

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：32403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800072

研究課題名(和文) 微分方程式の大域解析学への表現論の応用

研究課題名(英文) An application of global analysis of differential equations to representation theory

研究代表者

廣惠 一希 (Hiroe, Kazuki)

城西大学・理学部・助教

研究者番号：50648300

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：Riemann球面上定義された代数的な微分方程式のモジュライ空間に対し、微分方程式の不確定特異点が高々不分岐であり数一つ以下の場合に簾多様体とのsymplectic多様体としての同型を与えた。また不分岐不確定特異点を任意個数許した微分方程式のモジュライ空間は簾多様体とは同型にならないことが確認されていたが、一般に全射とはならない埋め込み写像を簾多様体の中に構成することでmiddle convolutionと簾のWeyl群との対応を見つけ、また安定なモジュライ空間が空集合とならないための必要十分条件を決定した。また分岐不確定特異点と平面代数曲線の特異点との類似を発見した。

研究成果の概要(英文)：I gave an isomorphism between a moduli space of algebraic differential equations on the Riemann sphere and quiver variety as symplectic manifolds when differential equations have at most one unramified irregular singular point. When the differential equations have arbitrary number of unramified irregular singular points, although it was known that the moduli space can not be isomorphic to any quiver varieties, I constructed an open embedding into a quiver variety which is not surjective in general and clarified a relation between middle convolution of differential equations and Weyl group of the quiver, also determined a necessary and sufficient condition to the nonemptiness of the regular part of the moduli space.

研究分野：微分方程式の不確定特異点論

キーワード：不確定特異点 ワイル群 ミドル・コンボリューション 簾の表現論

1. 研究開始当初の背景

確定特異点線形常微分方程式に関しては Euler 変換の概念を代数化した middle convolution の理論が発展し、アクセサリパラメータの幾何学、大域解の解析学 (モノドロミー)、微分方程式の Weyl 群対称性とそのモノドロミー保存変形との対応といった様々な事象が統一的に理解できる理論が完成しつつあった。すなわち Fuchs 型微分方程式のアクセサリパラメータの空間を籠多様体によって実現するという W. Crawley-Boevey による仕事がそれまでパラバラに研究されていたアクセサリパラメータの理論や Euler 変換の理論を籠の表現論とその幾何学の観点から統一的な理論を与えその後の理論の急激な発展を促した。そしてこれに続く問題としてこの枠組みを不確定特異点を持つ微分方程式に拡張が様々試みられてきている。中でも P. Boalch による拡張があり、それは Poincare 階数 3 の不分岐不確定特異点を一点のみ許容した微分方程式のアクセサリパラメータの空間が籠多様体との同型を与えるもので上の Crawley-Boevey による仕事の正統な一般化となっている。一方で同時に Boalch は不確定特異点が 2 点以上ある場合のアクセサリパラメータの空間で籠多様体とは同型にならない例を提示し、Fuchs 型の場合の Crawley-Boevey の理論を単純に不確定特異点を持つ微分方程式には拡張できないことが示唆されていた。

2. 研究の目的

不確定特異点を持つ微分方程式の大域解析学、特に Stokes 現象やモノドロミーの構造を古典的な解析的変換である Euler 変換や Fourier-Laplace 変換を用いることで明示的に決定し、今まで個々の特殊な例に対してのみ展開されてきた“特殊関数論”を複素領域の線形常微分方程式一般に対して展開するような統一的な理論を構築する。具体的には Euler 変換や Fourier-Laplace 変換が微分方程式たち及ぼす作用を群作用として解釈し、その作用の基本領域を決定する。そしてこの基本領域での解析学を Euler, Fourier-Laplace 変換の解析学を通じて伝播させることで一般の微分方程式全体の領域解析学を構築する。

さらにこの過程でアクセサリパラメータの空間を籠多様体として実現することで、籠の Weyl 群とルート系の立場から微分方程式の middle convolution による対称性を解明し、ルート系の組みあわせ論から微分方程式の分類を行い、これらの成果をモノドロミー保存変形を通じてパンルヴェ方程式やその高次元化の研究へ応用する。

3. 研究の方法

まず Euler, Fourier-Laplace 変換の群軌道を調べるためには Fuchs 型方程式での結果に倣って、これらの群作用を Kac-Moody 型ルート系への Weyl 群作用やその一般化として

実現する。そしてルート系の組み合わせ論を用いて群作用の基本領域を決定、分類する。Euler, Fourier-Laplace 変換の微分方程式への作用のルート系としての実現を与える際にアクセサリパラメータの空間 (モジュライ空間) の籠多様体として実現を構成する。そして微分方程式とルート系との完全な対応を与えるために籠多様体の正則部分の存在定理を援用する。

次に Euler, Fourier-Laplace 変換の解析学、特にモノドロミーや Stokes 構造への作用を具体的に決定する。そこでは鞍点法による漸近解析とその解析接続を追う。すなわち Laplace 型の指数積分を考え、その相関数の臨界点や臨界値が積分の最急降下路を決定するが、これは解析接続によって変形される。この解析接続による最急降下路の変形を追うことで Fourier-Laplace 変換が引き起こす Stokes 構造への作用を明示的に決定する。

4. 研究成果

まず P. Boalch の結果を拡張して高々不分岐な不確定特異点の個数が 1 つ以下である微分方程式のアクセサリパラメータの空間に対し籠多様体を構成しそれらの間のシンプレクティック多様体としての同型写像を与え、山川大亮氏 (東京理科大学) との共同研究としてこれを発表した。さらに高々不分岐な不確定特異点が任意個数ある場合は Boalch による籠多様体とはならない例が構成されていたが、適切な籠多様体を構成することに成功し、アクセサリパラメータの空間からこの籠多様体への開埋め込み写像を与えることができた。

これら籠多様体への同型あるいは埋め込み写像の恩恵としてモジュライ空間にルート系が付随することになり、既約な微分方程式はルートベクトルに対応する。これによって Euler 変換の微分方程式の作用が対応するルート系の Weyl 群作用として見るようになるようになった。

一方ですべてのルートが微分方程式に対応する訳ではなく、実際にどんなルートが微分方程式に対応するか? という逆問題 (加法的 Deligne-Simpson 問題) が残る。この問題を解決しなければルート系の組み合わせ論から微分方程式の理論に戻ることが出来なくなるためシンプルだが重要な問題と言える。この問題を以前に得ていた不分岐不確定特異点を持つ微分方程式への Euler 変換作用を Kac-Moody 型ルート格子 (の商空間) への Weyl 群作用として実現した仕事と上記のモジュライ空間から籠多様体への埋め込み写像を組み合わせることでこの逆問題 (加法的 Deligne-Simpson 問題) に完全な解答を与えた。

さらに原岡-Filipuk, Boalch, 山川による仕事であるモノドロミー保存変形と Euler 変換の作用の整合性を通じて、上記の微分方程式の対称性と分類理論を高次元パンルヴェ型方程式の理論へ応用し、その対称性の解明と

分類を得た。

そして Fourier-Laplace 変換の解析学を展開するための準備として次の結果を得た。ここでは分岐不確定特異点と平面代数曲線の芽の特異点との類似に着目した。まず局所 Fourier-Laplace 変換と代数曲線の芽の blow up の間の類似に着目し, Fourier-Laplace 変換で分岐不確定特異点が“特異点解消”できるための必要十分条件を決定した。さらにこの類似を追求し, 微分方程式の小松-Malgrange の非正則度と曲線の特異点の Milnor 数を繋ぐ公式を与えることができた。この公式は数論幾何学においてガロワ表現の分岐を測る Swan 導手と Milnor 数の間を繋ぐ Deligne の Milnor 公式と呼ばれる公式とよく似た格好をしており今後の異分野との研究交流が期待できる。

さらに局所既約微分方程式の Laplace 積分を考え, それの特異点の周りでの解析接続を調べた。特にこの Laplace 積分の相関数の臨界点と臨界値が解析接続によって描く軌跡が結び目になることを観察し, その結び目の同型類を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Kazuki Hiroe, Daisuke Yamakawa, Moduli spaces of meromorphic connections and quiver varieties, *Advances in Mathematics*, 査読あり, 266, 2014 年 120-151

DOI:10.1016/j.aim.2014.05.024

Kazuki Hiroe, Ramified irregular singularities of meromorphic connections and plane curve singularities, *Josai Mathematical Monographs* 10, 査読あり, 2017 年, 161-192

Kazuki Hiroe, Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers, *Duke Mathematical Journal*, 査読あり, 166, 855-935

DOI:10.1215/00127094-3769640

[学会発表](計 18 件)

廣惠一希, 局所フーリエ変換とブローアップ, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 広島大学, 2014 年 9 月 25 日

廣惠一希, 局所フーリエ変換とブローアップ, 微分方程式の展望, 熊本大学, 2014 年 10 月 19 日

廣惠一希, Local Fourier transform and blow up, 表現論セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 11 月 21 日

廣惠一希, 局所フーリエ変換とブローアップ, Fuchs 型方程式の幾何, 広島大学, 2014 年 12 月 5 日

廣惠一希, 微分方程式とルート系, HMA セミナー, 広島大学, 2015 年 1 月 9 日

廣惠一希, Local Fourier transform and blow up, 神戸可積分系セミナー, 神戸大学, 2015 年 1 月 28 日

廣惠一希, Ramified irregular singularities of meromorphic connections and plane curve singularities, アクセリーパラメーター研究会, 熊本大学, 2015 年 3 月 14 日

廣惠一希, Applications of quiver varieties to moduli spaces of connections on P^1 , Kobe-Lyon summer school of Mathematics 2015, 神戸大学, 2015 年 7 月 31 日

廣惠一希, Ramified irregular singularities of meromorphic connections and plane curve singularities, Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Differential Equations, the Mathematical Research and Conference Center in Bedlewo (Poland), 2015 年 9 月 17 日

廣惠一希, Stokes 現象と絡み目について, 2015 年度表現論シンポジウム, 伊豆長岡, 2015 年 11 月 18 日

廣惠一希, 不確定スペクトル曲線の特異性について, 広島複素解析セミナー, 広島大学, 2016 年 5 月 13 日

廣惠一希, On additive Deligne-Simpson problem, Modern Interactions between Algebra, Geometry and Physics, Tohoku Forum of Creativity (東北大学), 2016 年 4 月 21 日

廣惠一希, 不確定スペクトル曲線の特異性について, 微分トポロジーセミナー, 京都大学, 2016 年 6 月 14 日

廣惠一希, 4 次元モノドロミー保存族の Weyl 群対称性について, RIMS 研究集会「リー型の組み合わせ論」, 京都大学数理解析研究所 2016 年 10 月 3 日

廣惠一希, On accessory parameters of linear ordinary differential equations, Hitchin systems in Mathematics and Physics, Perimeter Institute, 2017 年 2 月 15 日

廣惠一希, On additive Deligne-Simpson problem, Representation theory of quivers and finite dimensional algebras, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2017 年 2 月 22 日

廣惠一希, Invariants of differential equations and algebraic curves, Branched Covering, Degenerations and Related Topics 2017, 東北学院大学, 2017 年 3 月 11 日

廣惠一希, 線型常微分方程式のアクセリーパラメーターを巡って, 2017 年日本数学会年会, 函数方程式論分科会特別講演, 2017 年 3 月 24 日

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/kazukiadv/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣惠 一希 (HIROE Kazuki)

城西大学・理学部数学科・助教

研究者番号：50648300

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

大島 利雄 (OSHIMA Toshio)

城西大学・理学部数学科・教授

研究者番号：5001271

山川 大亮 (YAMAKAWA Daisuke)

東京理科大学・理学部第一部数学科・講師

研究者番号：20595847