

数学教職課程用講義-実践編

英国の古くから知られる童謡に見られるある数理現象と、その教材としての教育効果について

城西大学理学部数学科 小木曾岳義

§1: 目的

このノートは2016年前期に法政大学の「教養数学 A」の授業で行った内容をベースにして、2016年の城西大学のオープンキャンパスの模擬授業で、高校生やその保護者に向けて行った内容に基づいている。法政大学での授業でこの題材を扱った理由は、受講者の大半が文学部の学生と国際文化学部の学生であり、文系の学生が興味を持つような誰でも知っている有名な英語の歌に潜む数理を紹介することで、数学をもっと身近な存在に感じてもらうためであり、城西大学のオープンキャンパスに参加した高校生には、一見数学とは全く関係が無い童謡の中に潜む数理を紹介することを通じて、数学の幅広さ、普遍性に触れて、高校までで学習してきた数学の分野以外にいろいろな分野があり、そこには驚きがあるのだということを知ってもらうためです。

§2: 「きらきら星」に見られる数理

Martin Gardner's Workout, Training the Mind and Entertaining the Spirit, A.K Peters, Ltd. ALL RIGHTS RESERVED の日本語の訳本として、阿部剛久、井戸川知之、藤井康生訳、「楽しみながら知性の鍛錬、ガードナー傑作集、ゲーム、パズル、マジックで知る娯楽数学の世界」、森北出版、ISBN 978-4-627-01881-5) という本の第31章: 「10個の驚くべきトリック」(198ページ) に以下のような話題が掲載されている:

Twinkle, twinkle, little star,
How I wonder what you are
Up above the world so high,
Like a diamond in the sky.
Twinkle, twinkle, little star,
How I wonder what you are!

歌の歌詞の2行目から好きな単語を一語選んで、その文字数を数えて下さい。次にその後の単語からその文字数分だけ、進んでください。例えば、little を選んだら、6文字なので star, How I wonder what you と進み、今度は you の単語数を数えて3なので、above に進み、above が5文字なので Like に進み、同様の操作を繰り返すと you にたどり着きます。他の2行にある任意の単語で同じことをしてみてください。不思議なことが起こります。(全部 you で終わります。)

このトリックはプリンストン大学の数学者マーチン・クルスカンによって発見された原理で、手品師たちがクルスカンカウントと呼ぶものに基づいているということが、上記のガードナーの本に書かれています。

上記のことを踏まえ、「きらきら星」の2番

When the blazing sun is gone,
When he nothing shines upon.
Then you show your little light,

Twinkle, twinkle, all the night.
Twinkle, twinkle, little star,
How I wonder what you are!
はどうかと試してみると
驚くことに、この歌の2番でも同じことが言えています。

§3: 「きらきら星」のオリジナルのフランス語版はどうか？

上記の話を経済学教授安東祐希氏にしたところ、「きらきら星」のおおもとのフランス語版についても同様のことが言えるとの報告があった。

Wikipediaによると、きらきら星（きらきらぼし）は、18世紀末のフランスで流行したシャンソン”Ah! Vous dirais-je, Maman”（あのね、お母さん）の日本語名（邦題）。イギリスの詩人、ジェーン・テイラーの1806年の英語詩“ The Star ”による替え歌”Twinkle, twinkle, little star”（きらめく小さなお星様）が童謡として世界的に広まり、さまざまな言語に翻訳され、現在では世界中で愛唱されている。フランス語原詞

Ah! Vous dirai-je, Maman,
Ce qui cause mon tourment ?
Depuis que j'ai vu Silvandre,
Me regarder d'un air tendre ;
Mon cur dit chaque instant :
Peut-on vivre sans amant ?
L'autre jour, dans un bosquet,
De fleurs il fit un bouquet ;
Il en para ma houlette
Me disant : Belle brunette,
Flore est moins belle que toi ;
L'amour moins tendre que moi.
Je rougis et par malheur Un soupir trahit mon cur.
Le cruel avec adresse,
Profita de ma faiblesse :
Hlas, Maman ! Un faux pas
Me fit tomber dans ses bras.
Je n'avais pour tout soutien
Que ma houlette et mon chien.
L'amour, voulant ma dfaite,
Ecarta chien et houlette ;
Ah ! Qu'on gote de douceur,
Quand l'amour prend soin d'un cur !
についても、第一行目のどの5つの単語からスタートしても、8行目の”De”に至ります。

§4: 円周率に現れる同様な現象

下記の例は、上記の話を経済学教授の池田宏一郎氏にした際、以下の様な作れることを教わったので記しておく。

円周率 $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288 \dots$ について, 0,8,9 を除いて, 左から 8 つずつのブロックにまとめる :

31415265
35732346
26433327

この 3 つの数字のブロックのうち, 一番上のブロックのどの数字から始めても 3 つ目のブロックの右から 2 つ目の 2 で終わります.

実際,

3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2,
4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
1 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
5 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
2 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,
5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2,

となり最後から 2 つ目の「2」に至っている. この池田氏の例を踏まえて以下のことを考察しました.

ここで, 円周率にはこだわらず, 1 から 7 までの数字で同様のことが出来るかどうかを試してみると, 例えば

52333462
64323753
56251413

では上記の円周率から作った時のように,

5 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
3 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
4 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
6 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,
2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 4,

となり最後から 3 つ目の「4」に至っている.

しかしながら,

42526376
46143457
37544436

については,

4 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3,
2 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 3,
5 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 7,
2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 7,
6 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 3,
3 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3,

7 → 4 → 7,

6 → 4 → 7,

のように最後から2つ目の「3」に至る数と、最後から7つ目(一番下のブロックの2つ目)の「7」に至り、成立していない。

§5: 上記の話題を教材にした教育効果について

法政大学の「教養数学 A」の授業のなかで、文学部、国際文化学部の学生を対象の授業で「他にそのような歌はないかと探してくるよう」に」というレポートを出したところ、以下のように「London 橋がそうになっていました。」ということ報告するレポートを書いた学生が複数いました。

1.London Bridge is falling down, Falling down, Falling down.

London Bridge is falling down, My fair lady.

2.Build it up with stick and stone, stick and stone, stick and stone,

Build it up with stick and stone, My fair lady.

3.stick and stone will all fall down, all fall down, all fall down,

stick and stone will all fall down, My fair lady.

4.Build it up with wood and clay, wood and clay, wood and clay

Build it up with wood and clay, My fair lady.

5.wood and clay will wash away, wash away, wash away

wood and clay will wash away, My fair lady.

6.Build it up with iron and steel, iron and steel, iron and steel

Build it up with iron and steel, My fair lady.

1 番から 6 番は全部最後の lady で終わります。

7.Iron and steel will bend and bow, bend and bow, bend and bow

Iron and steel will bend and bow, My fair lady.

8.Build it up with bricks and mortar, bricks and mortar, bricks and mortar

Build it up with bricks and mortar, My fair lady.

9.Bricks and mortar will not stay, will not stay, will not stay

Bricks and mortar will not stay, My fair lady.

7,8,9 番は lady ではなく fair で終わりますが、規則は同じです。

§6: 上記の話題を教材についての文系学生、高校生の反応、感想

(a) 法政大学文学部、国際文化学部の反応と感想

英文学や国際文化を専攻とする学生たちにとって、「きらきら星」の英語版は大変なじみのある歌で、受講者の誰もが知っている有名な歌にも関わらず、§1 で紹介した、この歌に見られる数理はみんな聞いたことがなく、まさか自分たちの専門分野の中に、このような数理現象が潜んでいたことに、大変驚いたという感想を、レポートに添えて多くの学生が書いたくれました。また、自分でいろいろな童謡などで、上記のような数理がないか探し、「London 橋」にたどり着いた時は、「苦手で、大嫌いだった数学が、少しだけ好きになった瞬間」になったということを書いてくれた学生もいました。

(b) 城西大学理学部数学科のオープンキャンパスに参加した高校生の反応と感想

数学のイメージは高校までに学習してきた場合の数や確率、2 次関数など教科書で扱ってきたものや、その延長線上にあるものくらいしかイメージ出来なかったけれども、オープ

ンキャンパスの模擬授業を聞いて、意外な分野との結びつきに大変驚き、多分他にもきっと楽しい数学的な話題があるのではないかと思い、より数学に関心を持ちました。という趣旨の感想をもらった。

§7: 結びと総括

誰でも知っている有名な「きらきら星」という歌詞から話題をスタートさせ、文系の学生や高校生にも十分理解できる内容であるにも関わらず、不思議な数理現象を説明し、多くの学生、高校生に驚きを与え、数学に対する関心を増すことが出来たことはこのテーマを選んで正解だったと思います。

上記の現象を証明する問題はすでに解かれた closed な問題なのか、それとも open なのかを著者は知りませんが、上記の不思議な現象の背後にある数理についてきちんと理解したいと思っています。どなたか知っている人、あるいは解明できた人がいたら教えてほしいと思います。

参考文献

[1] Martin Gardner, A Gardner's Workout: Training the Mind and Entertaining the Sprit, A.K.Peters, Ltd. (阿部, 井戸川, 藤井和訳, 「ガードナー傑作集」, 森北出版)