

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：32403

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2014～2015

課題番号：26887035

研究課題名(和文) 保型L関数の解析的性質の研究

研究課題名(英文) Analytic properties of automorphic L-functions

研究代表者

宗野 恵樹 (Sono, Keiju)

城西大学・理学部・助教

研究者番号：10735989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 800,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間の2年間に渡り、ディリクレL-関数の単純零点の割合の評価と、保型L-関数を2次指標でツイストした関数の中心点上の値の平均の評価の研究を行った。前者の研究では一般リーマン予想の仮定の下で原始的指標に付随するディリクレL-関数の零点のうち93%程度が単純であることを示した。後者の研究ではいくつかの仮定の下で、対象となるL-関数の平均が予想されている大きさで上から評価できることを示した。これらの研究成果は国内の研究集会で発表した。また、研究内容をまとめた論文をそれぞれ国際誌に投稿し、いずれも掲載が確定した。

研究成果の概要(英文)：During these two years I have studied the following two objects. The first is the evaluation of the rate of simple zeros of Dirichlet L-functions, and the second is the evaluation of the moments of quadratic twists of automorphic L-functions at the central point. I proved that assuming the generalized Riemann hypothesis, at least 93% of zeros of primitive Dirichlet L-functions are simple. In the second theme, assuming several hypotheses, I proved that these moments are bounded by the expected order. I have talked about these results at several symposiums in Japan. I have submitted two papers on these results to some international journals and fortunately the papers were accepted.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ゼータ関数 L-関数 保型形式 素数分布 リーマン予想

## 1. 研究開始当初の背景

リーマンゼータ関数をはじめとする各種L関数は素数分布や双子素数予想、ゴールドバッハ予想などの数論的な諸問題を研究する上で極めて重要かつ有益な関数である。特に、これらのL関数の自明でない零点がどこにあるのかという問題は素数の分布と直接的に結びついており、解析的整数論のみならず現代数学における最重要問題のひとつであるとみなされている。リーマンゼータ関数はある対称性を持ち、これをリーマンの関数等式という。この関数等式から、リーマンゼータ関数が負の偶数において零になることが容易に分かる。これを自明な零点という。それ以外にも零点は無限に存在するが、これらを自明でない零点という。リーマンゼータ関数の自明でない零点はすべて実部が  $1/2$  であると予想されており、これをリーマン予想という。また、この予想はオイラー積を持つ様々なL関数についても同様に成り立つと考えられており、広い意味で一般リーマン予想と呼ばれている。L関数についてはこの他に単純零点の割合の評価の問題、関数等式の中心線(あるいは中心点)上における関数の大きさを評価する問題(リンデレーフ予想)や、これに関連して大きさの積分平均(あるいはL関数のクラスにおける平均)を評価する問題などが重要とされている。これらの諸問題に関してはリーマン以来150年以上にわたり様々なアプローチが検討されているが、近年では欧米を中心とする何人かの有力な若手数学者により従来になかった優れた手法が複数編み出されている。彼らの新しい技術と古典的な手法を組み合わせ、更に独自のアイデアを付け加えることでリーマン予想をはじめとする諸問題に大きく近接することができるのではないかと期待できる。

## 2. 研究の目的

当研究の目的は、近年目覚ましく発展している解析的整数論の新技术を取り入れ、数論的L関数の中心線(中心点)上の大きさや零点の分布などの様々な解析的性質を明らかにすることと、可能であればそれらの結果を整数論の古典的問題に応用することである。具体的には、リーマンゼータ関数やディリクレL関数をはじめとする保型L関数における諸問題に対して、主に解析的整数論に基づくアプローチで研究を行う。研究対象とする問題は、原始的指標に付随するディリクレL関数の自明でない零点全体の単純零点の割合の評価や、保型L関数を2次指標でツイストした関数の中心点上でのモーメントの評価などである。基本的には一般リーマン予想を仮定した上でこれらの問題を考察する。余裕があれば保型L関数の基本であるリーマンゼータ関数やディリクレL関数の零点分布の研究を行う。このような問題を明らかにすることにより、素数分布などの数論にお

ける最も基礎的な問題を考察する上でのひとつの足掛かりとすることを研究目的とする。

## 3. 研究の方法

まず、原始的指標に付随するディリクレL関数の単純零点の割合の評価の方法について述べる。ベースとなるのは近年考案されたディリクレL関数の零点の相互関係を調べるための漸近公式である。この漸近公式にある条件をみたす関数を掛けたのち、フーリエ変換を施すと自明でない零点の組の距離の平均に関する情報が得られ、その情報から単純零点がどの程度の割合で存在するかを調べることができる。最大の問題は、上述した「ある条件をみたす関数」のうち最良のものを見つけることである。この研究では、最良の関数がある再生核ヒルベルト空間の元になることを示し、その関数の満たす常微分方程式を解くことで関数を決定する。これにより、原始的ディリクレL関数の自明でない零点全体における単純零点の占める割合が下から評価できる。

次に、保型L関数を2次指標でツイストした関数の積の中心点上の値の平均の評価の方法について述べる。この研究では、技術的な都合により一般リーマン予想、ラマヌジャン・ピーターソン予想、セルバーグの直交性予想などいくつかの(正しいと期待されている)予想を仮定する。一般リーマン予想の仮定下で、保型L関数の  $1/2$  における値の絶対値の対数はある不等式で評価できる。この不等式には一定数以下の素数にわたる和が現れるが、この和をある規則に従って細かく分割すると、指標の直交性などにより指標に関する平均を取ったときその1つ1つが非常によい評価を満たすようにできる。これにより、対象となる値が予想されている大きさと上から評価できることを示すことができる。

## 4. 研究成果

研究期間の2年間にわたり、主としてディリクレL関数の単純零点の割合の評価と、保型L関数を2次指標でツイストした関数の中心点上の値の2次指標に関する平均の評価という2つの問題を研究して、幸いにもそれぞれのテーマで一定の成果を得ることができた。まず、前者の研究では、一般リーマン予想を仮定した上で原始的指標に付随するディリクレL関数の零点の相互関係を調べ、このような零点のうち少なくとも93%以上が単純零点であることを証明した。これまでは同様の仮定の下で単純零点が91.7%以上あるという先行結果があったが、これを1.5%程度改良することができた。次に、後者の研究では、一般リーマン予想やセルバーグの直交性予想などいくつかの技術的な仮定の下で、対象となるL関数の平均が予想さ

れる大きさで上から評価されることを示した。この結果は個々の2次L-関数の中心点上での大きさの評価やテイト・シャファレヴィッチ群の大きさの評価、あるいは半整数ウエイトのモジュラー形式のフーリエ係数の評価などへの応用が期待できる、といわれている。これらの研究成果は研究期間中に開催されたRIMS 解析的整数論研究会、ゼータ若手研究会などの国内の研究集会にて数回にわたり発表し、国内外の研究者から一定の評価を得た。また、研究内容をまとめた論文2本をそれぞれ国際誌に投稿して、いずれも掲載が確定した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Keiju Sono, A note on simple zeros of primitive L-functions, Bulletin of the Australian Mathematical Society vol. 93 (2016), No. 1, 19-30 (査読あり)  
DOI:<http://dx.doi.org/10.1017/S0004972715000623>

② Keiju Sono, Moments of the products of quadratic twists of automorphic L-functions, Manuscripta Mathematica に掲載予定 (査読あり)  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s00229-016-0823-5>

Keiju Sono, Pair correlation of zeros of quadratic L-functions near the real axis, RIMS Kokyuroku, vol. 1934 (2014), 52-65 (査読なし)  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1934.html>

③ 宗野 恵樹, 原始的指標に付随する Dirichlet L-関数の単純零点, RIMS Kokyuroku に掲載予定 (査読なし)

④ 宗野 恵樹, 素数および概素数のギャップについて, RIMS Kokyuroku に掲載予定 (査読なし)

[学会発表] (計 4 件)

① 原始的指標に付随する Dirichlet L 関数の実軸に近い零点について  
RIMS 研究会解析的整数論「数論的対象の分布と近似」, 2014 年 10 月 29 日, 京都大学数理解析研究所  
[http://mathnt.sci.st.gunma-u.ac.jp/AnNT\\_RIMS2014/index.html](http://mathnt.sci.st.gunma-u.ac.jp/AnNT_RIMS2014/index.html)

② Small gaps between products of two primes

保型形式セミナー, 上智大学, 2015 年 3 月 21 日

③ 素数および概素数のギャップについて, RIMS 研究会「解析的整数論とその周辺」

2015 年 11 月 4 日, 京都大学数理解析研究所

<http://www.ic.daito.ac.jp/~ykamiya?ANT2015program-ja.pdf>

④ 2 次指標でツイストした保型 L 関数の積のモーメントについて

第 9 回ゼータ若手研究会(招待講演), 2016 年 2 月 15 日, 沖縄船員会館

<https://sites.google.com/site/zetawakate9/home>

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
宗野 恵樹 (Sono, Keiju)  
城西大学・理学部・助教

研究者番号: 10735989

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号:

(3) 連携研究者 ( )

研究者番号：