数学科教職課程用講義－研究ノート

分離公理をみたす位相空間のあいだの包含関係について

城西大学理学部数学科　本多恭子

本稿は、2017 年度城西大学数学科後期授業である位相数学Ｂの授業において明らかになってきた、分離公理をみたす位相空間のあいだの包含関係について報告する。あわせて、さまざまな位相空間の分離公理性および位相的性質も調べる。

1. はじめに

位相数学の授業で扱われる正則空間と正規空間については、本・教科書によって 2 種類の定義が存在する。一般には T_1 公理と T_3 公理の両方をみたす位相空間を正則空間 (T_1, T_3)、T_1 公理と T_4 公理の両方をみたす位相空間を正規空間 (T_1, T_4) と定義される ([3])。一方、2017 年度城西大学数学科後期授業・位相数学Ｂの教科書である「集合と位相」（内田伏一著・裳華房 [1]）では、T_3 公理のみをみたす位相空間を正則空間 (T_3)、T_4 公理のみをみたす位相空間を 正規空間 (T_4) と定義している。一般には

正規空間 $(T_1, T_4)\subset$ 正則空間 $(T_1, T_3)\subset$ ハウスドルフ空間 $\subset T_1$ 空間

が成り立つことが知られている。一方、内田の教科書 [1] によると、位相空間が有限集合の場合は

正規空間 $(T_4)\supset$ 正則空間 $(T_3)\supset$ 距離空間=ハウスドルフ空間=T_1 空間

であることを導くことができる。([1]p.103 問 21.6 , 問 21.7) よく知られている一般の場合の包含関係と、内田の教科書 ([1]) から導かれる有限集合の場合では、一見すると包含関係が逆になっているような感覚を持つ。このようなことが起こる原因としては、正則空間および正規空間に T_1 公理を仮定するか否かによっておこる現象なのではないか、と推測される。

では、T_1 空間・ハウスドルフ空間・距離空間・正則空間 (T_3)・正規空間 (T_4) のあいだの包含関係はどのようになっているのであろうか、という疑問がおこる。

2. 準備

ここでは、いくつかの用語の定義および一般に知られている事実をまとめる。

定義 1 ([1] p.6)
２つの集合 A , B について、$A \cap B$ が空集合であるとき A と B は交わらない という。

定義 2 ([1] p.69)
(X, O) を位相空間とする。集合 X の部分集合 F は、その補集合 F^c が O に属すとき、位相空間 (X, O) の **閉集合** ($O-$ **閉集合**) であるという。

定義 3 ([1] p.100)
(X, O) を位相空間とする。

(1) X の相異なる 2 点 a , b は、互いに交わらない $O-$ 開集合 U , V で $a \in U$, $b \in V$ となるものが存在するとき、開集合によって分離されるという。

(2) X の互いに交わらない部分集合 A , B は、互いに交わらない $O-$ 開集合 U , V で $A \subset U$, $B \subset V$ となるものが存在するとき、開集合によって分離されるという。

(3) X の部分集合 A と A に属さない X の点 x は、互いに交わらない $O-$ 開集合 U , V で $A \subset U$, $x \subset V$ となるものが存在するとき、開集合によって分離されるという。

定義 4([1]p.100 , p.103)
(1) (T_1 公理) 位相空間 (X, O) において、1 点集合が常に閉集合であるとき、(X, O) は T_1 **空間** であるという。

(2) (T_2 公理) 位相空間 (X, O) において、X の相異なる 2 点が常に開集

合によって分離されるとき、(X, O) は **ハウスドルフ空間** であるという。

(3)（T_3 公理）位相空間 (X, O) において、X の任意の $O-$ 閉集合 F と F に属さない X の点が常に開集合によって分離されるとき、(X, O) は **正則空間 (T_3)** であるという。

(4)（T_4 公理）位相空間 (X, O) において、X の互いに交わらない 2 つの $O-$ 閉集合が常に開集合によって分離されるとき、(X, O) は **正規空間 (T_4)** であるという。

(5) 位相空間 (X, O) は、T_1 公理と T_3 公理を同時にみたすとき**正則空間 (T_1, T_3)** という。

(6) 位相空間 (X, O) は、T_1 公理と T_4 公理を同時にみたすとき**正規空間 (T_1, T_4)** という。

補題 1　一般の位相空間 (X, O) において、次のことが成り立つ。

正規空間 $(T_1, T_4) \subset$ 正則空間 $(T_1, T_3) \subset$ ハウスドルフ空間 $\subset T_1$ 空間

補題 2

(1) 距離空間は、第 1 可算公理をみたす。

(2) 距離空間は、正規空間 (T_1, T_4) である。

補題 3

(1) 第 2 可算公理をみたす正則空間 (T_3) は、正規空間 (T_4) である。([1]p.107 , 問 21.7)

(2) 第 2 可算公理をみたす正規 (T_4) ハウスドルフ空間は、距離化可能である。([1]p.106 定理 21.5 (ウリゾーンの距離化定理))

補題 4

(1) コンパクトハウスドルフ空間は、正則空間 (T_1, T_3) である。

(2) コンパクト正則空間 (T_3) は、正規空間 (T_4) である。

(3) コンパクト空間で、第 1 可算公理をみたさないものが存在する。

補題 5
(1) 有限集合上の正則 (T_3) な位相について、閉集合は同時に開集合であり、従って有限正則空間 (T_3) は正規空間 (T_4) である。([1]p.103 問 21.6)

(2) 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ 上の位相で、次の条件を満足するものが存在する。
([1]p.103 問 21.5)
(i) 正規 (T_4) かつ正則 (T_3) であるが、T_1 位相でないもの。
(ii) 正規 (T_4) であるが正則 (T_3) でなく、かつ T_1 位相でないもの。

(3) 有限集合上の T_1 位相は、常に離散位相である。([1]p.103 問 21.4)

3. 分離公理をみたす位相空間のあいだの包含関係

これらのよく知られている事実より、以下のことがわかる。

(1) 一般の場合（図１）: **補題 1** より

正規空間 (T_1, T_4)⊂ 正則空間 (T_1, T_3)⊂ ハウスドルフ空間 ⊂ T_1 空間

(2) 第 1 可算公理をみたす場合（図２）: **補題 1・2** より

距離空間 ⊂ 正規空間 (T_1, T_4)⊂ 正則空間 (T_1, T_3)⊂ ハウスドルフ空間
⊂ T_1 空間

(3) 第 2 可算公理をみたす場合（図３）: **補題 1・3** より

距離空間 = 正規空間 (T_1, T_4)= 正則空間 (T_1, T_3)⊂ ハウスドルフ空間
⊂ T_1 空間

正則空間 (T_3)⊂ 正規空間 (T_4) （T_1 公理を仮定しなくてよい）

(4) コンパクトの場合（図４）: **補題 1・4** より

正規空間 (T_1, T_4)= 正則空間 (T_1, T_3)= ハウスドルフ空間 ⊂ T_1 空間

正則空間 (T_3)⊂ 正規空間 (T_4) （T_1 公理を仮定しなくてよい）

(5) 第２可算公理をみたす コンパクトの場合（図５）: **補題１・３・４** より

距離空間 = 正規空間 (T_1, T_4)= 正則空間 (T_1, T_3)= ハウスドルフ空間
$\subset T_1$ 空間

正則空間 $(T_3)$$\subset$ 正規空間 (T_4)　(T_1 公理を仮定しなくてよい)

(6) 有限集合の場合（図６）:　**補題１・５** より、有限集合上の離散位相においては、１点集合が閉集合でありかつ開集合でもあるため、離散位相は T_1, T_2, T_3, T_4 公理をすべてみたすから

T_1 空間 = ハウスドルフ空間 = 距離空間 $\subset$ 正則空間 $(T_3)$$\subset$ 正規空間 (T_4)

これらの包含関係が整合性をもって成り立つような、分離公理をみたす位相空間のあいだの包含関係について、図１～６ および 図７ のようになっているのではないか、と提案する。

次に、では少なくとも具体例はあるのであろうか、ということを考えてみる。

4.　３元集合の位相について

ここでは特に、３元集合の位相について扱う。これは、有限集合の場合（図６） における具体例を与えるものである。

補題６ ([3]p.229, [2] p.99 問 13.1, p.143)
$X = \{2, 3, 4\}$ とする。X の位相は、以下の９種類ある。(　) 内は数字を入れかえた場合に同じ位相が入る方法は何通りあるかを示している。

$O_1 = \{ \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \phi \}$ (1 通り)

$O_2 = \{ \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \phi \}$ (6 通り)

$O_3 = \{ \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \phi \}$ (3 通り)

$O_4 = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (3 通り)

$O_5 = \{\ \{2\}\ ,\ \{3,4\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (3 通り)

$O_6 = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (6 通り)

$O_7 = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (3 通り)

$O_8 = \{\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (3 通り)

$O_9 = \{\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ (1 通り)

（簡単な証明）

以下、位相 O から全体集合 $\{2,3,4\}$ と空集合 ϕ を除いて考える。

(1) 開集合が ひとつの場合。

O_7: $\{2\}$　数字を変える方法は、３通り。(　$\{3\}$, $\{4\}$　)

O_8: $\{2,3\}$　数字を変える方法は、３通り。(　$\{2,4\}$, $\{3,4\}$　)

(2) 開集合が２つで、互いに交わらない。

O_5: $\{2\}$, $\{3,4\}$　数字を変える方法は、３通り。

(　$\{3\}$, $\{2,4\}$　) (　$\{4\}$, $\{2,3\}$　)

(3) 開集合が２つで、共通な元がある。

O_6: $\{2\}$, $\{2,3\}$　一元集合をを変えない方法は、2 通り。(　$\{2\}$, $\{2,4\}$　)

さらに、１元集合を変える方法が、３通り。

(　$\{3\}$, $\{2,3\}$　) (　$\{3\}$, $\{3,4\}$　)

(　$\{4\}$, $\{2,4\}$　) (　$\{4\}$, $\{3,4\}$　)　合計 6 通り。

(4) 開集合が３つで、１元集合が２つ。

O_3: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$　数字を変える方法は、３通り。

($\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,4\}$) ($\{3\}$, $\{4\}$, $\{3,4\}$)

(5) 開集合が３つで、１元集合が１つ。

O_4: $\{2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$　数字を変える方法は、３通り。

($\{3\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$) ($\{4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$)

(6) 開集合が４つ。

O_2: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ 一元集合を変えない方法は、２通り。

($\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$)

一元集合を変える方法は、３通り。

($\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$) ($\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,4\}$, $\{2,3\}$)

($\{3\}$, $\{4\}$, $\{3,4\}$, $\{2,4\}$) ($\{3\}$, $\{4\}$, $\{3,4\}$, $\{2,3\}$)

合計６通り。

(7) 密着位相 O_9 と離散位相 O_1

（証明終）

定義 5 ([1] p.126)
位相空間 (X,O) において、空集合 ϕ と X は常に開集合であり同時に閉集合であるが、この２つ以外に開集合であり、同時に閉集合であるような X 部分集合が存在しない場合、(X,O) は **連結** であるという。

補題 7

$X = \{2,3,4\}$ とする。X の各位相における O_i- 閉集合 F_i は、それぞれ以下のとおりである。したがって (X, O_i) $(i = 3,4,6,7,8,9)$ は連結な位相空間であり、(X, O_i) $(i = 1,2,5)$ は連結ではない位相空間である。

(1) $O_1 \quad = \{\ \{2\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{3,4\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_1 \quad = \{\ \{3,4\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(2) $O_2 \quad = \{\ \{\mathbf{2}\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_2 \quad = \{\ \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{\mathbf{2}\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(3) $O_3 \quad = \{\ \{2\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_3 \quad = \{\ \{3,4\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(4) $O_4 \quad = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_4 \quad = \{\ \{3,4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(5) $O_5 \quad = \{\ \{\mathbf{2}\}\ ,\ \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_5 \quad = \{\ \{\mathbf{3},\mathbf{4}\}\ ,\ \{\mathbf{2}\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(6) $O_6 \quad = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_6 \quad = \{\ \{3,4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(7) $O_7 \quad = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

$F_7 \quad = \{\ \{3,4\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(8) O_8 $= \{\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

F_8 $= \{\ \{4\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

(9) O_9 $= \{\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$

F_9 $= \{\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$

補題 8 ([1]p.103 問 21.5, [3]p.136 問 3, [3]p.141 問 4 参照)
$X = \{\ 2,3,4\ \}$ とする。位相空間 (X, O_i) について、次のことが成りたつ。(図 8)

(1) (X, O_1) は T_1 空間かつハウスドルフ空間かつ正則空間 (T_3) かつ正規空間 (T_4) となる。

(2) $i = 5, 9$ のとき (X, O_i) は 正則空間 (T_3) かつ正規空間 (T_4) であるが、T_1 空間ではなくハウスドルフ空間でもない。

(3) $i = 2,3,6,7,8$ のとき (X, O_i) は正規空間 (T_4) であるが、正則空間 (T_3)・T_1 空間・ハウスドルフ空間ではない。

(4) (X, O_4) は、正規空間・正則空間・T_1 空間・ハウスドルフ空間のいずれでもない。

（簡単な証明）
(3) $i = 6$ について示す。O_6- 開集合 $O_6 = \{\ \{2\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,3,4\}\ ,\ \phi\ \}$ に対して O_6- 閉集合は $F_6 = \{\ \{3,4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2,3,4\}\ \}$ である。

互いに交わらない O_6- 閉集合 ϕ と $\{4\}$ は、互いに交わらない O_6- 開集合 ϕ と $\{2,3,4\}$ によって分離される。同様に考えることにより、(X, O_6) は T_4 公理をみたす。

O_6- 閉集合 $\{4\}$ と $\{4\}$ に属さない X の点 2 は、互いに交わらない O_6- 開集合によって分離されないので、(X, O_6) は T_3 公理をみたさない。

X の点 2 と 3 は O_6- 開集合によって分離されないので、(X, O_6) は T_2 公理をみたさない。

X の 1 点集合 $\{2\}$ は O_6- 閉集合ではないので、(X, O_6) は T_1 公理をみたさない。

(2) $i = 9$ について示す。O_9- 開集合 $O_9 = \{\ \{2, 3, 4\}\ ,\ \phi\ \}$ に対して O_9- 閉集合は $F_9 = \{\ \phi\ ,\ \{2, 3, 4\}\ \}$ である。

互いに交わらない O_9- 閉集合 ϕ と $\{2, 3, 4\}$ は、2 つの互いに交わらない O_9- 開集合 ϕ と $\{2, 3, 4\}$ によって分離されるので、(X, O_9) は T_4 公理をみたす。

O_9- 閉集合 ϕ と ϕ に属さない X の点 2 は、2 つの互いに交わらない O_9- 開集合 ϕ と $\{2, 3, 4\}$ によって分離される。同様に考えることにより、(X, O_9) は T_3 公理をみたす。

X の点 2 と 3 は O_9- 開集合によって分離されないので、(X, O_9) は T_2 公理をみたさない。

X の 1 点集合 $\{2\}$ は O_9- 閉集合ではないので、(X, O_9) は T_1 公理をみたさない。

(4) O_4- 開集合 $O_4 = \{\ \{2\}\ ,\ \{2, 3\}\ ,\ \{2, 4\}\ ,\ \{2, 3, 4\}\ ,\ \phi\ \}$ に対して O_4- 閉集合は $F_4 = \{\ \{3, 4\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2, 3, 4\}\ \}$ である。

互いに交わらない O_4- 閉集合 $\{3\}$ と $\{4\}$ は、互いに交わらない O_4- 開集合によって分離されないので、(X, O_4) は T_4 公理をみたさない。

O_4- 閉集合 $\{3\}$ と $\{3\}$ に属さない X の点 4 は、互いに交わらない O_4- 開集合によって分離されないので、(X, O_4) は T_3 公理をみたさない。

X の相異なる 2 点 3 と 4 は O_4- 開集合によって分離されないので、(X, O_4) は T_2 公理をみたさない。

X の 1 点集合 $\{2\}$ は O_6- 閉集合ではないので、(X, O_6) は T_1 公理をみたさない。

(1) O_1 の任意の元は、開集合であると同時に閉集合でもあり、T_i 公理 (i=1,2,3,4) をすべてみたす。

（証明終）

5．３元集合の位相の自然な拡張

３元集合 の例を拡張して、次のような例を考えることができる。全順序集合ではない無限集合 $X = \{\ 2, 3, 4, 5, \cdots\} = \{\ 2, 3, \widetilde{4}\ \}$ について、$\widetilde{4} = X - \{2, 3\}$ であるとする。

例 5.1　（図９）
(1) (O_5')：O_5 の拡張

$X = \{\ 2, 3, 4, 5, \cdots\} = \{\ 2, 3, \widetilde{4}\ \}$ 上の位相を

$$O_5' = \{\{2\}\ ,\ \{3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \{2, 3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \phi\ \}$$

$$= \{\{2\}\ ,\ \{3, \widetilde{4}\}\ ,\ \{2, 3, \widetilde{4}\}\ ,\ \phi\ \}$$　とすると、閉集合は

$$F_5' = \{\{3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2, 3, 4, 5, \cdots\}\ \}$$

$$= \{\{3, \widetilde{4}\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2, 3, \widetilde{4}\}\}$$

となる。O_5' の任意の元は、開集合であると同時に閉集合でもあるので、T_3 公理および T_4 公理をみたす。相異なる 2 点 3 と 5 は開集合によって分離されないので T_2 公理をみたさない。1 点集合 $\{3\}$ は閉集合ではないので T_1 公理をみたさない。

(2) (O_7')：O_7 の拡張

$X = \{\ 2, 3, 4, 5, \cdots\} = \{\ 2, 3, \widetilde{4}\}$ 上の位相を

$$O_7' = \{\ \{2\}\ ,\ \{2, 3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \phi\ \} = \{\ \{2\}\ ,\ \{2, 3, \widetilde{4}\}\ ,\ \phi\ \}$$

とすると、閉集合は

$$F_7' = \{\ \{3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2, 3, 4, 5, \cdots\}\ \} = \{\{\ 3, \widetilde{4}\}\ ,\ \phi\ ,\ \{2, 3, \widetilde{4}\}\ \}$$

となる。互いに交わらない閉集合 ϕ と $\{2, 3, 4, 5, \cdots\} = \{2, 3, \widetilde{4}\}$ は、開集合 ϕ と $\{2, 3, 4, 5, \cdots\} = \{2, 3, \widetilde{4}\}$ によって分離される。同様に考えることにより、T_4 公理をみたす。閉集合 $\{3, 4, 5, \cdots\} = \{3, \widetilde{4}\}$ と 点 2 は開集合によって分離されないの T_3 公理をみたさない。相異なる 2 点 2 と 3 は開集合によって分離されないので、T_2 公理をみたさない。 1 点集合 $\{2\}$ は閉集合ではないので T_1 公理をみたさない。

(3) (O_1')：O_1 の拡張

$X = \{\ 2, 3, 4, 5, \cdots \} = \{\ 2, 3, \widetilde{4}\}$ 上の位相を

$$
\begin{aligned}
O_1' \quad &= \{\ \{2\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{4, 5, \cdots\}\ ,\ \{2, 3\}\ ,\ \{2, 4, 5, \cdots\}\ , \\
&\qquad \{3, 4, \cdots\}\ ,\ \{2, 3, 4, 5, \cdots\}\ ,\ \phi\ \} \\
&= \{\ \{2\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{\widetilde{4}\}\ ,\ \{2, 3\}\ ,\ \{2, \widetilde{4}\}\ ,\ \{3, \widetilde{4}\}\ ,\ \{2, 3, \widetilde{4}\}\ ,\ \phi\ \} = F_1
\end{aligned}
$$

とすると、O_1' の任意の元は開集合でもありかつ閉集合でもあるので、T_3 公理および T_4 公理をみたす。相異なる 2 点 4 と 5 は開集合によって分離されないので T_2 公理をみたさない。1 点集合 $\{5\}$ は閉集合ではないので T_1 公理をみたさない。

例 5.2 位相 O_5 , O_5' の拡張：
集合 X の 任意の空でない 部分集合を A とする。$O = \{\ A,\ A^c,\ X,\ \phi\ \}$ は位相になる。この位相に関して (X, O) は連結ではないコンパクト空間となり、正則空間 (T_3)・正規空間 (T_4) となる。集合 X が 2 元集合ならば、これは離散位相となり、(X, O) はさらに、T_1 空間かつハウスドルフ空間になる。
集合 X の元が 3 つ以上存在するならば、(X, O) は T_1 空間ではなく、ハウスドルフ空間にもならない。

例 5.3
一般に 位相 O の任意の元が、閉集合でもありかつ開集合でもあるならば、T_3 公理および T_4 公理をみたす。また連結な空間ではない。

本学科神島芳宣教授、お茶の水女子大学戸田正人教授、法政大学間下克哉教授、本学科高山晴子助教授より、さまざまなご助言をいただきました。ここに感謝申し上げます。

参考文献

[1] 「集合と位相」内田伏一著（裳華房）

[2] 「位相入門」内田伏一著（裳華房）

[3] 「トポロジー」竹ノ内修著（廣川書店）

2025

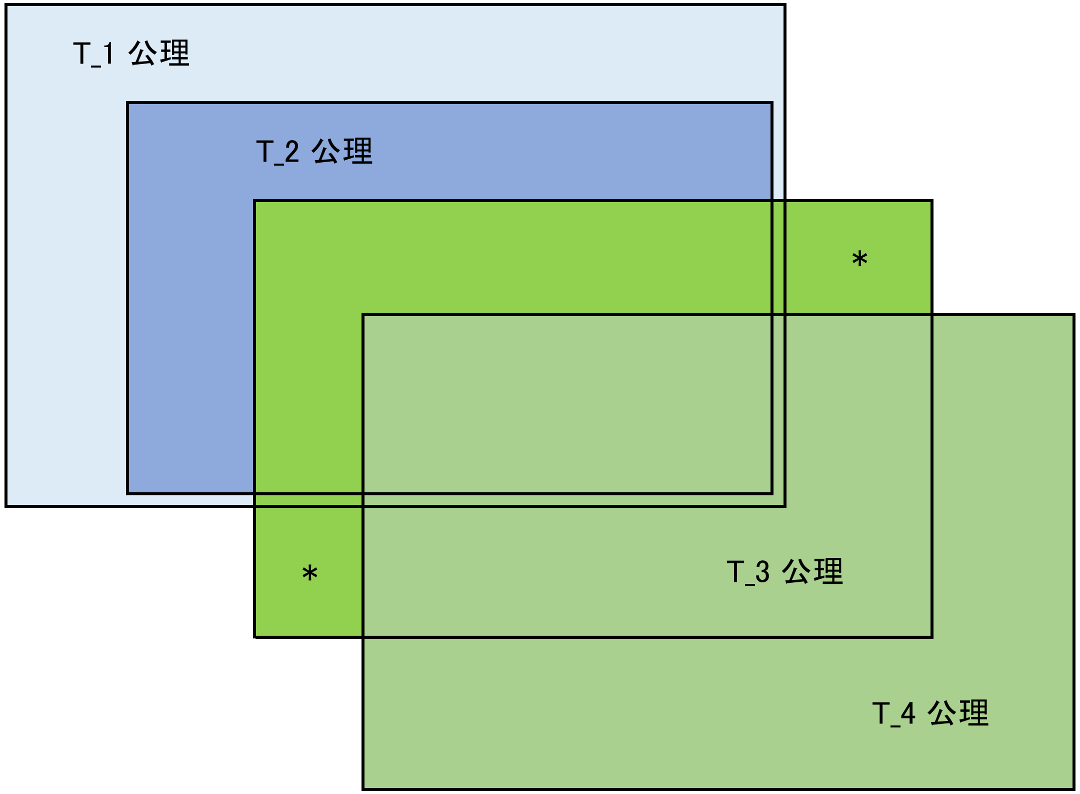

図1

＊ の具体例が　みつかっていない

一般の場合

2026

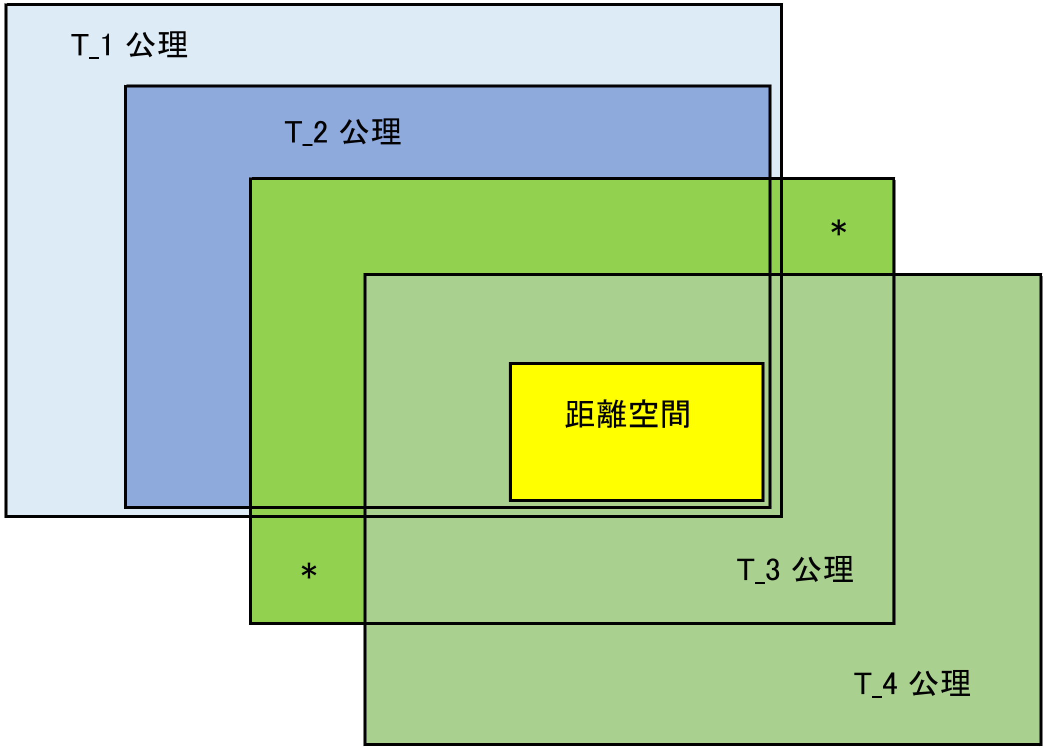

図2

* の具体例が　みつかっていない

第１可算公理を満たす場合

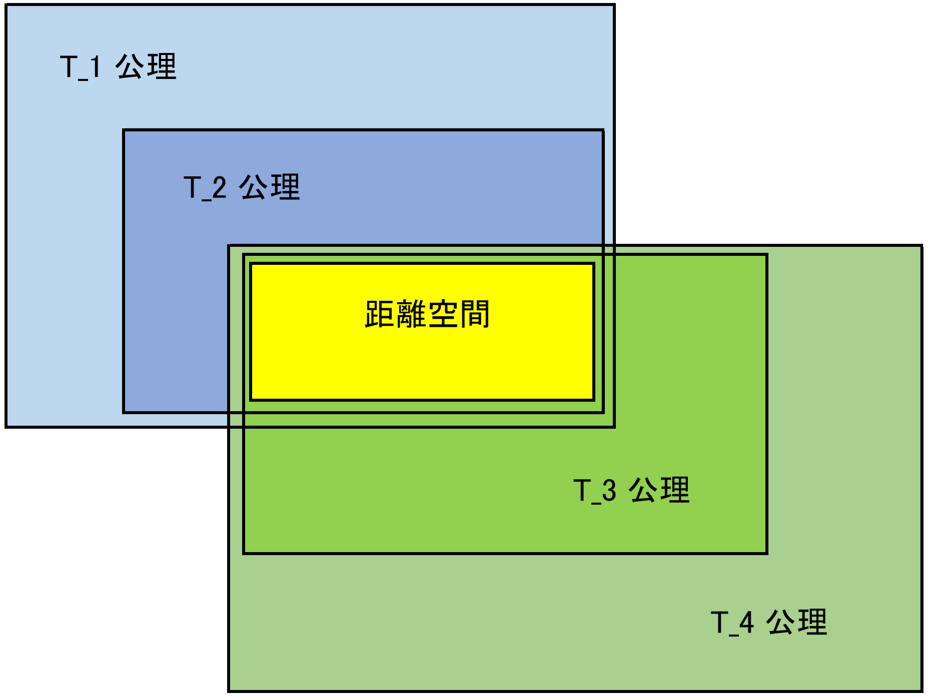

図3

第2可算公理をみたす場合

2028

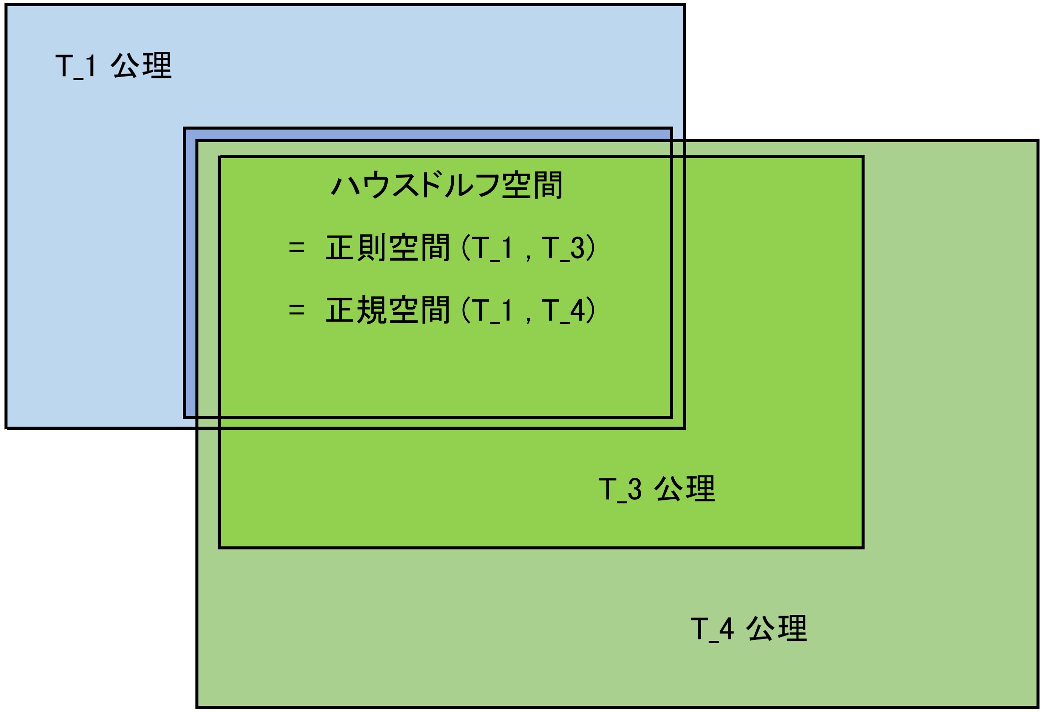

図4

コンパクトの場合

2029

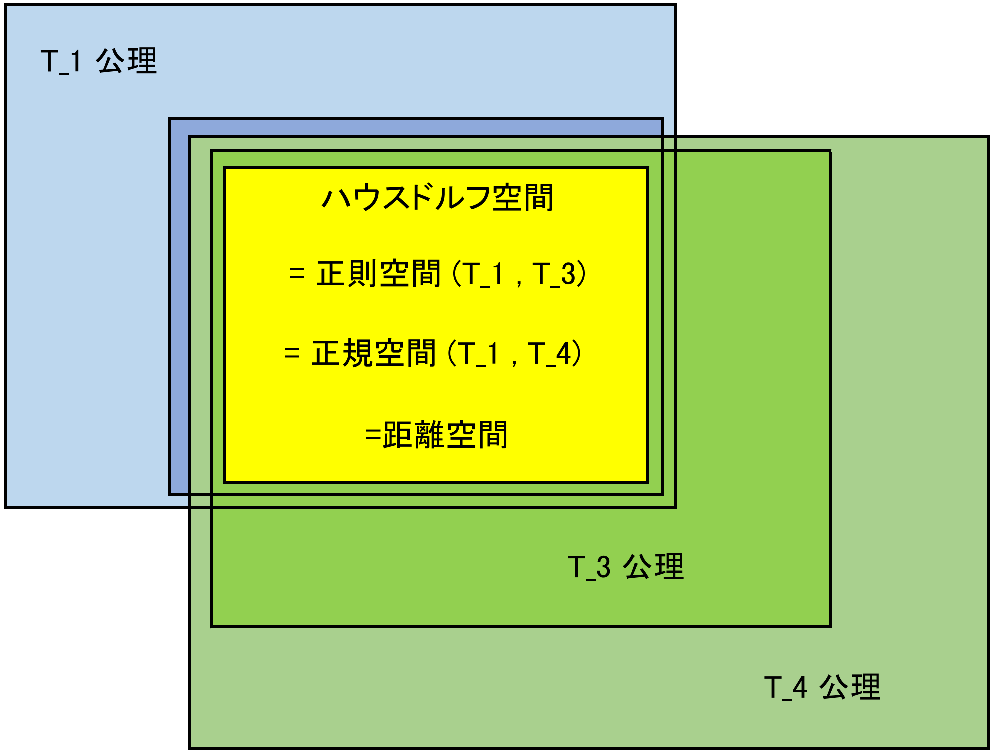

図5

第２可算公理を満たす　コンパクトの場合

2030

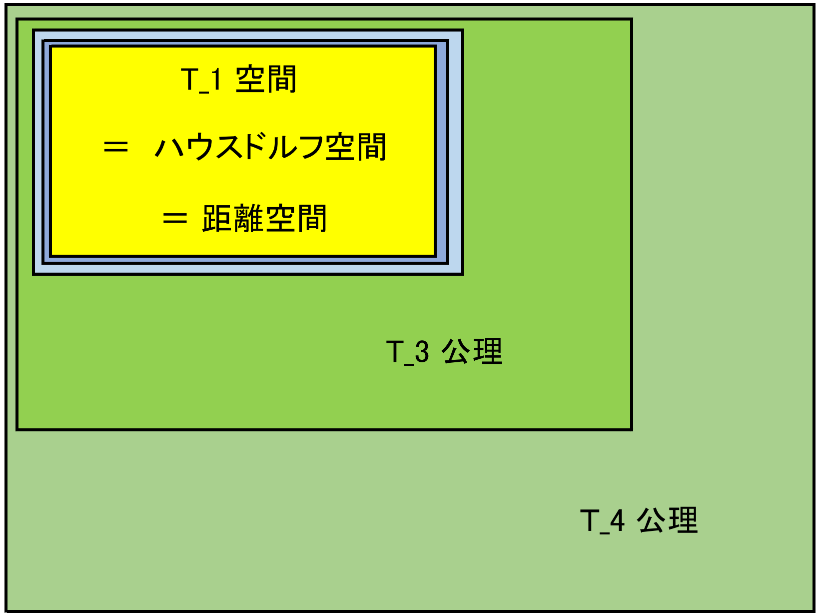

図６

有限集合の場合

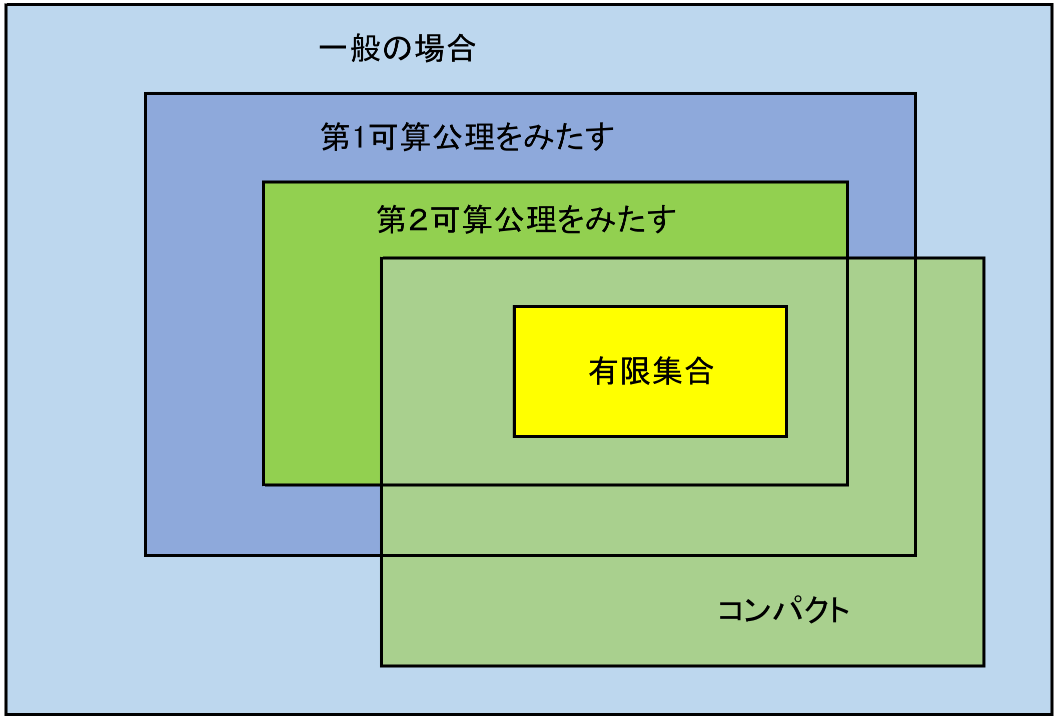

図7

包含図

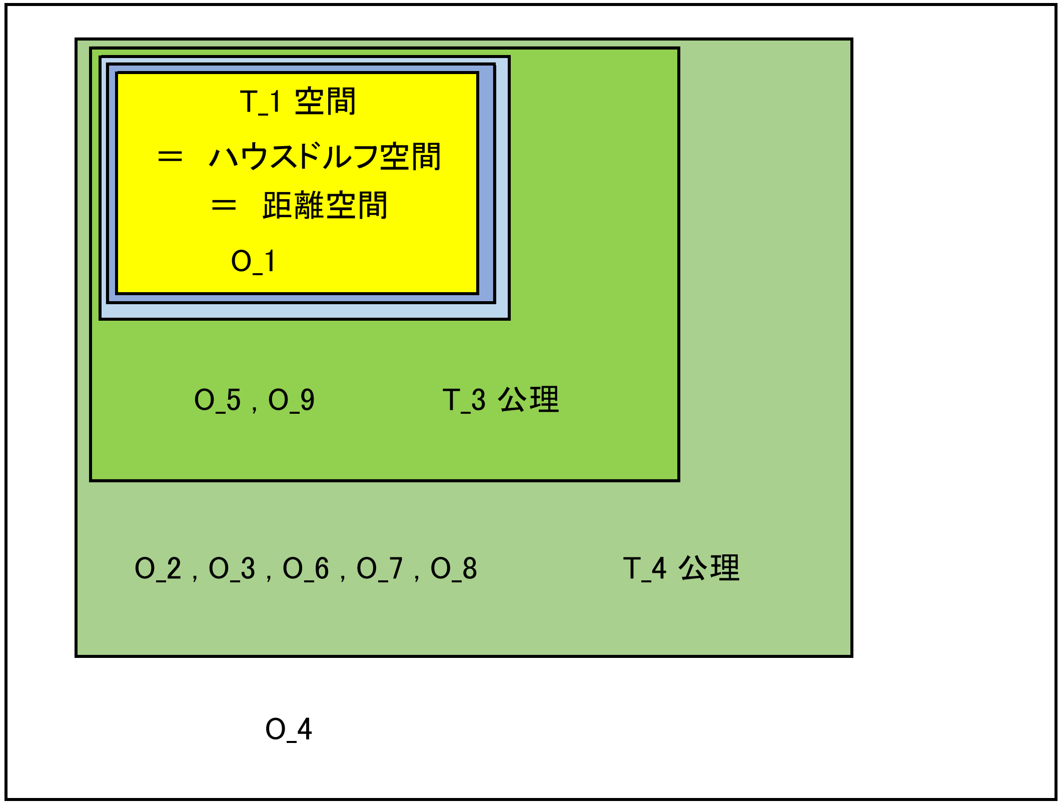

図8

補題7　より

有限集合の場合・例

（例 5.1）（例 5.2）（例5.3） 参照

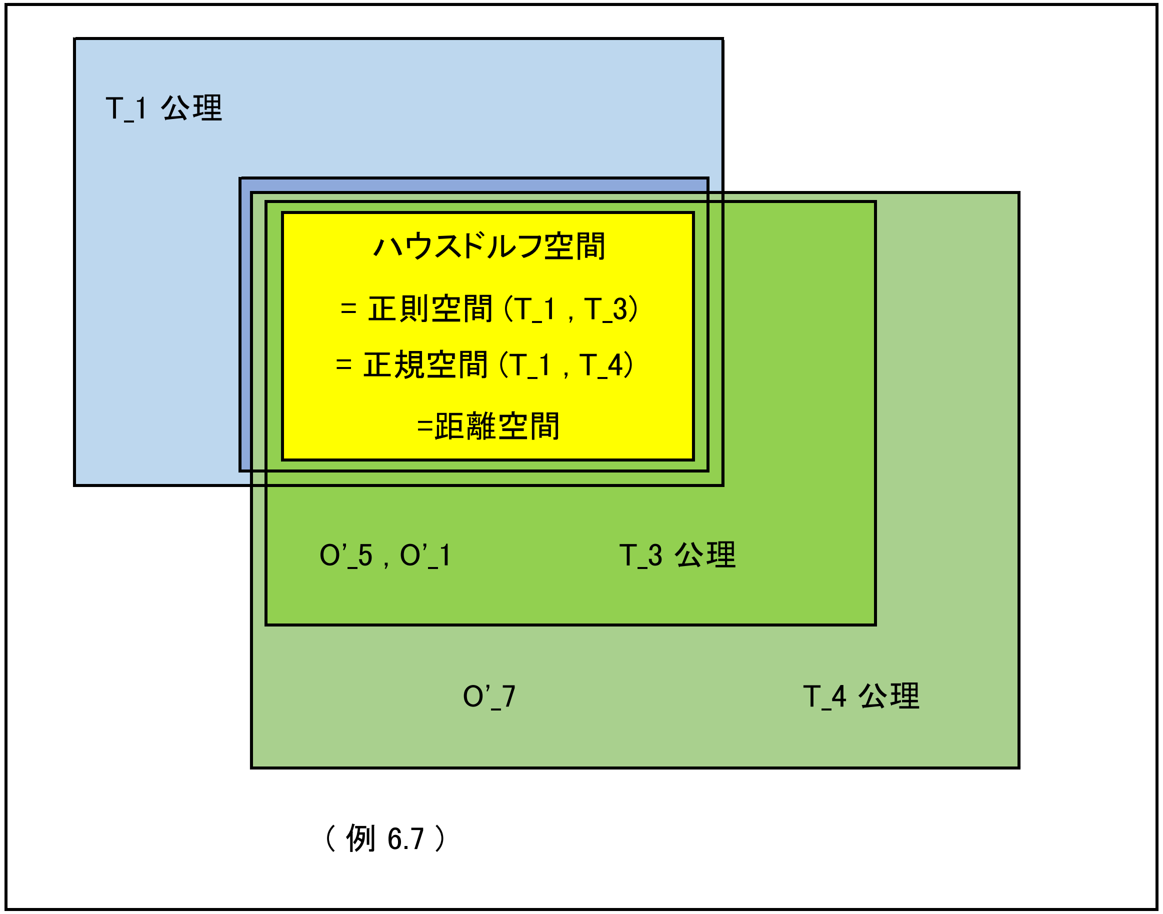

図9

第２可算公理を満たす　コンパクトの場合・例