

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540103

研究課題名(和文) 曲面の特異平坦計量によるタイヒミュラー空間と位相的力学系

研究課題名(英文) Teichmüller space and its topological dynamics via flat singular metrics on a surface

研究代表者

高山 晴子 (Nishi, Haruko)

城西大学・理学部・准教授

研究者番号：90274430

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、タイヒミュラー空間を曲面上の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間と同一視することによって得られる幾何構造およびその位相的力学系の解明を目的とし、錐状特異点付き平坦計量の面積形式が導く幾何構造について考察した。その結果、リーマン球面の場合に面積形式の符号の錐角データによる記述を得、正曲率だけでなく負曲率の錐状特異点をもつ任意の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間の擬エルミート計量の族の存在を示した。

研究成果の概要(英文)：We study the geometry of Teichmüller space through the identification with the moduli space of flat metrics on a surface with cone singularities and aim to clarify the properties of its topological dynamics. As a result, we obtain the description of the signature of the area form by the cone angle data in the case of Riemann sphere to show the existence of the family of quasi-Hermitian metrics on the moduli space of flat metrics with cone singularities of any positive or negative cone angles.

研究分野：位相幾何学

キーワード：タイヒミュラー空間 錐状特異点 平坦計量 擬エルミート計量

1. 研究開始当初の背景

(1) タイヒミュラー空間はリーマン面のモジュライ空間の普遍被覆空間として、代数幾何、函数論、数論、複素力学系、低次元トポロジー、数理物理など幅広い分野が交叉し活発な研究が行われている。中でも Thurston の ending lamination 予想、density 予想、tameness 予想が次々と解決されたことにより、タイヒミュラー空間およびリーマン面のモジュライ空間上の位相力学系の研究の基礎が築かれつつあった。特に、曲面の特異平坦構造のモジュライ空間上の力学系は、有理多角形のピリアードと平行曲面、曲面の同相写像類群とクライン群および曲線複体の組合せ構造の幾何などの多くの研究が発展してきていた。

(2) タイヒミュラー空間の幾何構造は、タイヒミュラー距離や Weil-Peterson 計量等、曲面の同相写像類群の作用で不変な計量が古典的に知られていたが、これらは負曲率多様体あるいは $-$ 双曲空間の性質を多くみたと。ところが、タイヒミュラー空間には完備な $-$ 双曲距離が存在しないことが Brock-Farb により示され、タイヒミュラー距離は $-$ 双曲的でないこと、また完備でない Weil-Peterson 距離も $-$ 双曲的でないことと示されていた。一方で、Weil-Peterson 距離の完備化は CAT(0) と呼ばれる非正曲率をもつ距離空間となることが山田澄生氏によって示されていた。

(3) モジュライ空間の実測地流はエルゴード的であることが知られているが、複素測地流の力学的性質について McMullen は種数 2 の場合に正則 2 次微分のモジュライ空間への $SL(2, \mathbb{R})$ 作用の軌道の射影としてモジュライ空間内に等長的に埋め込まれた Teichmüller 曲線とよばれる代数曲線を構成していた。このことはその後 Mirzakhani 等により一般種数のリーマン面のモジュライ空間の場合に、 $SL(2, \mathbb{R})$ 作用の任意の軌道閉包はモジュライ空間の代数的部分多様体であるという結果に拡張され、モジュライ空間が等質空間でないにも係らず等質空間の力学系の性質を多く満たしていることが示されている。

2. 研究の目的

(1) タイヒミュラー距離はタイヒミュラー空間を複素構造の同値類とみなすことにより、また Weil-Peterson 計量はタイヒミュラー空間を曲面の双曲構造の同値類とみなすことにより導入されている。本研究では、Trojanov によるタイヒミュラー空間の曲面上の錐状特異点付き平坦計量の同値類との同一視をもとにタイヒミュラー空間の特異平坦計量空間のパラメタ付け、およびそれに適したタイヒミュラー空間の計量の導入および他の既知の計量との関係付けを目的とした。

(2) 種数 0 の点付きリーマン面のモジュライ空間の場合、Thurston は球面上の正曲率の錐角をもつユークリッド構造のモジュライ空間との同一視によって複素双曲構造を導入した。その幾何構造はユークリッド構造の面積形式によるものである。一般種数の場合にも曲面上の錐状特異点付き平坦構造の面積形式が導入する幾何構造について調べることが目的とした。

(3) モジュライ空間の幾何構造は普遍被覆空間であるタイヒミュラー空間の幾何構造を自然に誘導する。(2)で得られた幾何構造から曲面の錐状特異点付き平坦計量の同値類としてのタイヒミュラー空間上で、写像類群の作用に関して不変な幾何構造に誘導し、双曲性および測地線の漸近挙動、visual 境界の性質について調べ、モジュライ空間の測地流の力学系について明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 連携研究者の大鹿健一氏(阪大)と研究代表者が以前に得た超楕円曲線のタイヒミュラー空間のユークリッド多角形によるパラメタ付けを一般種数のリーマン面の場合に拡張する。実際、1点付きトーラス上の特異平坦計量のモジュライ空間は平面 4 角形の相似類の空間と同一視できることを示していた。一般種数の超楕円曲線の場合も多角形のモジュライ空間によるパラメタ付けを行う。また多角形の面積形式が誘導するモジュライ空間の計量は完備でない。したがって不完備性である Weil-Peterson 計量との比較を考察した。

(2) 2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間は、錐状特異点の外角データがある条件を満たす場合、複素双曲構造を許容する。外角データの条件を変えた場合の幾何構造について考察し、その性質を記述する。また、一般種数の曲面上の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間へ拡張した場合、計量の負曲率性および $-$ 双曲性について調べ、測地線の漸近挙動や測地流の力学系についてリーマン面上の可積分正則 2 次微分が定める特異平坦構造のモジュライ空間の理論における $SL(2, \mathbb{R})$ のエルゴード性などの性質および interval exchange 写像などの関係付けを目指した。

(3) 連携研究者である大鹿健一氏(阪大)と常時研究連絡をとる他、トポロジーや幾何の国内研究集会および関連する分のセミナー等に積極的に参加し、他の研究者達との議論および最新情報の交換を行った。特に連携研究者の小森洋平氏(早稲田大学)とは点付きリーマン球のモジュライ空間の幾何構造に関して、超幾何関数との関連を明らかにするためのセミナーを行った。また、タイヒミュ

ラー空間の専門家である Papadopoulos 氏 (ストラスブル、フランス) の来日の際して行われたセミナーおよび研究集会に出席し議論を行った。2015 年度にはストラスブル大学 (ストラスブル、フランス) を訪問し、Papadopoulos 氏や Coornaerd 氏とタイヒミュラー空間の幾何構造について議論を行った。また、クインズランド大学 (ブリスベン、オーストラリア) の Spreer 氏を訪問し、点付きリーマン球面のモジュライ空間の実部である実射影直線の点の配置空間の体積に関する共同研究を行った。

(4) タイヒミュラー空間およびリーマン面のモジュライ空間の最新文献を整備するため、位相幾何学関連図書、微分幾何学関連図書および代数幾何学関連図書をはじめとして、複素解析、複素力学系、数論、組合せ数学などに関する図書の購入を行った。

4. 研究成果

(1) 超楕円曲線の場合、自然な対合による商空間が球面上の点付きモジュライ空間を考えることで、そのモジュライ空間は球面上の点付きモジュライ空間と自然な同一視ができる。以前連携研究者の大鹿健一氏との共同研究により得られた超楕円曲線のタイヒミュラー空間とユークリッド多角形のモジュライ空間の同一視は、2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間を通して実現されたが、この平坦計量の面積形式が誘導する2次形式の符号が (m, m) 型であることから、超楕円曲線のタイヒミュラー空間およびモジュライ空間は $(m-1, m)$ 型の擬エルミート計量を許容することを示した。

(2) (1)で得られた擬エルミート計量は、2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量のうち、錐状特異点として負曲率のもの、すなわち錐角が2を越えるものを1つ含んでいた。一方、錐状特異点が全て正曲率、すなわち錐角が全て2以下の場合の面積形式は $(1, n)$ 型であり、よってモジュライ空間に誘導されるエルミート計量は双曲型である。この2つの場合は対極を成しており、その中間である一般の場合の面積形式の符号の解明を行った。その結果、2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量の錐状特異点の錐角を Gauss-Bonnet の条件を満たすよう任意に固定した場合、すなわち錐状特異点として正曲率および負曲率のものを任意にもつ場合、その計量の面積形式の符号を錐角のデータにより記述できることを示した。この符号は、Deligne-Mostow による一般化された超幾何関数のモノドロミーが誘導する穴あき球面上のあるコホモロジー上のエルミート形式の符号と一致していることを見出した。さらに、この錐角データによる面積形式の符号の記述は、2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量のモジュライ空間の実部と同一視される平面多角形

のモジュライ空間に対する Bavard-Ghys の公式、すなわち任意に固定された外角をもつユークリッド多角形の面積形式の符号の記述の拡張になっていることを示した。

(3) 点付きリーマン球面のモジュライ空間と全て正曲率の錐状特異点を2次元球面上にもつユークリッド特異計量のモジュライ空間との同一視により得られる点付きリーマン球面のモジュライ空間上の複素双曲計量に関して、McMullen による体積計算結果が得られたことを背景として、その実部の実双曲計量の体積計算に関して Spreer 氏 (クインズランド大学、オーストラリア) と共同研究を行った。また、双曲構造を誘導する面積形式が与える2次形式の符号は外角データに依存し、双曲構造を与えるのは外角データの空間内の超平面による wall で仕切られたセルのうち中心に最も近いところのセル内の外角である。外角データの変化が引き起こす面積形式の符号の変化について wall-crossing による記述を行った。外角データ空間の wall による分割に関する組合せ的性質についてグラフを用いて記述した。これは2次元球面上の錐状特異点付き平坦計量の面積形式の符号にそのまま適用される。このような擬エルミート計量が得られたが、それらの性質および位相力学系の性質の解明は今後の課題とする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

K. Ohshika, Sumio Yamada and H. Miyachi, Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space, Handbook of Hilbert geometry (Athanasios Papadopoulos and Marc Troyanov ed.), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 査読有, Vol. 22, European mathematical Society (2014), 339-352.

H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, Mathematische Zeitschrift, 査読有 278 (2014), 1065-1095.

H. Nishi, On the signature of area form on the polygon space, Josai Mathematical Monographs, 査読有, 6 (2013), 147-150.

H. Nishi and K. Ohshika, A parametrization of Teichmüller space by polygons, Proceedings of the 7th international conference on nonlinear Analysis and convex analysis-II, 査読有, (2013) 63-75.

H. Nishi and K. Ohshika, A pseudo-metric on moduli spaces of hyperelliptic curves, 査読有, Josai Mathematical Monographs 5 (2012) 51-59.

[学会発表](計 11 件)

H. Nishi, Polyhedral structures on the moduli space of configuration space of points on P^1 , Topology and geometry Seminar (2016/2/2), Queensland University, ブリスベン (オーストラリア)

K. Ohshika, Asymptotic behavior of hyperbolic surface bundles, 「リーマン面・不連続群論」研究集会、(2016/2/14)、東京工業大学大学院理工学研究科 (東京都・目黒区)

H. Miyachi, Towards the complex geometry of Teichmüller space with extremal length, 複素解析幾何セミナー、(2015/11/16), 東京大学大学院数理科学研究科 (東京都・目黒区)

H. Nishi, 球面上のユークリッド錐構造空間の面積形式の符号について、研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(2014/8/26), 東京大学大学院数理科学研究科 (東京都・目黒区)

H. Nishi, On the signature of area form on the polygon space, The international Conference on Nonlinear Analysis and Optimizaion, (2013/12/21), 高雄市 (台湾)

Y. Komori, トーラス上のリーマン面の退化族について、研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(2013/8/27) 東京大学大学院数理科学研究科 (東京都・目黒区)

H. Miyachi, Geometry of Teichmüller distance, Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, (2013/6/21), 東京工業大学大学院理工学研究科 (東京都・目黒区)

H. Nishi, A pseudo-metric on moduli space of elliptic curves, Representation theory of algebraic groups and related topics, (2012/9/15), 城西大学東京紀尾井町キャンパス (東京都・千代田区)

H. Nishi, A pseudo-metric on moduli space of elliptic curves, The 3rd Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimizaion, (2012/9/4), く に び き メ ッ セ (島根県・松江市)

H. Miyachi, Extremal length geometry of Teichmüller space, 低次元多様体モジュライ空間の幾何学 (2012/10/29), 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)

H. Nishi, A parametrization of Teichmüller space by polygons, NACA2011, (2011/ 8/3), Pukyong National University, 釜山広域市 (大韓民国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高山 晴子 (NISHI, Haruko)
城西大学・理学部・准教授
研究者番号: 9 0 2 7 4 4 3 0

(2) 連携研究者

大鹿 健一 (OHSHIKA, Ken'ichi)
大阪大学・大学院理科学研究科・教授
研究者番号: 7 0 1 8 3 2 2 5

小森 洋平 (KOMORI, Yohei)
早稲田大学・教育学部・教授
研究者番号: 7 0 2 6 4 7 9 4

宮地秀樹 (MIYACHI, Hideki)
大阪大学・大学院理科学研究科・准教授
研究者番号: 4 0 3 8 5 4 8 0