},\ i\in I^0,\ j\in J) = (\hat{a}_j,\ j\in J)$

1. (a) all rows have been marked
or (b) $\bar{c}_j \geq 0$ $(\forall j\in J)$
or (c) $\bar{a}_{ij} \leq 0$ $(\forall j\in J$ and all unmarked rows $i)$?

— YES → STOP: $\bar{x}\in(P)$

↓ NO

$\bar{c}_t = \min_{j\in J}\{\bar{c}_j \mid \bar{a}_{ij} > 0$ for at least one unmarked row $i\}$

2. Choose any unmarked row r such that $\bar{a}_{rt} > 0$

$J^+ \equiv \{j\in J \mid \bar{a}_{rj} > 0\}$, $J^- \equiv \{j\in J \mid \bar{a}_{rj} < 0\}$

a. $J^- = \phi$? — YES → $\boxed{J \leftarrow J\setminus J^+}$ → mark row r → 1.

↓ NO

b. $J^+ = \phi$? — YES → $J \leftarrow J\setminus\{j\in J^- \mid \bar{a}_{rj} < -1\}$ → mark row r

↓ NO

c.
(i) $S_t = S_t^1 \cap S_t^2 \cap S_t^3$, $S_t^1 = \{j\in J^- \mid a_t a_j = 0\}$,
$S_t^2 = \{j\in J^- \mid \bar{a}_{hj} + \bar{a}_{ht} \geq -1$ for all marked row $h\}$,
$S_t^3 = \{j\in J^- \mid Q_j \cup Q_t$ can not be partitioned into $\sum_{s=1}^{p} Q_{j_s}$, $t \notin \{j_1,\cdots,j_p\} \subseteq J\}$

あるーつは決して
ここへ来ない。

S_t^3 のcheck 回数: $\sum_{p=1}^{\|Q_j\cup Q_t\|} C_p$

$S_t = \phi$? — YES → $T \leftarrow T\setminus\{\hat{a}_t\}$, $J \leftarrow J\setminus\{t\}$ → 1.

↓ NO

(ii) Order S_t so that $\bar{c}_j < \bar{c}_k \Rightarrow j \prec k$ (j precedes k)

$S_t \supseteq J^0 \equiv \{j\in S_t \mid \bar{c}_j + \bar{c}_t < 0$ and $\bar{a}_{hj} + \bar{a}_{ht} = \begin{cases} 0 \text{ or } 1 & (h\in I\setminus I^0) \\ 0 \text{ or } -1 & (h\in I^0) \end{cases}\}$ (3)

(iii) $J^0 \neq \phi$ — YES → j = the smallest index in J^0, $Q_k \equiv Q_j \cup Q_t$ → Block Pivot

↓ NO

(iv) $T \leftarrow T + \{\hat{a}_j + \hat{a}_t \mid j\in S_t\}$, $Q_k \equiv Q_j \cup Q_t$ $(\forall j\in S_t)$
$J \leftarrow J + \{k \mid Q_k = Q_j \cup Q_t,\ j\in S_t\}$ → 1.

Block Pivot: In the simplex tableau $\tilde{T}$ associated with $\bar{x}$ pivot into the basis each column $j\in Q_k$. 全ての row からマークを消せ。
Slack変数が base out する毎に $NSB = NSB - 1$ と更新 → Primal

A B C D E

all vertices of X_I adjacent to the current vertex $\bar{x}$, hence in particular all vertices adjacent to and better than $\bar{x}$, whereas the former guarantees that the tableau consisting solely of composite columns defining such vertices contains all the columns needed to produce an optimal solution.

4. NUMERICAL EXAMPLE

IN THIS SECTION we solve an example by Algorithm I.

Table III gives the vector c and the matrix A for the example.

TABLE III

THE NUMERICAL EXAMPLE

$$c = (5, 4, 3, 2, 2,\ 2, 3, 1, 2, 2,\ 1, 1, 1, 0, 0)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0 \end{array}\right)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

(14,12)	(15,13)	(15,4)
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	1
1	1	1

The simplex tableau $\bar{T}$:

	1	$-x_1$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$	$-x_9$	$-x_{10}$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_{14}$	$-x_{15}$
z	−5	3	2	1	1	3	−3	−2	−2	1	−3
x_{13}	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_2	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
x_3	0	−1	1	1	1	0	−1	−1	1	0	−1
x_4	0	0	−1	−1	0	1	0	1	−1	0	0
x_5	0	0	−1	0	−2	−2	2	0	1	−1	1

The simplex tableau $\bar{T}'$:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_9$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_{13}$	$-x_{14}$	$-x_{15}$
z	−3	8	−3	1	0	5	1	−5	2	3	0
x_{10}	1	2	−1	0	0	1	1	−1	1	1	1
x_8	0	−1	1	0	0	−1	0	1	−1	−1	0
x_3	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	−1	−1	1	1	−1	0	0	0
x_5	0	−2	2	1	2	−2	−2	3	0	−1	−1

16 (14,12)	(11,16)
2	1
0	1
0	0
1	1
−1	0
2	0

PRIMAL produces the simplex tableau $\bar{T}$ of Table III, in which no more pivots are possible on an element $\bar{a}_{ij}=1$ (such that $\bar{c}_j<0$).

MCGP. $I^0=\{3, 4, 5\}$; $J=\{1, 6, \cdots, 12, 14, 15\}$.

First iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-3$, $t=10$; choose $r=5$. $S^1_{10}=\{6, 8, 9, 14\}$; $S^2_{10}=S^3_{10}=S^1_{10}$; $S_{10}=\{8, 14, 6, 9\}$. $\bar{c}_8+\bar{c}_{10}=1-3=-2<0$, and $\bar{a}_8+\bar{a}_{10}$ satisfies (3′).

−1 −1 2 −3

BLOCK PIVOT introduces x_8 and x_{10} into the basis, replacing $\bar{T}$ by the simplex tableau $\bar{T}'$ of Table III.

PRIMAL sends to the next step.

MCGP. $I^0=\{2, 4, 5\}$, $J=\{1, 3, 6, 7, 9, 11, \cdots, 15\}$.

$S^1_{12}=\{1,9,14\}, S^2_{12}=\bar{J}, S^3_{12}=\bar{J}$

First iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-5$, $t=12$; choose $r=2$. $S_{12}=\{14, 9, 1\}$. $\bar{c}_{14}+\bar{c}_{12}=3-5=-2<0$, but $\bar{a}_{5,12}+\bar{a}_{5,14}=3-1=2$, violates (3′). $\bar{c}_9+\bar{c}_{12}=5-5\geq 0$.

Remove column 12 and add columns (14, 12), (9, 12), and (1, 12) to T^1 (not shown in Table III) to obtain the tableau T^2 of Table IV.

Second iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-3$, $t=3$; choose $r=2$. $S_3=\{14, 1\}$. $S^1_3=\{1,14\}, S^2_3=S^1_3$

Remove column 3 and add columns (14, 3), (1, 3) to T^2 to obtain T^3 as shown in Table IV.

Third iteration: The row with index $i=2$ is marked. $\bar{c}_t=-2$, call $\{14, 12\}=Q_{16}$, so $t=16$. Choose $r=5$. $S_{16}=\{15, 11\}$. $\bar{c}_{11}+\bar{c}_{16}=1-2<0$, and $\bar{a}_{11}+\bar{a}_{16}$ satisfies (3′).

TABLE IV

TABLEAUX FOR THE NUMERICAL EXAMPLE

		1	3	6	7	9	11	13	14	15	(14,12)	(9,12)	(1,12)
	$\bar{c}_j$	−8	−3	1	0	5	1	2	3	0	−2	0	−3
T^2:	2	−1	1	0	0	−1	0	−1	−1	0	0	0	0
	4	0	0	−1	−1	1	1	0	0	0	−1	0	−1
	5	−2	2	1	2	−2	−2	0	−1	−1	2	1	1

		1	6	7	9	11	13	14	15	16 (14,12)	(9,12)	(1,12)	(14,3)	(1,3)
	$\bar{c}_j$	8	1	0	5	1	2	3	0	−2	0	3	0	5
T^3:	2	−1	0	0	−1	0	−1	−1	0	0	0	0	0	0
	4	0	−1	−1	1	1	0	0	0	−1	0	−1	0	0
	5	−2	1	2	−2	−2	0	−1	−1	2	1	1	1	0

marked

The simplex tableau $\bar{T}''$:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$	$-x_9$	$-x_{13}$	$-x_{15}$
z	−2	5	4	1	−1	3	2	1	1	−1	0
x_{10}	0	1	0	−1	−1	0	0	−1	−1	0	1
x_{12}	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
x_{14}	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
x_{11}	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
x_5	0	−1	−1	1	2	−1	0	0	1	1	−1

BLOCK PIVOT introduces x_{12}, x_{11}, and x_{14} into the basis and produces the simplex tableau $\bar{T}''$ of Table IV.

PRIMAL sends to the next step.

$S^1_{13}=\{2,15\}, S^2_{13}=\bar{J}, S^3_{13}=\bar{J}$

MCGP. $I^0=\{10, 5\}$, $J=\{1, \cdots, 4, 6, \cdots, 9, 13, 15\}$.

First iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-1$, $t=13$; choose $r=5$. $S_{13}=\{15, 2\}$. The next tableau is T^2 of Table V.

Second interation: No rows marked. $\bar{c}_t=-1$, call $\{15, 13\}=Q_{16}$, so $t=16$. Choose $r=10$. $S_{16}=\emptyset$. Remove column 16 to obtain T^3 of Table V.

$S^1_{16}=\phi$,

Third iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-1$, $t=4$; choose $r=5$. $S_4=\{15, 6, 1\}$.

Remove column 4 and add columns (15, 4), (6, 4), and (1, 4) to T^3 to obtain T^4 of Table V.

$S_{17}=\{6\}$,

Fourth iteration: No rows marked. $\bar{c}_t=-1$, call $\{15, 4\}=Q_{17}$, so $t=17$. Choose $r=5$. $S_{17}=\{6\}$. Remove column 17 and add column (6, 15, 4) to obtain T^5 with $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in J$.

Hence the solution $x_{11}=x_{12}=x_{14}=1$, $x_j=0$ for $j \neq 11, 12, 14$ is optimal.

ACKNOWLEDGMENTS

WE WISH TO thank DAVID S. RUBIN for his helpful comments, and in particular for supplying the basic idea for the present version of part (i) of the proof of Theorem 3, which is both shorter and more appealing than the previous version.

TABLE V

ADDITIONAL TABLEAUX FOR THE NUMERICAL EXAMPLE

		1	2	3	4	6	7	8	9	15	(15,13) 16	(2,13)
	$\bar{c}_j$	5	4	1	−1	3	2	1	1	0	−1	3
T^2:	10	1	0	−1	−1	0	0	−1	−1	1	1	0
	5	−1	−1	1	2	−1	0	0	1	−1	0	0

		1	2	3	4	6	7	8	9	15	(2,13)
	$\bar{c}_j$	5	4	1	−1	3	2	1	1	0	3
T^3:	10	1	0	−1	−1	0	0	−1	−1	1	0
	5	−1	−1	1	2	−1	0	0	1	−1	0

		1	2	3	6	7	8	9	15	(2,13)	(15,4) 17	(6,4)	(1,4)
	$\bar{c}_j$	5	4	1	3	2	1	1	0	3	−1	2	4
T^4:	10	1	0	−1	0	0	−1	−1	1	0	0	−1	0
	5	−1	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	1	1	1

We also wish to thank the National Science Foundation and the US Office of Naval Research for their support of the first author's research, as well as the Deutsche Forschungsgemeinschaft for its support of the second author's work.

REFERENCES

1. E. BALAS AND M. PADBERG, "On the Set-Covering Problem," *Opns. Res.* **20**, 1153–1161 (1972).

		1	2	3	6	7	8	9	15	(2,13)	(6,4)	(1,4)	(6,15,4)
	$\bar{c}_j$	+5	+4	+1	+3	+2	+1	+1	0	+3	+2	+4	+2
T^5:	10	1	0	−1	0	0	−1	−1	1	0	−1	0	0
	5	−1	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	1	1	0

2. ——— AND ———, "Adjacent Vertices of the Convex Hull of Feasible 0-1 Points," Management Sciences Research Report #298, November 1972–April 1973, Carnegie-Mellon University (to appear in *SIAM J. Appl. Math.*).
3. C. BERGE, "Balanced Matrices," *Mathematical Programming* **2**, 19–31 (1972).
4. E. BURGER, "Über homogene lineare Ungleichungs-Systeme," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **36**, 135–195 (1956).
5. N. V. CHERNIKOVA, "Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Equations," *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **4**, 157–158 (1964).
6. ———, "Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Inequalities," *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **5**, 228–233 (1965).
7. R. GARFINKEL AND G. NEMHAUSER, "The Set-Partitioning Problem: Set Covering with Equality Constraints," *Opns. Res.* **17**, 848–856 (1969).
8. M. PADBERG, "On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra," *Mathematical Programming*, **5**, 199–215 (1973).
9. ———, "Perfect Zero-One Matrices," *Mathematical Programming*, **6**, 180–196 (1974).
10. ——— AND M. R. RAO, "The Travelling Salesman Problem and A Class of Polyhedra of Diameter Two," IIM Preprint No. I/73-5, International Institute of Management, Berlin, Germany.
11. D. S. RUBIN, "Neighboring Vertices on Convex Polytopes," Graduate School of Business Administration, University of North Carolina at Chapel Hill, March 1972.
12. V. A. TRUBIN, "On a Method of Solution of Integer Programming Problems of a Special Kind," *Soviet Math. Dokl.* **10**, 1544–1546 (1969).

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A　B　C　D　E

Algorithm I に対する考察

○ Balas & Padberg の paper の例題でも S_t^2, S_t^3 は何ら効力を持たなかった。
S_t^2, S_t^3 によって S_t が小さくなる頻度を数えよ。

○ Row がなかなかマークされない。

○ t 及び r の決定法。Algorithm I の手書きをデルミナで取って ○印の付いた部分を既に実験した方法に直すこと。

○ アレイ CSRT (Sorted cost) を持たないで毎回 largest one を捜した方がよい。

A　B　C　D　E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
Algorithm II (Balas & Padberg)	1979.1.4.					登録番号
						参照番号
						作成者 岩村

Composite columns which corresponds to better integer vertex を捜す時にテーブルの大きさがコントロール不可能な程大きくなる現状では実用的アルゴリズムとは言えない。

カラム場所	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$c =$	5,	4,	3,	2,	2,	2,	3,	1,	2,	2,	1,	1,	1,	0,	0
$A =$	1					1	1	1	1				1	1	
	1	1								1	1				1
		1	1			1	1	1				1			
		1	1	1				1	1		1				
			1	1	1		1			1		1	1		

カラム場所	1	$-x_1$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$	$-x_9$	$-x_{10}$	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_{14}$	$-x_{15}$
x_0	5	-3	-2	-1	-1	-3	3	2	2	-1	3
$x_{13} =$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_2	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
x_3	0	-1	1	1	1	0	-1	-1	1	0	-1
x_4	0	0	-1	-1	0	1	0	1	-1	0	0
x_5	0	0	-1	0	-2	-2	2	0	1	-1	1
removed column											
Q_j		1	6	7	8	9	10	11	12	14	15

← row marker

$I^0 = \{3, 4, 5\}$, $J = \{1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15\}$

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	
II. Balas & Padbergのアルゴリズムの Implimentationのやり方						登録番号 参照番号 作成者

II.1 概　説

1.

H
Q
PQ
CSRT
RVN
(PS, NG)

} は主記憶域に持つ。

2. LP計算ではBlandの退化防止策を組み込む。LP計算は整数計算の範囲で行なう（Balas&Padbergの原論文参照）。

3. テーブルの更新方法

3.1 主記憶装置、外部記憶装置どちらにあっても、$(\sum_{k\in Q_j} a_k, j:active)$, $(\sum_{k\in Q_j} B^{-1}a_k, j:active)$ のどちらのテーブル上のカラムであっても、MCGPで不要となった時点で、不要と判明したカラムをテーブルから物理的に削除するか、不要と判明したカラムをマークするだけとするか？

$\begin{cases} \text{D ---- 削除する} \\ \text{M ---- マークする} \end{cases}$

マークの時はマークをスキャンする時間は増えるがテーブルやポインタを更新する時間は不要。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

4. LPの計算形式

4.1 コンパクトタブロ形式(Compact tableau form)

$B^{-1}a_j, j \in R$ はLP計算終了時に得られる。

B^{-1} は特に計算しない。

4.2 積形式(Product form)

B^{-1} はLP計算終了時に得られるが $B^{-1}a_j, j \in R$ はLP計算終了時には得られていない。

Re-inversionによるηベクトルの個数削減は不可能である。

$B^{-1}a_j, j \in R$ をLP計算終了後に計算するのであれば上記4.1に効率負けをする。

Composite columns $\sum_{k \in Q_j} a_k$ はテーブルに持たない。

4.3 フルタブロ形式(Full tableau form)

$B^{-1}, (B^{-1}a_j, j \in R)$ はLP計算終了時に得られる。

LP計算時に要する主記憶域のサイズ(LPフルタブロ用)は

$(m+1)*(n+m+1)*il$ バイト

であり(ここで m=行数, n=列数, il=整数の長さ)上記4.1, 4.2のいずれよりもLP計算時に要する主記憶域サイズは大きいが、以後のMCGP計算においては上記4.1, 4.2いずれの方法に適した方法であっても採用可能である。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

5. LPの計算形式，テーブルを物理的に置く記憶装置の区別（主、外部）による ワークエリア，I/O転送時間、計算時間 の状況

LPの計算形式	LP計算終了後の状況	テーブルを物理的に置く記憶装置の区別			ワークエリア	I/O転送時間	計算時間
		A等	B^{-1}	$\bar{a}_j, j\in R$ 等			
コンパクトタブロ形式（C）	$\bar{a}_j = B^{-1}a_j$, $j\in R$ は計算済。	外(E)		外(E)	カラム a_j とカラム $\bar{a}_j$ 用のワークエリアを計2本（j: active）	a_j と $\bar{a}_j$ を使う毎に a_j と $\bar{a}_j$ を転送	なし
		外(E)		主(M)	カラム a_j 用のワークエリア1本	a_j を使う毎に a_j を転送	なし
		主(M)		主(M)	なし	なし	なし
積形式（P）	B^{-1} は計算済み。B^{-1} の行情報が容易に取り出せるものとする。	外(E)	外(E)		カラム a_j 用1本 B^{-1} の行用1本 カラム $\bar{a}_j$ 用1本	a_j と $\bar{a}_j$ を使う毎に a_j と B^{-1} を転送	$\bar{a}_j$ を使う毎に $\bar{a}_j = B^{-1}a_j$ の計算必要
		外(E)	主(M)		カラム a_j 用1本 カラム $\bar{a}_j$ 用1本	a_j と $\bar{a}_j$ を使う毎に a_j を転送	$\bar{a}_j$ を使う毎に $\bar{a}_j = B^{-1}a_j$ の計算必要
		主(M)	主(M)		なし	なし	$\bar{a}_j$ を使う毎に $\bar{a}_j = B^{-1}a_j$ の計算必要

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

6. 上述3., 4., 5.による implimentation の種類と表示法

テーブルの更新方法	LPの計算形式	テーブルを物理的に置く記憶装置の区別 A 等	B^{-1}	$\bar{a}_j, j\in R$ 等
{D, M}	C	E	/	E
		E	/	M
		M	/	M
	P	E	E	/
		E	M	/
		M	M	/
	H	E	/	E
		E	/	M
		M	/	M
		E	E	/
		E	M	/
		M	M	/

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
II.2 (テーブルの更新方法D形式) 概略フローチャート	1978.12.21					登録番号
						参照番号
						作成者 岩村

Start

$H(j) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, CVN(j)$

$NSB = m$

PRIMAL

$PS(\ell) = \sum_{j:\bar{a}_{\ell j}>0} 1$, $NG(\ell) = \sum_{j:\bar{a}_{\ell j}<0} 1$ for $RVN(\ell) \in I^0$ (i.e. $2 \le \ell \le DGN1$)

PRC

$PS(\ell) \le 0,\ 2 \le {}^{\forall}\ell \le DGN1$ —YES— $FINAL = 30$ → STOP $\bar{x} \in (P)$

NO

$\bar{c}_j \geq 0,\ \forall j \in J$ —YES— $FINAL = 40$ → STOP $\bar{x} \in (P)$

NO

$\bar{c}_t = \min_{j \in J} \{ \bar{c}_j \mid 2 \le i \le DGN1 \ \& \ \bar{a}_{ij} > 0 \}$ 対応する i に対し $PS(i) > 0$ & $\bar{a}_{it} > 0$

$PS(r) * |NG(r)| = \min \{ PS(i) * |NG(i)| : 2 \le i \le DGN1 \ \& \ \bar{a}_{it} > 0 \}$

a_t, $\bar{a}_t$, $Q(t)$ をワークエリアに入れ、カラム t をテーブルから除去する。PS, NG を更新。

$S_t = S_t^1 \cap S_t^2$, $S_t^1 = \{ j \in J \mid \bar{a}_{rj} < 0 \ \& \ a_t a_j = 0 \}$

$S_t^2 = \{ j \in J \mid \bar{a}_{rj} < 0 \ \& \ \bar{a}_{hj} + \bar{a}_{ht} \geq -1, \forall h : {}^{*}PS(h) = 0 \ \& \ NG(h) < 0 \}$

注＊：$PS(h)=0$ でも可。

$S_t = \phi$? —YES→ (PRC へ戻る)

NO

Order S_t so that $\bar{c}_j < \bar{c}_k \Rightarrow j \prec k$ (j precedes k)

$S_t \supseteq J^0 \equiv \left\{ j \in S_t \mid \bar{c}_j + \bar{c}_t < 0 \text{ and } \bar{a}_{hj} + \bar{a}_{ht} = \begin{cases} 0 \text{ or } 1 & (h \in \bar{I}^0) \\ 0 \text{ or } -1 & (h \in I^0) \end{cases} (3)' \right\}$

$J^0 \neq \phi$ —YES— j = the smallest index in J^0
$Q_k \equiv Q_j \cup Q_t$

NO

$T = T + \{ \hat{a}_j + \hat{a}_t \mid j \in S_t \}$, $Q_k \equiv Q_j \cup Q_t$, $H(k) = H(j) + H(t)$ $(j \in S_t)$

$J = J + \{ k \mid Q_k = Q_j \cup Q_t, j \in S_t \}$, $H(k) = m$ な $k = (j, t)$ は加えない。

$H(u) = H(k)$ な u が k の左側に既にあれば

$\sum_{v \in Q_u} a_v = \sum_{v \in Q_k} a_v$ をcheck し、成立すればCSC を適用せよ。

PS, NG を更新

In the simplex tableau $\tilde{T}$ associated with $\bar{x}$ pivot into the basis each column $j \in Q_k$, $H(j)$ の更新。
Slack 変数が base out する毎に $NSB = NSB - 1$ と更新.

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
PRC						参照番号
						作成者

process transient state row and process column

row
- transient state row
- steady state row
  - unmarked row
  - marked row
    - strongly marked row
    - weakly marked row

$PS(\ell)$ = position ℓにある rowの正の成分の個数.($LVN(\ell)\in I^0$, 即ち$1\leq \ell \leq DGN$)

Note. $PS(\ell)=0 \Leftrightarrow \overline{a}_{\ell j}\leq 0, \forall j\in J$

$NG(\ell)=$
- position ℓにある rowの負の成分の個数 ($RVN(\ell)\in I^0$ & ℓ: unmarked or strongly marked)
- −(position ℓにある row成分の −1 の個数)($RVN(\ell)\in I^0$ & ℓ: weakly marked)

$PS(\ell)$ \ $NG(\ell)$	0	正	負, $=-\#\{j \mid \overline{a}_{\ell j}=-1\}$
0	$\overline{a}_{\ell j}=0\ (\forall j\in J)$ ℓ: W.M.	← $\overline{a}_{\ell j}\leq 0\ (\forall j\in J)$ →	$\overline{a}_{\ell j}\neq 0 \Rightarrow \overline{a}_{\ell j}=-1$ ℓ: S.M.
正	$\overline{a}_{\ell j}\geq 0\ (\forall j\in J)$	$\overline{a}_{\ell j}>0\ (\exists j\in J)$ $\overline{a}_{\ell\tilde{j}}<0\ (\exists \tilde{j}\in J)$	

注1: カラムtの除去だけでは起らない。

ℓ: unmarked row

$PS(\ell)>0$ & $NG(\ell)=0$

↓直ちに, $\overline{a}_{\ell\tilde{j}}>0$な$\tilde{j}$を除去, $\tilde{j}$は必ずある。

◎$PS(\ell)>0$ & $NG(\ell)>0$ $\xrightarrow{注1}$ ◎$PS(\ell)=0$ & $NG(\ell)=0 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \ell$: strongly marked row

◎$PS(\ell)=0$ & $NG(\ell)<0$ & $(\overline{a}_{\ell\tilde{j}}<0 \Rightarrow \overline{a}_{\ell\tilde{j}}=-1) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \ell$: weakly marked row

↑直ちに, $\overline{a}_{\ell\tilde{j}}<-1$な$\tilde{j}$を除去, $\tilde{j}$はないかも知れない。

$PS(\ell)=0$ & $NG(\ell)>0$

◎印: steady state
無印: transient state

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
テーブルの更新方法 D形式 計算方式 PRC	press row and column					登録番号 参照番号 作成者

$PS(\ell)>0$ & $NG(\ell)=0$ $\quad \bar{a}_{\ell,k}>0$ な k を削除

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & & & - & + & 0 & & \\
 & 0 & + & + & + & 0 & 0 & 0 \\
\ell \rightarrow & 0 & 0 & + & + & + & + & 0 \\
 & & & - & - & 0 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & -1 & -1 & 0 & -1 & \\
\end{array}$$

∧ ∧ ∧ ∧

LL: PS	NG	$\bar{a}_{LL,k}$: +	0	−
+	+	PSを1減	何もしない	NGを1減
+	0	PSを1減	何もしない	不可能
0	+	不可能	何もしない	NGを1減
0	0	不可能	何もしない	不可能
0	−	不可能	何もしない	NGを1増

- ○ RHSを除いた全てのカラムに対して $\bar{a}_{\ell k}>0$ ならば Optimal stop. FINAL=20.
- ○ $\bar{a}_{\ell k}=0$ なカラムがRHS以外にもあれば上記(PS, NG)の更新を行なう。

作業終了後後 K+1 (K<Nの時) から N までのタブローを左へ1つ移動し N = N − 1 と更新する。

K=N の時は移動を行なわず N=N−1 と更新する。

作業終了後のタブローの左1つ移動

$PS(\ell)=0$ & $NG(\ell)>0$ $\quad k;\ \bar{a}_{\ell k}<-1$ な k を削除

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
\ell \rightarrow & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & -1 \\
LL & & & & & & & \\
\end{array}$$

∧ ↑ ∧ ∧

削除しない。

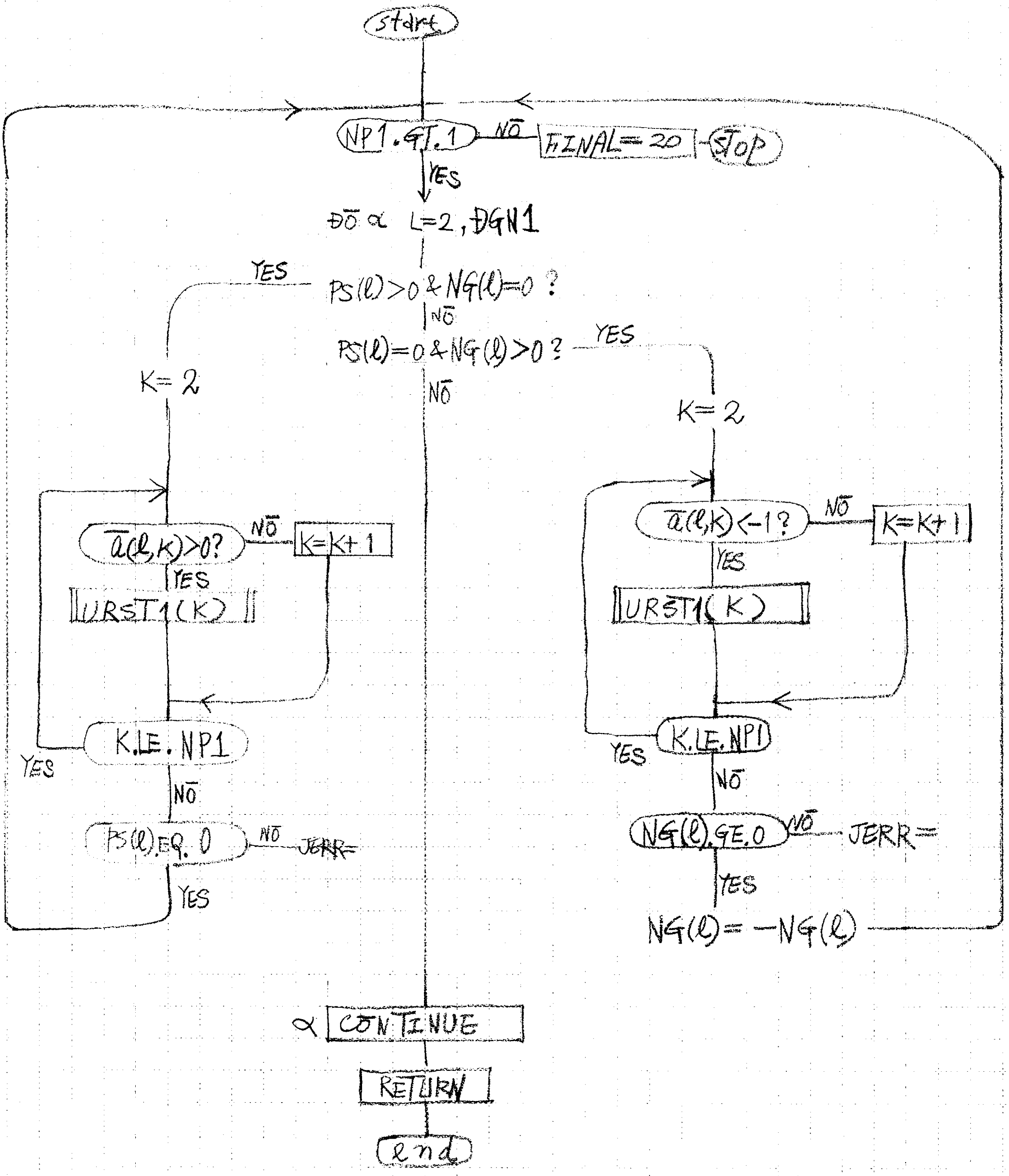
LL: PS	NG	$\bar{a}_{LL,k}$: +	0	−
+	+	PSを1減	何もしない	NGを1減
+	0	PSを1減	何もしない	不可能
0	+	不可能	何もしない	NGを1減
0	0	不可能	何もしない	不可能
0	−	不可能	何もしない	NGを1増

- ○ RHSを除いた全てのカラムに対し $\bar{a}_{\ell k}<0$ ならば Optimal stop. FINAL=25
- ○ $\bar{a}_{\ell k}=0$ なカラムがRHS以外にもあれば上記(PS, NG)の更新を行なう。

作業終了後のタブローの左1つ移動を行なう。

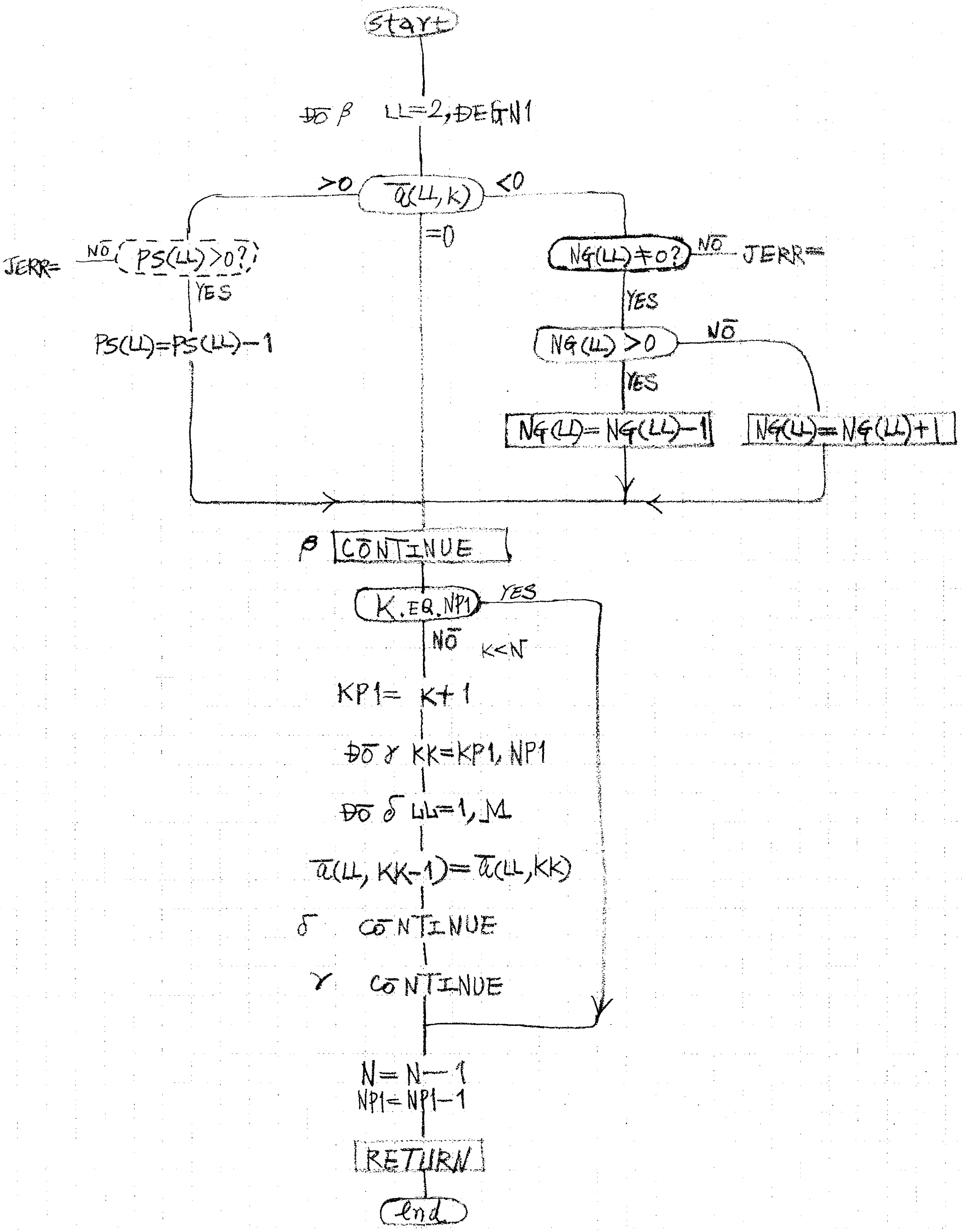
$NG(\ell) = -NG(\ell)$ と更新

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
PRC process row and column						参照番号
						作成者



タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
UPSNG(K)						参照番号
Update PS and NG						作 成 者

A B C D E



A B C D E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
コモン変数一覧						登録番号 参照番号 作成者

名前	型	長さ	意味
NSB	I*2	1	Number of slack and basic variables
ĐGN	I*2	1	Primal終了後の$\#\{i \mid \bar{b}_i = 0\}$ i.e. Degeneracy
ĐGN1	I*2	1	$LV(\ell) \in I^0$ $(1 \leq \ell \leq$ ĐEGN$)$, $LV(\ell) \in I \setminus I^0$ $($ĐEGN1$\leq \ell \leq$ MP1$)$ な様に行変換を行なう。即ち ĐEGN1 = ĐEGN + 1
MP1	I*2	1	M + 1
NP1	I*2	1	N + 1

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
II.3 コンパクトタブロ形式によるLPの計算例 G.N. p.315 Example						登録番号 参照番号 作成者 岩村

	1	2	3	4	5	6	7	8							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}		
コスト	3	7	5	8	10	4	6	9	53	53	53	53	53	Min.	
	1	1							1						1
			1	1	1					1				=	1
					1	1	1				1				1
							1	1				1			1
		1		1		1							1		1

$\sum_{j=1}^{8} c_j + 1 = 53$

$53 \times 2 = 106$

$53 \times 5 = 265$

Rowで引分けの時は$x_\square$の口が最大である行を採用する。
人為変数が一度base-outされたら以後決してbase-inさせぬこと。

$z = -cx = -c_I B^{-1} b + (c_J - c_I B^{-1} N)(-x_J)$

$x_I = B^{-1} e + B^{-1} R(-x_J)$

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
z	-265	-50	-99	-48	-98	-96	-102	-100	-44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_{11} =	1					1	1	1	
x_{12}	1							1	1
x_{13}	1		1		1		1		

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	v	$-x_7$	$-x_8$
z	-163	-50	$+3$	-48	$+4$	-96	$+102$	-100	-44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_{11} =	0		-1		-1	1	-1	1	
x_{12}	1							1	1
x_6	1		1		1		1		

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	v	v	$-x_8$
z	-163	-50	-97	-48	-96	4	2	100	-44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_7	0		-1		-1	1	-1	1	
x_{12}	1		1		1	-1	1	-1	1
x_6	1		1		1		1		

		$-x_1$	v	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	v	v	$-x_8$
z	-66	-50	$+97$	-48	$+1$	-93	$+99$	$+3$	$+53$
x_9	0	1	-1		-1	1	-1	1	-1
x_{10}	1			1	1	1			
x_7 =	1		1						1
x_2	1		1		1	-1	1	-1	1
x_6	0		-1			1		1	-1

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

A B C D E

				2 ↓	1 ↓ ×				
		$-x_1$	v	$-x_3$	$-x_4$	v	v	v	$-x_8$
z	-66	$+43$		-48	-92				-40
x_5	0	1			-1				-1
x_{10}	1	-1		1	2				1
$x_7 =$	1								1
x_2	1	1							0
x_6	0	-1			1				0

		1 ↓ ×							
		$-x_1$	v	v	$-x_4$	v	v	v	$-x_8$
z	-18	-5			$+4$				$+8$
x_5	0	1			-1				-1
x_3	1	-1			2				1
$x_7 =$	1	0			0				1
x_2	1	1			0				0
x_6	0	-1			1				0

A B C D E

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作 成 者

人為変数を出来るだけ基底から追出す工夫はMCFPで追加されるカラムの総数を押えるのに不可欠である。

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	
LPの計算（コンパクトタブロ形式）						登録番号 参照番号 作成者

PRIMAL. $\bar{c}_j<0$ & $RVN(r)=\max\left\{RVN(l) \mid \bar{a}_{lj}=1 \ \& \ \mathrm{float}(\bar{b}_l)=\min_{i:\bar{a}_{ij}>0}\frac{\mathrm{float}(\bar{b}_i)}{\mathrm{float}(\bar{a}_{ij})}\right\}$

なj, rに対し

$x_{RVN(r)}$: slack変数または

$$\theta=\min_{i:\bar{a}_{ij}>0}\frac{\mathrm{float}(\bar{b}_i)}{\mathrm{float}(\bar{a}_{ij})}>0$$

の時 $\bar{a}_{rj}$ でpivotする。

$x_{RVN(r)}$: slack変数の時は $\begin{cases} NSB=NSB-1 \\ N1=N1-1 \end{cases}$ と更新する。

PRIMALでの変数のcheck, uncheckはCVN(j)の値の正負で行なう。

$$CVN(j)\begin{cases} >0 \text{ ---- unchecked} \\ <0 \text{ ------ checked} \end{cases}$$

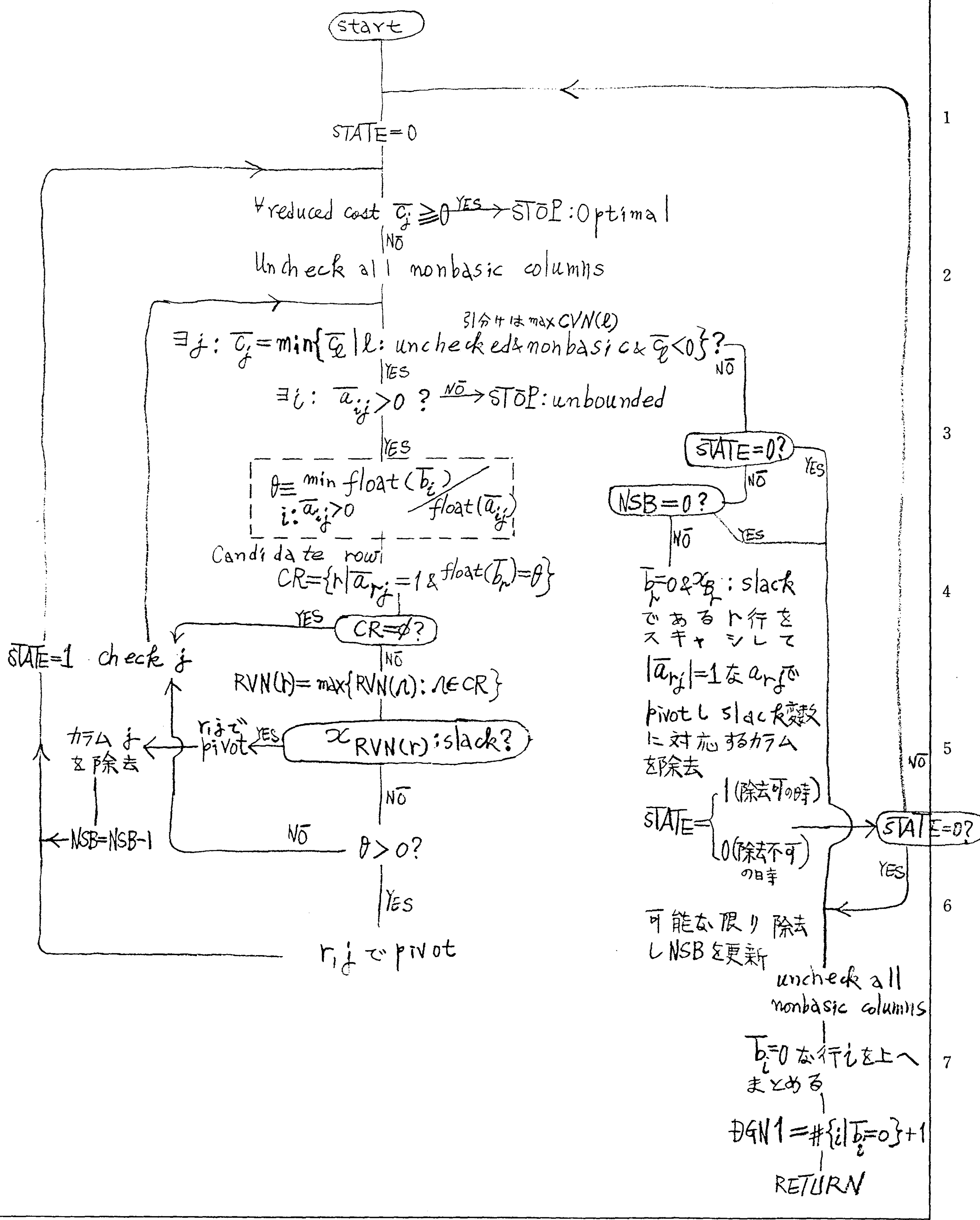
従ってabs(CVN(j)) = position jにあるカラムに対応する変数 $x_{\square}$ の添字□.

H(j)=CVN(j)の1の総数, $\sum_{i=1}^{m} a_i\, CVN(j)$.

第j番目のカラムがpivotカラムになる毎にH(j)を更新せよ。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
コンパクトタブロ形式によるLPの PRIMALフローチャート						登録番号 参照番号 作成者

A B C D E



A B C D E

DCE/E形式による手計算例

NSB=5

恒久ファイル
問題ファイル

	1	2	3	4	5	6	7	8
CVN	1	2	3	4	5	6	7	8
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
コスト	3	7	5	8	10	4	6	9
A	1	1						
			1	1	1			
					1	1	1	
							1	1
		1		1		1		
H	1	2	1	2	2	2	2	1

ファイル名＝M00001・A$\overline{\text{O}}$

matrix A original

NSB=0

寸借ファイル
作業用ファイル

CVN $\boxed{1\ 4\ 8}$

カラム場所	1	2	3	4
A		1		
			1	
				1
			1	
H		1	2	1

RVN	AB				
	1	78	5	4	8
5	2	0	1	-1	-1
3	6	1	-1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	-1	1	0

ファイル名＝M00001・AAB

DGN1=3

タイトル DCE/E形式による手計算例
年 月 日 版 承認 査閲 担当
登録番号 参照番号 作成者

タイトル

H

	1	2	1
A	1		
		1	
			1
		1	

Q	1	4	8
PQ 1	2	3	4

CSRT	2	3	4

B INV A

RVN		1	2	3	4
	1	-18	-5	+4	+8
5	2	0	1	-1	-1
3	6	1	-1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	-1	1	0

(PS, NG)

1	2	2
1	1	3

MCGPでは必要ない。

$t=2$

$r=\min\{PS(i)+NG(i) \mid PS(i)>0 \,\&\, \bar{a}_{it}>0\}$
$=2$

$S_t^1=\{j\in J \mid \bar{a}_{rj}<0 \,\&\, a_t a_j=0\}=\{3,4\}$

$S_t^2=\{3,4\}$

$S_t=\{3,4\}$

		2	1	3
1				1
		1		1
			1	
		1		1

x_1

Q	4	8
1	2	3

CSRT	2	3

		1	2	3
5	1	-18	+4	+8
1	2	0	-1	-1
-1	6	1	2	1
0	4	1	0	1
1	5	1	0	0
-1	3	0	1	0

(PS, NG)

0	2	2
1	0	3

x_1列を除去
H, TA, Q, PQ, T, CSRT, (PS, NG)を更新
$S_t \to \{2,3\}$

2	1	3
		1
1		1
	1	
1		1

Q	4	8	1	4
1	2	3	5	

CSRT	4	2	3

	1	2	3	4
1	-18	+4	+8	-1
2	0	-1	-1	0
6	1	2	1	1
4	1	0	1	0
5	1	0	0	1
3	0	1	0	0

(PS, NG)

0	2	2
1	0	3

CSC無力
$\{x_1, x_4\}$を
H, TA, Q, PQ, T に追加
better integer vertex

年 月 日 版 承認 査閲 担当
登録番号 参照番号 作成者

H: 1 2 1

A			
	1		
		1	
			1
		1	

H: 2 2 1

A			
	1	1	
	1		
			1
		1	

H: 2 2 1

A			
		1	
	1		
	1		
			1
		1	

CVN: 1 4 8

RVN

RVN		1	2	3	4
	1	+18	−5	+4	+8
5	2	0	1	−1	−1
3	6	1	−1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	−1	1	0

CVN: 5 4 8

RVN					
	1	+18	+5	−1	+3
1	2	0	1	−1	−1
3	6	1	1	1	0
7	4	1	0	0	1
2	5	1	−1	1	1
6	3	0	1	0	−1

CVN: 5 2 8

RVN					
	1	+17	+4	+1	+4
1	2	1	0	1	0
3	6	0	2	−1	−1
7	4	1	0	0	1
4	5	1	−1	1	1
6	3	0	1	0	−1

Block Pivot

Base in する変数はx_4, x_1に決定
$J_1 \cap Q_2 \supseteq \{x_1, x_4\}$

最終的にx_1はbasicでなければならないがx_1:out
x_4:in
でもfeasible integer tableauになる。
一度base inした変数はBlock pivot中ずっとbaseの中に止めておいてもよいか?良いという保証はない。1979.2.5.

Optimal
FINAL = 40
STOP

タイトル
年 月 日 | 版 | 承認 | 査閲 | 担当
登録番号
参照番号
作成者

タイトル

H

A

	1	2	1
	1		
		1	
			1
		1	

	2	2	1
	1	1	
	1		
			1
		1	

	2	1	1
	1	1	
	1		
			1

CVN

RVN

			1	4	8
		1	2	3	4
	1	-18	-5	+4	+8
5	2	0	1	-1	-1
3	6	1	-1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	-1	1	0

			5	4	8
		1	2	3	4
	1	-18	+5	-1	+3
1	2	0	1	-1	-1
3	6	1	1	1	0
7	4	1	0	0	1
2	5	1	-1	1	1
6	3	0	1	0	-1

			5	3	8
		1	2	3	4
	1	-17	+6	+1	+3
1	2	1	2	1	-1
4	6	1	1	1	0
7	4	1	0	0	1
2	5	0	-2	-1	1
6	3	0	1	0	-1

Block Pivot

Optimal

FINAL = 40
STOP

年 月 日 | 版 | 承認 | 査閲 | 担当

登録番号

参照番号

作成者

H

A

1	2	1
1		
	1	
		1
	1	

2	2	1
	1	
1		
		1
1	1	

2	1	1
	1	
1		
		1
1		

CVN

RVN

			1	4	8
		1	2	3	4
	1	-18	-5	+4	+8
5	2	0	1	-1	-1
3	6	1	-1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	-1	1	0

			6	4	8
	1	-18	-5	-1	+8
5	2	0	1	0	-1
3	6	1	-1	1	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	1	0
1	3	0	-1	-1	0

			6	1	8
	1	-18	-4	-1	+8
5	2	0	1	0	-1
3	6	1	-2	1	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	0	1	0
1	3	0	1	-1	0

Block Pivot

不適

バックトラック

H

A

1	2	1
1		
	1	
		1
	1	

2	2	1
	1	
1		
		1
1	1	

	1	
1		
		1
1	1	

CVN

RVN

RVN		1	4	8
		1	2	3	4
	1	-18	-5	+4	+8
5	2	0	1	-1	-1
3	6	1	-1	2	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	0	0
6	3	0	-1	1	0

RVN			6	4	8
	1	-18	-5	-1	+8
5	2	0	1	0	-1
3	6	1	-1	1	1
7	4	1	0	0	1
2	5	1	1	1	0
1	3	0	-1	-1	0

RVN			6	2	8
	1	-17	-4	+1	+8
5	2	0	1	0	-1
3	6	0	-2	-1	1
7	4	1	0	0	1
4	5	1	1	1	0
1	3	1	0	1	0

Block Pivot

Optimal ではないが
適している。

(PS,NG)

2	1	1
6	1	2

以下MCGPを実行する。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	
II.5 LPの計算例 (フルタブロ形式)	G.N. p.315					登録番号 参照番号 作成者

注: $x_0 = cx = -z$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}		
	1	2	3	4	5	6	7	8							
コスト	3	7	5	8	10	4	6	9	53	53	53	53	53	Min.	
	1	1							1						1
			1	1	1					1					1
					1	1	1				1			=	1
							1	1				1			1
		1		1		1							1		1

$$\sum_{j=1}^{8} c_j + 1 = 53$$

$53 \times 2 = 106$

$53 \times 5 = 265$

Rowで引分けの時は$x_\square$の□が最大である行を採用する。人為変数が一度base-outされたら以後決してbase-inさせぬこと。

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
x_0 注	265	50	99	48	98	96	102	100	44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_{11} =	1					1	1	1	
x_{12}	1							1	1
x_{13}	1		1		1		1		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
									1	2	3	4	5	
x_0														
1	50	99	48	98	96	102	100	44	0	0	0	0	0	265
0	1	1							1					1
0			1	1	1					1				1
0					1	1	1				1			1
0							1	1				1		1
0		1		1		1							1	1

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_{13}$	$-x_7$	$-x_8$
x_0	163	50	-3	48	-4	96	-102	100	44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_{11} =	0		-1		-1	1	-1	1	
x_{12}	1							1	1
x_6	1		1		1		1		

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
						5			1	2	3	4		
1	50	-3	48	-4	96	0	100	44	0	0	0	0	-102	163
	1	1							1					1
			1	1	1					1				1
		-1		-1	1		1				1		-1	0
							1	1				1		1
		1		1		1							1	1

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_{13}$	$-x_{11}$	$-x_8$
x_0	163	50	97	48	96	-4	-2	-100	44
x_9	1	1	1						
x_{10}	1			1	1	1			
x_7 =	0		-1		-1	1	-1	1	
x_{12}	1		1		1	-1	1	-1	1
x_6	1		1		1		1		

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
						5	3		1	2		4		
1	50	97	48	96	-4	0	0	44	0	0	-100	0	-2	163
	1	1							1					1
			1	1	1					1				1
		-1		-1	1		1				1		-1	0
		1		1	-1			1			-1	1	1	1
		1		1		1							1	1

		$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_{13}$	$-x_{11}$	$-x_8$
x_0	66	50	-97	48	-1	93	-99	-3	-53
x_9	0	1	-1		-1	1	-1	1	-1
x_{10}	1			1	1	1			
x_7 =	1		1		0	0	0	0	1
x_2	1		1		1	-1	1	-1	1
x_6	0		-1		0	1	0	1	-1

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
		4				5	3		1	2				
1	50	0	48	-1	93	0	0	-53	0	0	-3	-97	-99	66
	1	0		-1	1			-1	1		1	-1	-1	0
			1	1	1					1				1
		0		0	0		1	1			0	1	0	1
		1		1	-1			1			-1	1	1	1
		0		0	1	1		-1			1	-1	0	0

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

				2 ↓	1× ↓				
		$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_9$	$-x_{13}$	$-x_{11}$	$-x_8$
x_0	66	-43	-4	48	92	-93	-6	-96	40
x_5	0	1	-1		-1	1	-1	1	-1
x_{10}	1	-1	1	1	2	-1	1	-1	1
$x_7 =$	1		1			0			1
x_2	1	1			0	1			0
x_6	0	-1			1	-1	1		0

		4	2 ↓	1× ↓	1	5	3			2				
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	-43	0	48	92	0	0	0	40	-93	0	-96	-4	-6	66
	1			-1	1			-1	1		1	-1	-1	0
	-1		1	2	0			1	-1	1	-1	1	1	1
							1	1				1		1
	1	1							1					1
	-1			1		1			-1				1	0

		1 ↓×							
		$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_{10}$	$-x_4$	$-x_9$	$-x_{13}$	$-x_{11}$	$-x_8$
x_0	18	5	-52	-48	-4	-45	-54	-48	-8
x_5	0	1	-1		-1	1	-1	1	-1
x_3	1	-1	1	1	2	-1	1	-1	1
$x_7 =$	1		1			0			1
x_2	1	1			0	1			0
x_6	0	-1			1	-1	1		0

	↓×	4	2		1	5	3							
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	5	0	0	-4	0	0	0	-8	-45	-43	-48	-52	-54	18
	1			-1	1			-1	1		1	-1	-1	0
	-1		1	2				1	-1	1	-1	1	1	1
							1	1				1		1
	1	1							1					1
	-1			1		1			-1				1	0

注：人為変数のreduced costは計算しなくてよい。
人為変数かどうかをcheckする時間の増加が
人為変数のreduced costを計算しないことに
よる時間の節約を越えないことの確認が必要。

基底$^{-1}$計算が正しいことの確認：O.K.

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

x_3行とx_6行との交換

		$-x_1$	$-x_{12}$	$-x_{10}$	$-x_4$	$-x_9$	$-x_{13}$	$-x_{11}$	$-x_8$
x_0	18	5	-52	-48	-4	-45	-54	-48	-8
x_5	0	1	-1		-1	1	-1	1	-1
x_6	0	-1			1	-1	1		
x_7	1		1						1
x_2	1	1				1			
x_3	1	-1	1	1	2	-1	1	-1	1

		4	5		1	2	3							
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
1	5	0	0	-4	0	0	0	-8	-45	-43	-48	-52	-54	18
	1			-1	1			-1	1		1	-1	-1	0
	-1			1		1			-1				1	0
							1	1				1		1
	1	1							1					1
	-1		1	2				1	-1	1	-1	1	1	1

$$
\begin{array}{ccccc} x_5 & x_3 & x_7 & x_2 & x_6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} & & & 1 & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}
=
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ -1 & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

新しい基底の逆行列

$$
\begin{array}{ccccc} x_5 & x_6 & x_7 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \end{bmatrix}^{-1}
=
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

BINV

$$
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1s} & b_{1t} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{m1} & b_{ms} & b_{mt} & b_{mm} \end{pmatrix}^{-1}_{\begin{array}{cccc} \scriptstyle 1 & \scriptstyle s & \scriptstyle t & \scriptstyle m \end{array}}
=
\begin{array}{c} 1) \\ s) \\ t) \\ m) \end{array}
\begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \cdots & \bar{b}_{1m} \\ \bar{b}_{s1} & \cdots & \bar{b}_{sm} \\ \bar{b}_{t1} & \cdots & \bar{b}_{tm} \\ \bar{b}_{m1} & \cdots & \bar{b}_{mm} \end{pmatrix},
\quad
\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1s} \cdots b_{1t} \cdots b_{1m} \\ \vdots \\ b_{m1} \; b_{ms} \; b_{mt} \; b_{mm} \end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_s \\ a_t \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_s \\ \bar{a}_t \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots b_{1t} & \cdots b_{1s} & \cdots b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mt} & b_{ms} & b_{mm} \end{pmatrix}^{-1}_{\begin{array}{cccc} \scriptstyle 1 & \scriptstyle s & \scriptstyle t & \scriptstyle m \end{array}}
=
\begin{array}{c} 1) \\ s) \\ t) \\ m) \end{array}
\begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \cdots & \bar{b}_{1m} \\ \bar{b}_{t1} & \cdots & \bar{b}_{tm} \\ \bar{b}_{s1} & \cdots & \bar{b}_{sm} \\ \bar{b}_{m1} & \cdots & \bar{b}_{mm} \end{pmatrix},
\quad
\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1t} \cdots b_{1s} \cdots b_{1m} \\ \vdots \\ b_{m1} \; b_{mt} \; b_{ms} \; b_{mm} \end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_t \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_t \\ \vdots \\ \bar{a}_s \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}
$$

タイトル	年　月　日	版	承認	査閲	担当	登録番号
						参照番号
						作成者

実際 $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\bar{b}_{kj} = \delta_{ij}$　　$P=\begin{pmatrix}1 \cdots s \cdots t \cdots m \\ p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \cdots & s & \cdots & t & \cdots m \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & t & & s & \end{pmatrix}$, $p_s=t, p_t=s, p_j=j\ (j\neq s,t)$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ip_k}\bar{b}_{p_k j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s,t}}^{m} b_{ip_k}\bar{b}_{p_k j} + b_{ip_s}\bar{b}_{p_s j} + b_{ip_t}\bar{b}_{p_t j}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s,t}}^{m} b_{ik}\bar{b}_{kj} + b_{it}\bar{b}_{tj} + b_{is}\bar{b}_{sj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_{ik}\bar{b}_{kj} = \delta_{ij}$$

よって　現在の　simplex tableau の行だけを全部（逆行列及び RHS ）交換すれば良い。元々の係数行列はそのままでよい。

タイトル	年 月 日	版	承認	査閲	担当	登録番号
文献						参照番号
						作成者

Balas & Padberg, "On the Set-Covering Problem," Oper. Res. 20, 1152-1161 (1972).

Balas & Padberg, "On the Set-Covering Problem: II An Algorithm for Set Partitioning," Opns. Res. 23, 74-90 (1975)