様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ２１ 日現在

機関番号：３２４０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００８７

研究課題名（和文）共形平坦ローレンツ多様体のトポロジーと種々の幾何構造

研究課題名（英文）Topology of conformally flat Lorentz manifold and various geometric structures

研究代表者
神島　芳宣（Kamishima, Yoshinobu）

城西大学・理学部・教授

研究者番号：１０１２５３０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：Cartanパラボリック幾何学における接続の曲率形式が消滅するとき,幾何多様体は平坦な幾何構造をもつ. 平坦(定曲率ゼロ)リーマン多様体については古くから研究されてきた. この研究では擬リーマン多様体としてローレンツ共形構造を考え，その平坦性を考えた.ローレンツ多様体MのWeyl共形曲率が消滅するとき,共形平坦ローレンツ多様体を呼ばれる.コンパクト共形平坦ローレンツ多様体に対して,その幾何・トポロジーを考察した.その結果リーマン幾何のときには起こり得ない不定形の幾何多様体のトポロジーの諸現象を得た (1) もしMがコンパクト完備ローレンツ相似多様体ならば, Mはローレンツ平坦多様体である.

研究成果の概要（英文）：When the curvature form for the Cartan connection of the parabolic geometry vanishes, a geomeric manifold has a flat structure. The Riemannian flat manifolds have been studied for a long time. In this note we study conformal Lorentz structure as a pseudo-Riemannian structure. If the Weyl conformal curvature tensor vanishes for a Lorentz manifold, it is called a conformally flat Lorentz manifold. We observed that its geometry and topology. We have shown the following results which never show up in Riemannian geometry. (1) If M is a compact complete Lorentzian similarity manifold, then M is a Lorentzian flat space form.

研究分野：幾何学とトポロジー

キーワード：擬リーマン幾何学　ローレンツ幾何学　微分トポロジー　Developing　Holonomy　Uniformization　平坦

１．研究開始当初の背景

多様体上の平坦性は昔から幾何学とトポロジーの接点として研究されて来た経緯がある．Bieberbach が 1911 年に (I) n 次元コンパクトリーマン平坦多様体の基本群は virtually free abelian となること (有限指数の階数 n の自由アーベル群をもつ) を示して以来, この結果の一般化が様々な幾何的平坦多様体に関して試みられた．さらに Bieberbach は (II) ふたつのコンパクトリーマン平坦多様体の基本群の同型対応があるならば微分同相を導くことを証明した, したがってリーマン平坦多様体のトポロジー (微分同相類) は基本群の言葉で完全に決定される．このような美しい幾何とトポロジーの対応をさらに不定形の平坦幾何（擬リーマン平坦幾何）において調べることは幾何学的トポロジーの観点から十分に興味ある問題である． 今回の研究の出発点は 30 年前の結果にさかのぼる．1982 年 我々(W. Goldman と共同) は n 次元コンパクト (測地的) 完備ローレンツ平坦多様体 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ の基本群 Γ は virtually polycyclic (階数 n の有限指数有限生成可解群をもつ群) であることを示した．以来様々な平坦多様体 (infranil 多様体, infrasolv 多様体, 擬リーマン平坦多様体, アファイン平坦多様体) のトポロジーの特徴づけが行われた．

２．研究の目的

我々はこのことを踏まえて, 擬リーマン幾何としてローレンツ幾何 (符号が (n-1,1) の擬リーマン計量) を問題とした．1990 年から行っている研究にローレンツ多様体のトポロジーがある．これは主としてローレンツ多様体はコンパクトのときどのような基本群を持つかそのトポロジーを調べることにある．またワイル曲率が消えるときローレンツ共形平坦多様体と呼ばれるがこれを因果性ベクトル場 (causal vector field) を持つ場合に調べたい． 難しさはリーマン共形平坦多様体とは異なり, ホロノミー群が非コンパクトである．この研究の特徴的なことは一般的にコンパクトローレンツ多様体を調べることはせず, 幾何学構造と関係させて調べることにある．そこでその研究対象として Fefferman-ローレンツ多様体を考えた．狭義凸 CR-多様体 N 上のある S^1-主束にローレンツ構造が入ることが Fefferman により証明され, それを Fefferman-ローレンツ多様体 $C(N)$ とよんでいる．この Fefferman-ローレンツ多様体は自然に S^1 が光的ベクトル場として, 作用している．また, ローレンツ平坦多様体 (ローレンツ曲率が零) の一般化としてのローレンツ相似多様体 (アファインローレンツ曲率が零) のトポロジー構造を調べ, リーマン共形平坦多様体の諸結果に対するローレンツ共形平坦多様体への一般化を試みたい．簡単に, リーマン多様体 とローレンツ多様体 そしてその曲率（ここでは断面曲率, また　共形曲率) が消える時, その対応は次の通りである．

幾何学	断面曲率 零 共形ワイル曲率 零
リーマン	リーマン平坦多様体 リーマン共形平坦多様体
ローレンツ	Lorentz 平坦多様体 Lorentz 共形平坦多様体

モデル幾何学
ユークリッド幾何学 $(\mathrm{E}(n), \mathbb{R}^n)$ 共形平坦リーマン幾何学 $(\mathrm{O}(n-1,1), S^n)$
ローレンツ平坦幾何学 $(\mathrm{E}(n-1,1), \mathbb{R}^n)$ 共形平坦ローレンツ幾何学 $(\mathrm{O}(n-2,2), S^1 \times S^{n-1})$

自然に共形リーマン幾何が考えられ, 共形リーマン多様体の Weyl 共形曲率が消滅

するとき共形平坦リーマン多様体ができる．これについても微分幾何からの長い研究歴史がある．この研究においては, 不定形の共形平坦ローレンツ幾何を Cartan パラボリック幾何学の立場から取り上げ, 俯瞰し, 統一的に扱うこととした．$\mathrm{O}(n+1,1)$ をローレンツ群とする．一般にローレンツ (幾何) 構造とは $n+1$ 次元多様体上の $\mathrm{O}(n+1,1)\times\mathbb{R}^{+}$-構造を意味する．共形曲率形式 (ワイル共形曲率テンサー) が消滅するとき共形平坦ローレンツ多様体という．Cartan パラボリック幾何としての共形平坦ローレンツモデルは $(\mathrm{PO}(n+1,2), S^{n,1})$ である．ローレンツ擬球面 $S^{n,1}$ は球面 S^n とは異なり直積 $\mathbb{R}\times S^n$ を普遍被覆にもち, その被覆に対応する共形平坦ローレンツ群 $\mathrm{O}(n+1,2)^{\sim}$ がその推移的変換群である．$n+1$ 次元共形平坦ローレンツ多様体 M が与えられたとき, そのトポロジーを調べる強力な手段は展開写像対 (ρ, dev) とよばれる幾何不変量である; $\mathrm{dev}: \tilde{M}\to\mathbb{R}\times S^n$ は共形挿入, $\rho:\pi_1(M)\to\mathrm{O}(n+1,2)^{\sim}$ はホロノミー準同型で $\mathrm{dev}(\gamma\cdot x)=\rho(\gamma)\mathrm{dev}(x)\ \ (\forall x\in\tilde{M}, \forall\gamma\in\pi_1(M))$ を満たす．

我々は共形平坦ローレンツ多様体のトポロジーを調べるために次を考えた．

(1) ローレンツ相似多様体の基本群の決定．代数群を駆使して, コンパクト完備ローレンツ相似多様体の基本群の決定とローレンツ平坦多様体とのトポロジーの比較をみた．そのために ローレンツ相似多様体, 共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体を導入して調べた．

(2) ローレンツ多様体の Fefferman 計量と幾何構造．展開写像対を使って, 共形ローレンツ (平坦) パラボリック多様体の幾何学とトポロジーの構造決定を考えた．

(3) Kuiper の問題の再訪．Kuiper が提唱したコンパクト共形平坦リーマン多様体の展開写像に関するアナロジーとして次の問題を考える – コンパクト共形平坦ローレンツ多様体 M の展開写像 $\mathrm{dev}: \tilde{M}\to\mathbb{R}\times S^n$ が全射でなければその像への被覆写像 (covering map) であるか．

(4) コンパクト共形ローレンツ多様体の幾何剛性． 共形リーマン多様体における顕著な小畠-Ferrand の剛性定理 (非コンパクト共形フロウの存在のもとでコンパクト共形リーマン多様体が標準球面に共形同型) がある．この剛性定理のローレンツ多様体へのアナロジー — 非コンパクト因果的ローレンツ共形可換変換群を効果的に使って共形平坦性を調べる — ことを考えた．

３．研究の方法

ローレンツ構造に対して tensor 計算からくるワイル共形曲率形式の消滅を Cartan パラボリック幾何の接続から導く．これは, リーマン幾何の場合は古くから説明がよくなされているが不定形に対しては実はまだ解明されていないので十分問題意義を持つ．そのため, ローレンツ構造を含む非コンパクト G-構造としての Cartan 幾何構造を統一的に調べた．特に長谷川氏, 相馬氏の専門であるリー環理論また力学系理論を取り入れ, 不定形内積を持つ多様体上の非コンパクトリー群作用, 離散群の可微分作用の理論の構築を試みた．研究計画において『なぜ我々はローレンツ平坦幾何を考えるのか』を CR-幾何との関係から説明する．球面 S^n から無限遠点 ∞ を除いた空間は共形的には $\mathbb{R}^n$ であるが, CR-幾何では, $S^{2n+1}-\{\infty\}$ は Heisenberg 冪零群 $\mathcal{N}$ である．(位相的にはどちらもユークリッド空間である.) ローレンツ幾何としての着眼点は領域 $S^1\times S^{2n+1}-S^1\times\{\infty\}=S^1\times\mathcal{N}$ が共形平坦ローレンツ多様体となることに在る．(ローレンツモデル $S^1\times S^{2n+1}$ と局所共形であるが.) 自然に Euclid ベクトル空間から Heisenberg 冪零空間に移行する現象は実双曲群

から（境界上で共形平坦群) から複素双曲群 (境界上で spherical CR-群) へ移行する【Klein】変換群の多様性とみなせる - ゆえに変換群とトポロジーの観点から共形平坦ローレンツ幾何理論を研究することは統合幾何学 (Synthetic geometry) への自然な融和であり，微分トポロジーとしての手法は幾何多様体の新展開に具体的な構成・分類に寄与したものと信じている．

研究代表者神島は分担者たちと適宜セミナー・研究討論を通して, 共形ローレンツ変換群と共形平坦ローレンツ空間に関する全体のスキームを聞いてもらい, 常に健全な方向に計画を修正, 改正していった．また研究分担者長谷川氏に対しては，リー環の理論で共形平坦ローレンツ Cartan G-構造の統一的な記述を目指して相互に数学教室を訪問しセミナー・研究討論をおこなった．O. Baues 氏とは共形平坦ローレンツ非球形多様体の基本群・トポロジー, またトーラス作用の対称性について，可解幾何をもつファイバー空間論, その一般化としての Infrasolv タワーを用いて, (すでに Baues 氏と行っている) 継続研究した．さらに D. Alekseevsky 氏を中心に V. Cortes 氏, 長谷川氏と共同でリー環による共形平坦擬リーマン構造を記述することを試みた．

４．研究成果

(1) $m+2$-次元多様体 M が $\mathbb{R}^{m+2}$ に局所的にモデルされ, その局所変換がアファイン群 $\mathrm{A}(m+2)$ の部分群 $G=\mathbb{R}^{m+2}\rtimes(\mathrm{O}(m+1,1)\times\mathbb{R}^+)$ に属するとき, M はローレンツ相似多様体と呼ばれる．定義より，ローレンツ相似多様体は同時に共形平坦ローレンツ多様体でもある (なぜなら G は標準ローレンツモデル $S^{2n+1,1}$ のローレンツ変換群 $\mathrm{PO}(m+2,2)$ の固定化群に同型であるから.) ローレンツ相似多様体は自然にローレンツ平坦多様体を含む．我々は展開写像とホロノミー表現を用いてコンパクトローレンツ相似多様体の性質を調べた．

Theorem A. もし M がコンパクト完備ローレンツ相似多様体ならば, M はローレンツ平坦多様体である．さらに M はインフラ-可解多様体に微分同相である．

(2) 我々はローレンツパラボリック多様体の特別な場合としてパラボリック型共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体を導入した．もし Fefferman-Lorentz 多様体が対 $(\hat{\mathrm{U}}(n+1,1),S^{2n+1,1})$ に局所的にモデルされる $(2n+2)$-次元多様体ならば, パラボリック型共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体になる．我々はどのコンパクト多様体がパラボリック型共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体として出てくるかを調べた．より一般に, 多様体 M が幾何 $((\mathrm{PO}(n+1,2),S^{n,1})$ に局所的にモデルされるとき (つまり M の座標近傍系 $\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して $\varphi_\alpha: U_\alpha\to S^{n,1}$ がはめ込み, 局所変換 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ は $\mathrm{PO}(n+1,2)$ の元に一意的に拡大する), M は共形平坦ローレンツ多様体と言われる．上記のパラボリック型共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体は共形平坦ローレンツ幾何 $((\mathrm{PO}(2n+2,2),S^{2n+1,1})$ の細分として部分幾何 $(\hat{\mathrm{U}}(n+1,1),S^{2n+1,1})$ に局所的にモデルされるされるものである．

Theorem B. M を $m+2$ 次元コンパクト共形平坦ローレンツ多様体とする．M のホロノミー群は相似群 $\mathrm{Sim}_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}^{m+2})$ において有限指数の正規可解群をもつとする．このとき M は共形平坦ローレンツパラボリック多様体かあるいはその有限被覆は $S^1\times S^{m+1}$, ホップ多様体 $S^{m+1}\times S^1$, あるいは　トーラス T^{m+2} である．

Theorem C. Ω/Γ をパラボリック型のコンパクト共形平坦共 *Fefferman-Lorentz* 多様体とする．Ω/Γ が 1-径数群 H をもち, $\mathrm{U}(n+1,1)$ へのリフトは中心 $\mathcal{Z}\mathrm{U}(n+1,1)$ でないならば Ω/Γ は球形 CR-軌道体上の *Seifert* ファイバー空間である．さらに, Ω/Γ は次の (i), . . . , (v) のどれかになる．(結果として Ω/Γ の有限被覆は *Fefferman -Lorentz* 多様体である.)

(i) $\Omega/\Gamma=S^1\times_{\mathbb{Z}_\ell}S^{2n+1}$.

(ii) $S^1 \to \Omega/\Gamma \longrightarrow \mathcal{N}/Q$
ここで $Q \le \mathcal{N} \rtimes \mathrm{U}(n)$.
(iii) $S^1 \to \Omega/\Gamma \longrightarrow S^{2n} \times_F S^1$
ここで $F \le \mathrm{U}(n)$.
(iv) $S^1 \to \Omega/\Gamma \longrightarrow S^{2n+1}/Q$
ここで $Q \le T^{n+1}$.
(v) $S^1 \to \Omega/\Gamma \to (S^{2n+1} - L(Q))/Q$
ここで $(k = 1, \ldots, n)$
$Q \le \mathrm{P}(\mathrm{U}(k,1) \times \mathrm{U}(n-k+1))$.

(3) N は狭義凸 CR-多様体とする. C. Fefferman はローレンツ計量 g をもつ N 上のある主 S^1-束 $C(N)$ を構成した. 我々は共形平坦 Fefferman-Lorentz 多様体の一意化 (uniformization) を考えた. 全空間 $C(N)$ の Weyl 共形曲率テンサーと底空間 CR-多様体 N の Chern-Moser 曲率テンサーに対する消滅の一致性の幾何学的証明を試みた. (二つの曲率の間の関係式はまだ私にはわからない.)

Theorem D. *Fefferman-Lorentz* 多様体 $C(N)$ が共形平坦であるとき, そしてそのときに限り N は球形 (*spherical*) CR-多様体である.

ここで N が球形 (spherical) CR とは, N が spherical CR 幾何 $(\mathrm{PU}(n{+}1,1), S^{2n+1})$ に局所的にモデルされることである. 証明は $C(N)$ の普遍被覆多様体から $((\mathrm{PO}(2n+2,2)^{\sim}, \mathbb{R} \times S^{2n+1})$ への展開写像が $(\hat{\mathrm{U}}(n+1,1)^{\sim}, \mathbb{R} \times S^{2n+1})$ に入ることを示して得られた.
$C(N) = M$ とおいて, $\mathrm{Conf}(M)$ を (M, g) の共形変換群とする. $\mathsf{S}^1 \le \mathrm{Isom}(M, \mathsf{g})$ に注意して, $C_{\mathrm{Conf}(M)}(\mathsf{S}^1)$ を $\mathrm{Conf}(M)$ における S^1 の中心化群とする. このときコンパクト Fefferman-Lorentz 多様体に対する次の共形剛性が成り立つ.

Theorem E. もし $C_{\mathrm{conf}(M)}(\mathsf{S}^1)$ がノンコンパクトならば, M は標準ローレンツモデル $\mathsf{S}^1 \times S^{2n+1}$ に共形同値である.

上記の結果のほかにこの研究期間, (まだ論文の形にはなっていないが) 部分的に次の結果を得ている.

(4) コンパクト共形平坦ローレンツ多様体がワンパラメーター変換群をもつ際の分類を行った. これまで擬リーマン多様体上のトポロジーについてはあまり知られていない, むしろリーマン多様体の結果とは著しく異なる例がある. これに関する結果で Fefferman-ローレンツ パラボリック多様体について, 上の条件のもとで分類を行った. 応用としてして等質 Fefferman-Lorentz 多様体を分類した.
(5) コンパクト Fefferman-ローレンツ多様体に対する小畠-Ferand の定理の肯定的結果を与えた. コンパクト擬リーマン多様体が大きな次元非コンパクトリー群を許容するとき, それは標準モデルに同型であるかという Lichnerowicz 予想がある. これに関して 2n+2 次元コンパクト Fefferman-ローレンツ多様体が 2 次元以上の Lorentz 可換リー群を持つならば標準モデル $S^1 \times S^{2n+1}$ に同型であること示した. 今回の研究に関する達成度として, ほぼ満足のいく結果が得られた. このローレンツ多様体を調べる我々の手段は S^1-作用のような変換群が作用しているときにそれが Seifert fibration を持つということ示し, ローレンツ多様体の分類をより次元が低い底空間に帰着させる方法を取った.

５．主な発表論文等（研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線）〔雑誌論文〕（計 6 件）

(1) Y. Kamishima, *Lorentzian similarity manifold*, *Central European Jour. Math.*, 10(5) (2012) 1771-1788 (査読有).

(2) Y. Kamishima and A. Tanaka, *On Complex Contact Similarity Manifolds*, *Journal of Mathematics Research*, 5(4) (2013) 1-10 (査読有).

(3) Y. Kamishima, *On Conformally Flat Lorentz Parabolic Manifolds*, *Central European Jour. Math.*, 12(6) (2014) 861-878 (査読有).

(4) Y. Kamishima and M. Nakayama, *On the holomorphic torus-Bott tower of aspherical manifolds, Proceedings of the Steklov Inst. Math.*, 286 (2014) 250-264 (査読有).

(5) Y. Kamishima and K. Hasegawa, *Locally conformaly Kähler structures on homogeneous spaces, Progress in Mathematics*, 308 (2015) 353-372 (査読有).

(6) D. Alekseevsky, V. Cortes and K. Hasegawa, Y. Kamishima, *Homogeneous Locally Conformally Kähler and Sasaki Manifolds*, to appear in International Journal of Mathematics (査読有).

〔学会発表〕（計 12 件）

(1) Y. Kamishima：(招待講演 Rigidity on compact Fefferman-Lorentz manifolds) *Workshop on CR geometry at the Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan* 2012 年 3 月.

(2) Y. Kamishima：(招待講演 Infrasolv-towers and smooth rigidity of geometric aspherical manifolds) トポロジー分科会講演 東京理科大 2012 年 3 月.

(3) Y. Kamishima：(講演 Conformally flat Lorentzian parabolic manifold) *Low-dimensional Geometry and Topology* 東工大 2012 年 9 月.

(4) Y. Kamishima：(講演 Conformal rigidity on Fefferman-Lorentz manifold) 岡山理科大 2012 年 10 月 27 日.

(5) Y. Kamishima：(講演 Conformally flat Lorentzian parabolic manifold) 「低次元多様体モジュライ空間の幾何学」数理解析研究所 2012 年 10 月 29 日.

(6) Y. Kamishima：(講演 Conformal rigidity on Fefferman-Lorentz manifold) *The university of Basilicata, Potenza Italy* 2012 年 11 月 7 日.

(7) Y. Kamishima：(講演 On the holomorphic torus-Bott tower of aspherical manifolds) *Toric Topology 2012 in Osaka* 大阪市大 2012 年 11 月 18 日.

(8) Y. Kamishima：(招待講演 Three Geometries on a line) *Andalas University, Padang Indonesia* 2012 年 11 月 26 日.

(9) Y. Kamishima：(講演 Infarsolv-towers and smooth rigidity of geometric aspherical manifolds and application to holomorphic torus-Bott tower) *National Cheng Kung University* (成功大学) 台南, 台湾 2012 年 12 月 14 日.

(10) Y. Kamishima and A. Tanaka：(一般講演 Nilmanifold 上の complex contact structures) 日本数学会, 学習院大学 2014 年 3 月.

(11) Y. Kamishima：(講演 On complex contact similarity manifoldfs) The Kortrijk workshop on “Discrete Groups and Geometric Structures, with Applications V”, Belgium (Leuven), 2014 年 6 月.

(12) Y. Kamishima：(招待講演 On the existence of Vaisman lcK structure on locally homogeneous manifolds”, 2014 Taipei Workshop on ”Analysis and Geometry in Several Complex Variables”, The Institute of Mathematics, Academia Sinica, 2014 年 12 月.

６．研究組織

(1) 研究代表者 神島 芳宣 (カミシマ ヨシノブ）城西大学・理学部・教授研究者番号：10125304

(2) 研究分担者 長谷川 敬三（ハセガワ ケイゾウ）新潟大学・人文社会・教育科学系・教授研究者番号：00208480

(3) 研究分担者 相馬 輝彦（ソウマ テルヒコ）首都大学東京・理工学研究科・教授研究者番号：50154688