

最短経路問題と等周問題をめぐって

城西大学理学部数学科 中村俊子

本稿は、2009年度および2010年度に城西大学で実施された教員免許状更新講習の選択領域講習（開設講習名：2009年度「数理デザインと統計」、2010年度「現代社会と数理モデル」、主な対象：中学校・高校（数学）の教諭）において著者が担当した「最短経路問題」および「等周問題」に関する教材を基に、中学・高校教員志望の大学生向け講義やセミナーで使用できるようにまとめたものである。小学校の算数の教科書にも取り上げられる初等的な問題から中学校・高校の数学を使って解く問題、また、大学で学ぶ数学の知識を用いたより深い数学的な考察を紹介している。また、現学習指導要領 [4], [5]では数学的活動の一層の充実が強調されていることを受け、実験・計測を通して事象を予測したり正解を考察する活動例を紹介している。「変分法」という物理学をはじめ自然科学の諸分野において重要であり、最先端科学技術の基礎となっている数学的手法・理論が、算数や数学の教科書に掲載されているコラム的な読み物や練習問題等の背景にあることを伝えることも本稿の目的のひとつである。

1 はじめに

自然現象や社会現象の中には、数式を使ったモデルで記述し考察することができるものが数多くある。

「シャボン玉はなぜ丸いのか」

「ライン川沿いには半円型の城壁で囲まれた都市が多いのはどうしてか」

「A 地点から B 地点まで滑り落ちるのに、最も速く滑る滑り台はどのような形状のものか」

「電柱に電線をかけるとどのように吊り下がるか」

「熱平衡状態にある鉄球の内部はどのような温度分布をしているか」

これらの問題はいずれも、数理モデルを使って説明・理解することができる。本稿では、身の回りで数学が応用されている例として、変分問題の中から「最短経路問題」、「等周問題（周の長さが一定の平面図形の中で面積が最大のものを求める問題）」を取り上げる。理論的な解説を通し、さまざまな現象の解析に数学が役立っていることを紹介するとともに、実際に実験を行い、現象への理解を深める。

変分問題とは、

「東京からニューヨークまでの最短経路（径路）は？」

「周の長さが一定の平面図形の中で面積が最大のものは？」

など、距離や面積などの量を最小（極小）あるいは最大（極大）にする図形の形状や関数の形を求める問題をいう。最初に上げた例もすべて、変分問題として取り扱うことができる。

変分問題、とりわけ、最短経路問題や等周問題は、初等・中等教育においても、いろいろなタイプの問題が教科書の中で取り上げられている。本稿では、それらの問題およびその周辺について、さまざまな視点から考察するとともに、理科や社会など他教科との関わりについても幅広く触れたい。

2 最短経路問題

例題 1 平面上の2点 A と B を結ぶ最短経路を求めなさい。

• B

• A

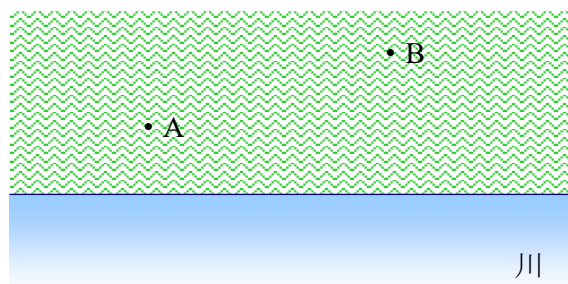
（正解）線分 AB

補足（フェルマの原理）

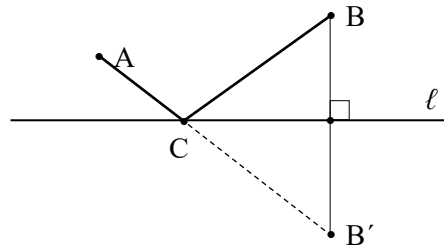
「2点 A と B を通る光の道筋は、点 A を出発して点 B に達するあらゆる（仮想的）経路のうち、所要時間が最小（あるいは極小）になるものに一致する。」

これより、均一な媒質中を光は まっすぐ（直線的に） 進むことがわかる。

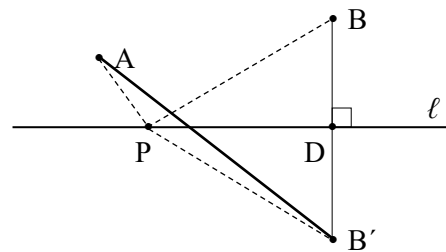
例題 2 右図において、A 地点を出発し、川に立ち寄って手を洗い、B 地点に到着するときの最短経路を求めなさい。



(正解) 川と陸地の境界線を l とおき、直線 l に関して点 B と対称な点を B' 、直線 l と線分 AB' の交点を C とおく。正解は折れ線 $AC+CB$ である。



(正解の証明) 直線 l と線分 BB' の交点を D とおく。直線 l 上に点 P をとると、点 A から P を経由して点 B に到達する最短経路は、折れ線 $AP+PB$ である。ここで、 $P \neq D$ のとき、



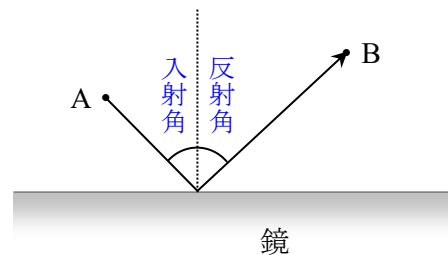
$$BD = B'D, \quad PD = PD \text{ (共通)}, \\ \angle BDP = \angle B'DP = 90^\circ$$

より、 $\triangle BPD \equiv \triangle B'PD$ であるから、 $PB = PB'$ となる。これは、 $P = D$ のときも成り立つ。したがって、折れ線 $AP+PB$ の長さは折れ線 $AP+PB'$ の長さに等しい。点 P が直線 l 上を動くとき、折れ線 $AP+PB'$ の長さが最小になるのは、折れ線が線分 AB' に一致、つまり、 P が直線 l と線分 AB' の交点 C に一致するときである。以上より、最短経路は線分 $AC+CB$ である。

例題 3 (光の反射の法則)

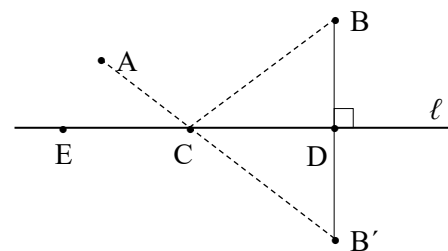
次を証明しなさい。

「光の入射角と反射角は等しい。」



(証明) 鏡の表面を直線 l とおき、**例題 2** の証明と同様に点 B' 、 C 、 D をとる。さらに、 l 上に C より左側に点 E をとる。光は最短経路を通るから、**例題 2** より、その経路は、折れ線 $AC+CB$ である。さらに、 $\triangle BCD \equiv \triangle B'CD$ であったから、

$$\angle BCD = \angle B'CD$$



である。一方、対頂角は等しいから、

$$\angle B'CD = \angle ACE$$

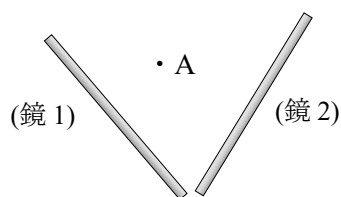
である。よって、 $\angle BCD = \angle ACE$ となる。これより、

$$\text{入射角} = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \angle BCD = \text{反射角}$$

が成り立つ。

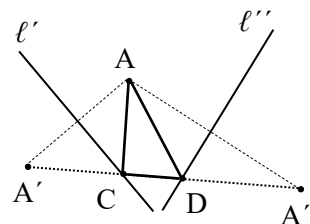
例題 4 (光の反射の法則の応用 (1))

点 A から出た光が鏡 1 と鏡 2 に反射して、再び A を通るときの光の経路を求めなさい。



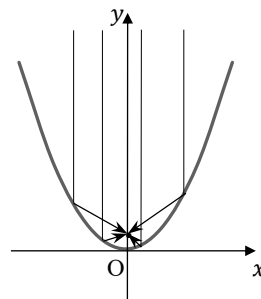
(正解) 鏡 1 の表面を直線 l' 、鏡 2 の表面を直線 l'' とおき、点 A と l' 、 l'' に関して対称な点をそれぞれ A' 、 A'' とおく。また、直線 $A'A''$ と l' との交点を C、 l'' との交点を D とおく。

このとき、正解は折れ線 $AC + CD + DA$ である。



例題 5 (光の反射の法則の応用 (2))

a は正の定数とする。放物線 $y = ax^2$ に真上から込んだ光は、放物線に反射し 1 点 (放物線の焦点) に集まることを示しなさい。



(証明) 入射した光が放物線上の点 (x_0, ax_0^2) ($x_0 \neq 0$) で反射するとする。この点における放物線の接線と x 軸とのなす角を θ とおくと、 $y' = 2ax$ より、

$$2ax_0 = \tan \theta \quad \dots\dots (1)$$

が成り立つ。また、法線の傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ であるから、入射角の大きさは θ であることがわかる。よって、反射の法則より反射角の大きさも θ となるから、反射光の通る道筋は直線

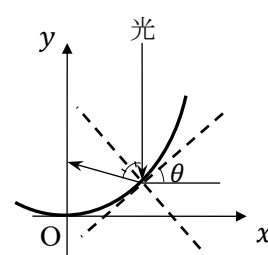
$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) \cdot (x - x_0) + ax_0^2$$

上にある。この直線の y 切片は、(1)より

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) \cdot (0 - x_0) + ax_0^2 &= -\frac{1}{\tan 2\theta} (0 - x_0) + ax_0^2 \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \cdot x_0 + ax_0^2 \\ &= \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

である。すなわち、反射光は放物線の焦点 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ を通る。 $x_0 = 0$ の場合も、反射光は y 軸の $y \geq 0$ の部分を進むから、 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ を通る。

以上より、反射光はつねに放物線の焦点を通ることが示せた。



補足 (パラボラアンテナ, 放物面鏡)

放物線を軸の回りに回転させてできる曲面を放物面という。前で述べたように、放物面は軸に平行に入ってきた光や電波を反射させ 1 点 (焦点) に集める性質があるので、パラボラアンテナや天体望遠鏡の反射鏡の形状に使用されている。逆に、放物面鏡は、焦点に光源をおくと、光を鏡で反射し平行な光線にして遠くまで送り出すことができるので、探照灯の反射鏡などにも使われている。

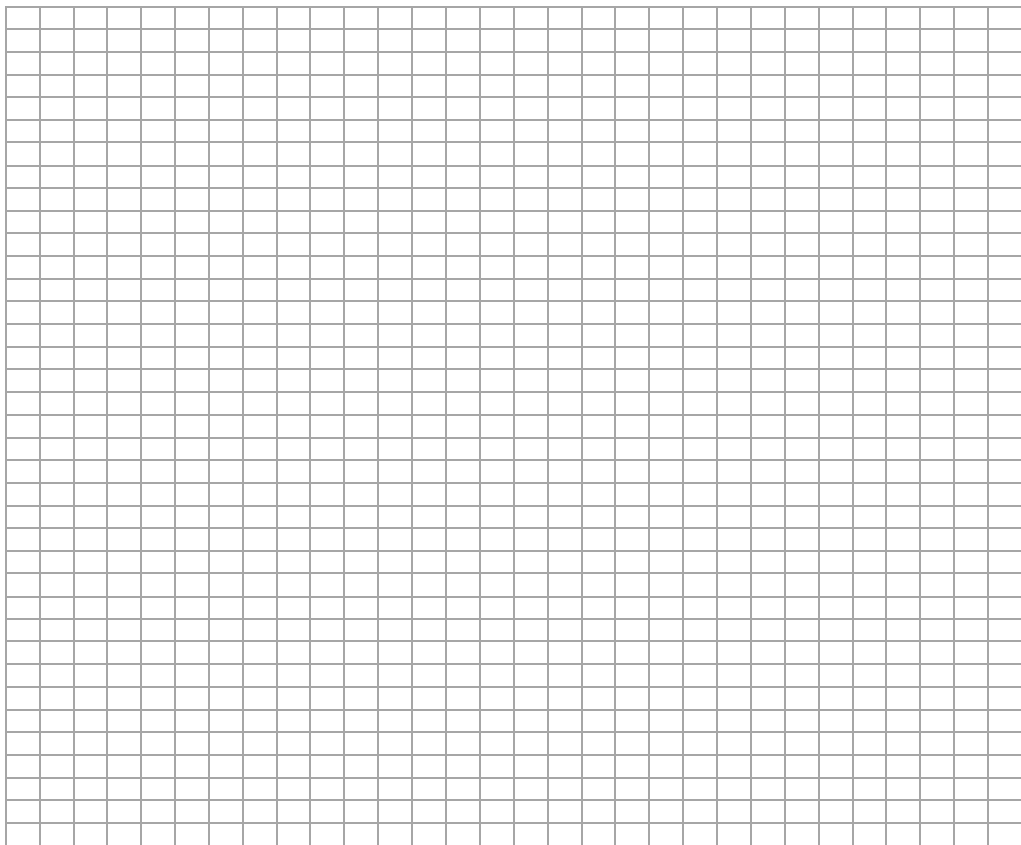
国立天文台野辺山の望遠鏡
© 国立天文台



実験 1 (ソーラークッカーを使った実験)

時間(分後)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
水温(°C)										
時間(分後)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
水温(°C)										
時間(分後)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
水温(°C)										

(水温)

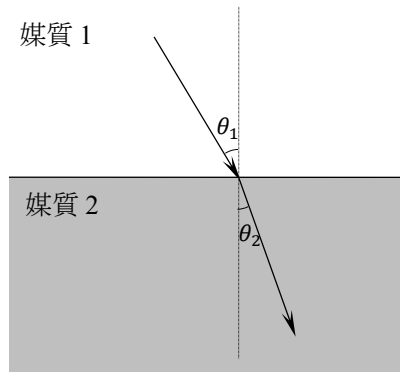


(分後)

例題 6 (光の屈折の法則 (スネルの法則))

媒質 1 における光速が v_1 , 媒質 2 における光速が v_2 であるとし, 媒質 1 から媒質 2 への入射角が θ_1 , 屈折角が θ_2 であるとする。このとき, 次が成立することを証明しなさい。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



(証明) 右図の通り, x 軸が 2 つの媒質の境界を表し, かつ, 入射光が点 A (0, 1) を通るように, 座標を設定する。また, 屈折光が点 B ($a, -b$) を通るとする。

このとき, 光が A から B まで, x 軸上の点 P ($t, 0$) を経由して進むときの所要時間を $T(t)$ とおくと,

$$T(t) = \frac{AP}{v_1} + \frac{PB}{v_2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-t)^2+b^2}}{v_2}$$

と表せ,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T(t) = \infty$$

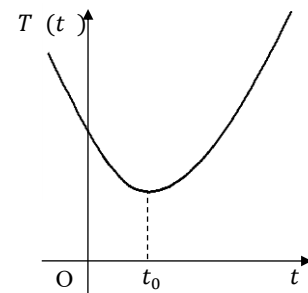
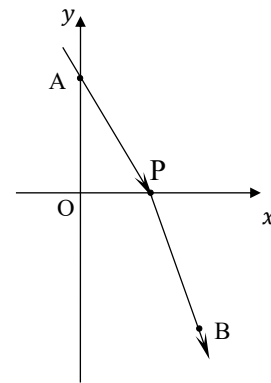
だから, $T(t)$ は最小値を持つ。 $T(t)$ が $t = t_0$ で最小となるとすると,

$$\begin{aligned} T'(t_0) &= \frac{t_0}{v_1\sqrt{1+t_0^2}} - \frac{a-t_0}{v_2\sqrt{(a-t_0)^2+b^2}} \\ &= 0 \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 光が点 ($t_0, 0$) を通過するとき,

$$\begin{aligned} \frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}} &= \sin\theta_1 \\ \frac{a-t_0}{\sqrt{(a-t_0)^2+b^2}} &= \sin\theta_2 \end{aligned}$$

であるから, 上の 2 つ式を (1) に代入して, 光の屈折の法則が導かれる。



注意 媒質 1, 媒質 2 の屈折率がそれぞれ n_1, n_2 であるとき, 真空中での光速を c で表すと, $v_1 = c/n_1, v_2 = c/n_2$ であることが知られている。よって, 光の屈折の法則は, 以下の形に書き換えることができる。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

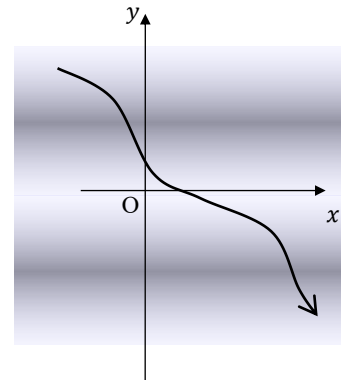
補足 一般に, 光が x 軸方向に均質な媒質中を進む場合には, 位置 (x, y) における光速を $c(y)$, 光の経路と y 軸とのなす角を $\theta(y)$ とすると, 光は所要時間が最小 (極小) となる経路を通るというフェルマの原理から

$$\sin\theta(y) = Kc(y)$$

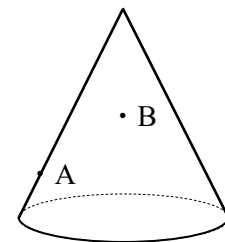
(K は定数) が成り立つことを示せる (詳細は, 参考文献 [3] 等を参照)。これより, 均質な媒質中では,

$$c(y) \equiv \text{定数} \quad \text{であるから,} \quad \theta(y) \equiv \text{定数}$$

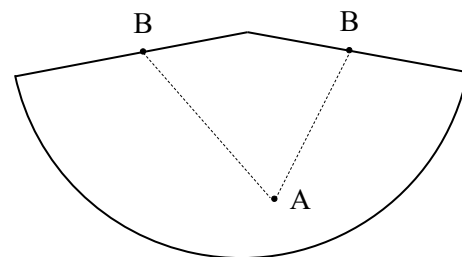
となり, 光は直線的に進むことがわかる。また, 光の屈折の法則も直ちに導かれる。



例題 7 円錐面上の 2 点 A と B を結ぶ円錐面上の最短経路を求めなさい。



(正解) 円錐の頂点と点 B を通る線分に沿って円錐面を切り開いた右の展開図において, 2 点 A と B を結ぶ 2 つの線分のうち, 長さの短い方が正解である。ただし, 2 つの線分の長さが等しい場合は, どちらも最短経路となる。



実験 2 (東京からニューヨークまでの道のり)

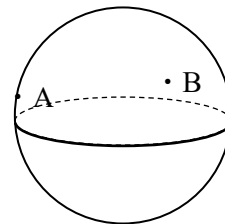
- (1) 東京からニューヨークまでの最短経路を予想しなさい。
- (2) 東京からニューヨークまでの経路を幾つか想定し，地球儀上でのそれらの長さを測り，距離を比較しなさい。

経路	a	b	c	d
距離	cm	cm	cm	cm



外務省ホームページ
<http://www.anzen.mofa.go.jp/riskmap/>
 の地図を加工

例題 8 球面上の2点 A と B を結ぶ球面上の最短経路を求めなさい。



(正解) A と B を通る大円 (球の中心と2点 A, B を通る平面で球を切ったときの切り口となる円) の弧 AB のうち，長さが短い方。ただし，2点 A, B と球の中心が一直線上にある場合は，すべての大円上の弧 AB が最短経路となる。

(正解の証明の概要) 2点 A, B と球の中心が一直線上にある場合は明らかであるから, この3点が一直線上にない場合を考える。必要ならば適当に球面を回転させることにより, 2点 A と B が平面 $x=0$ 上の $y>0$ の範囲にあると仮定する。A を始点, B を終点とする球面上の曲線 C が

$$(x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

とパラメータ表示されるとき, その長さは

$$\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

と定積分で与えられる。

ここで, 球の半径を R とおき, (空間の) 極座標を利用して

$$x(t) = R \sin \theta(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \quad z(t) = R \cos \theta(t)$$

と表されるとする。このとき,

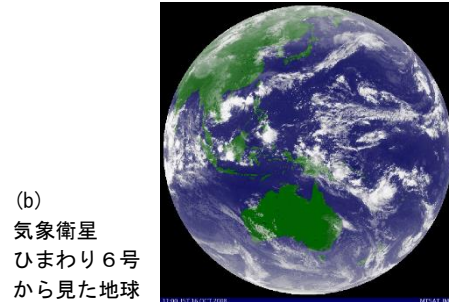
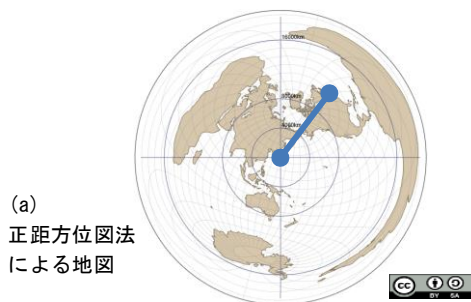
$$\begin{aligned} & \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 \\ &= \{\theta'(t) R \cos \theta(t) \cos \varphi(t) - \varphi'(t) R \sin \theta(t) \sin \varphi(t)\}^2 \\ & \quad + \{\theta'(t) R \cos \theta(t) \sin \varphi(t) + \varphi'(t) R \sin \theta(t) \cos \varphi(t)\}^2 \\ & \quad + \{-\theta'(t) R \sin \theta(t)\}^2 \\ &= R^2[\{\theta'(t)\}^2 + \{\varphi'(t)\}^2 \sin^2 \theta(t)] \end{aligned}$$

であるから, A と B の x 座標が 0 で y 座標が正より, A を始点, B を終点とする球面上の曲線のうち最短であるものは, $\varphi'(t) \equiv 0$ を満たす曲線, つまり, $\varphi(t) \equiv$ 一定

(今の場合特に $\varphi(t) \equiv \frac{\pi}{2}$) である曲線であることがわかる。

以上より, 最短経路は平面 $x=0$ 上, すなわち, 大円上にあることが示せた。

補足 正距方位図法の地図では, 中心からの距離と方位が正しく記されている。

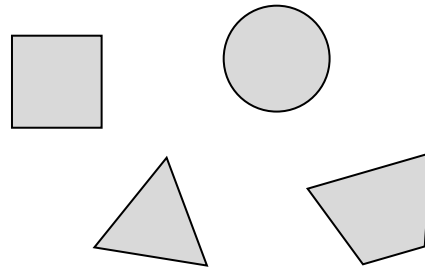


- (a) “どこでも方位図法” by (株) オンターゲット (<http://maps.ontarget.cc/azmap/>) による画像を加工
 (b) 気象庁ホームページ (http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/chishiki_ondanka/p01.html) より

3 等周問題

(古典的) 等周問題

「周の長さが一定の平面図形の中で面積が最大のものを求めなさい。」



補足 古典的等周問題は、ディドの問題ともよばれる。ディドはカルタゴを建国したと伝えられている伝説の女王である。ディドは元々、フェニキア王女であったが、後のカルタゴに逃げ、そこで新しい国を築こうとした際、「牛1頭の皮で囲めるだけの土地ならば分与してよい」と言われ、土地売買契約を結び、牛の皮を細長く切り、それをつなぎ合わせて長い紐を作ってできるだけ広い面積を囲み、砦を築くだけの土地を得たと言われている。

古典的等周問題を解く前に、まず、周の長さが一定の正多角形について考え、正解の予想に役立てる。

例題9 周の長さが L である次の正多角形の面積 A を求め、表を完成させなさい。また、この中で面積の最も小さい図形、最も大きい図形を答えなさい。

	正三角形	正方形	正六角形	正八角形	正十二角形
面積 A					

(解答)

以下の計算結果を表にまとめると次の通りである。

	正三角形	正方形	正六角形	正八角形	正十二角形
面積 A	$\frac{\sqrt{3}}{36} L^2$	$\frac{1}{16} L^2$	$\frac{\sqrt{3}}{24} L^2$	$\frac{1+\sqrt{2}}{32} L^2$	$\frac{2+\sqrt{3}}{48} L^2$

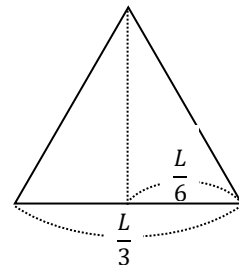
また,

$$\frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0.048 < \frac{1}{16} = 0.0625 < \frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0.072 < \frac{1+\sqrt{2}}{32} \approx 0.075 < \frac{2+\sqrt{3}}{48} \approx 0.078$$

であるから、面積が最も小さいのは正三角形、最も大きいのは正十二角形である。

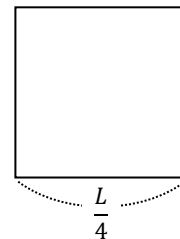
〈正三角形〉

$$A = \frac{L}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} L \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36} L^2$$



〈正方形〉

$$A = \frac{L}{4} \times \frac{L}{4} = \frac{1}{16} L^2$$

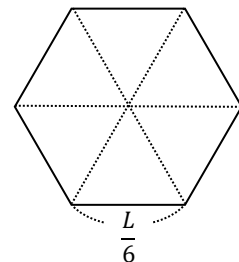


〈正六角形〉

1辺の長さが $\frac{L}{6}$ の正三角形の面積の6倍に等しいから、

$$A = \frac{L}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{12} L \times \frac{1}{2} \times 6 = \frac{\sqrt{3}}{24} L^2$$

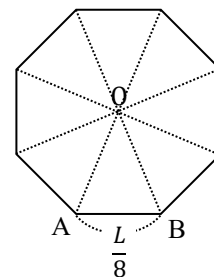
となる。



〈正八角形〉

求める面積は、右図のような底辺の長さが $\frac{L}{8}$ で、

頂角の大きさが 45° の二等辺三角形 OAB の面積の8倍に等しい。

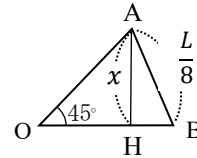


点 A から線分 OB に垂線を引き、OB との交点を H とし、 $AH = x$ とおく。△OAH は直角二等辺三角形で、

$$OH = x, \quad OA = \sqrt{2} x$$

である。△ABH に三平方の定理を適用して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{8}\right)^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= AH^2 + (OB - OH)^2 \\ &= x^2 + (\sqrt{2}x - x)^2 \end{aligned}$$



となる。よって、 $x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{256} L^2$ である。したがって、

$$\Delta OAB \text{ の面積} = \frac{OB \times AH}{2} = \frac{\sqrt{2}x^2}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{256} L^2$$

であるから、

$$A = \Delta OAB \text{ の面積} \times 8 = \frac{1+\sqrt{2}}{32} L^2$$

を得る。

〈正十二角形〉

求める面積は、右図のような底辺の長さが $\frac{L}{12}$ で、

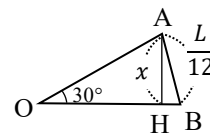
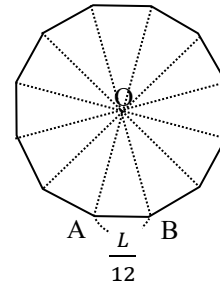
頂角の大きさが 30° の二等辺三角形 OAB の面積の 12 倍に等しい。

点 A から線分 OB に垂線を引き OB との交点を H とし、 $AH = x$ とおくと、

$$OH = \sqrt{3}x, \quad OA = 2x$$

である。正八角形の場合と同様に、△ABH に三平方の定理を適用して、

$$\left(\frac{L}{12}\right)^2 = AH^2 + HB^2 = (8 - 4\sqrt{3}) x^2$$



となる。よって、 $x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{576}L^2$ である。したがって、

$$\triangle OAB \text{ の面積} = \frac{OB \times AH}{2} = x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{576}L^2$$

であるから、

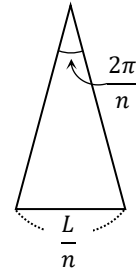
$$A = \triangle OAB \text{ の面積} \times 12 = \frac{2+\sqrt{3}}{48}L^2$$

を得る。

例題 10 周の長さが L である正 n 角形の面積 A を求めなさい。

(解答) **例題 9** と同様に考え、求める面積は、底辺

の長さが $\frac{L}{n}$ で、頂角の大きさが $\frac{2\pi}{n}$ の二等辺三角形の面積の n 倍に等しい。この二等辺三角形の面積は



$$\frac{L}{n} \times \frac{\frac{L}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}} \times \frac{1}{2} = \frac{L^2}{4n^2 \tan \frac{\pi}{n}}$$

と求められるから、

$$A = \frac{L^2}{4n^2 \tan \frac{\pi}{n}} \times n = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$$

である。

例題 11 関数 $f(x) = \frac{L^2}{4x \tan \frac{\pi}{x}}$ ($x \geq 3$) の増減および $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べなさい。

(解答) $f(x)$ を微分すると、

$$f'(x) = \frac{-L^2}{\left(4x \tan \frac{\pi}{x}\right)^2} \times \left(4x \tan \frac{\pi}{x}\right)' = \frac{L^2}{4x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x}} \times \left(\frac{\pi}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{x}\right) \dots\dots (1)$$

となる。ここで、関数 $g(t)$ を

$$g(t) = t - \frac{1}{2} \sin 2t$$

と定める。このとき、 $g'(t) = 1 - \cos 2t \geq 0$ であり、この不等式において等号成立は $t = n\pi$ (n は整数) のときのみであるから、 $g(t)$ は狭義単調増加関数である。したがって、 $t > 0$ のとき $g(t) > g(0) = 0$ が成り立つ。ゆえに、 $x \geq 3$ のとき、 $\pi/x > 0$ であるから、

$$g\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\pi}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{x} > 0$$

が成り立つ。よって、 $f(x)$ において、(1) から $f'(x) > 0$ 、すなわち、 $f(x)$ も狭義単調増加関数である。

また、 $x \rightarrow \infty$ のとき、

$$f(x) = \frac{L^2}{4x \tan \frac{\pi}{x}} = \frac{\frac{\pi}{x}}{\sin \frac{\pi}{x}} \times \frac{L^2}{4\pi} \times \cos \frac{\pi}{x} \rightarrow 1 \cdot \frac{L^2}{4\pi} \cdot 1 = \frac{L^2}{4\pi}$$

となる。

例題 11 より、周の長さが L である正 n 角形の面積 $f(n)$ は、 n が大きくなるにしたがい増加し、 $L^2/(4\pi)$ の値に近づいていくことがわかる。実際、 $y = f(x)$ のグラフの概形は右図の通りである。

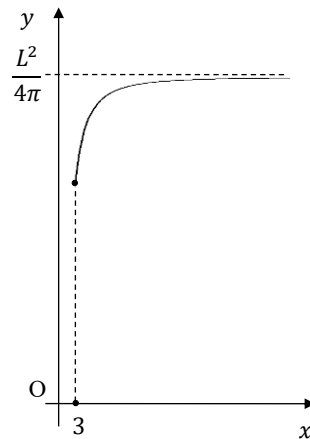
ところで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、正 n 角形の形状は円に近づいていくように見える。ここで、円周の長さが L である円の面積 A を求めると、半径が $L/(2\pi)$ であるから、

$$A = \pi \times \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

である。これは、 $n \rightarrow \infty$ としたときの正 n 角形の面積の極限值と一致している。

以上の考察から、古典的等周問題の正解は、円であることが予想される。

平面図形において、次の等周不等式が成り立つ。古典的等周問題は、この等周不等式を用いて解くことができる。



等周不等式

「周の長さが L ，面積が A の平面図形において，

$$4\pi A \leq L^2$$

が成立する。ここで，等号が成立するのは円の場合のみである。」

本節の最後で，等周不等式の証明の概略を述べる。

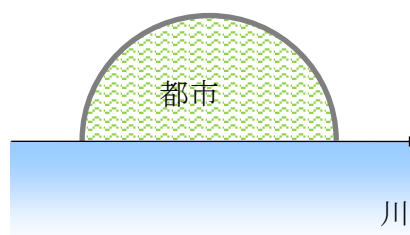
等周不等式より，周長が L である平面図形の面積は $L^2/(4\pi)$ 以下であり，面積がこの値になるのは円のみであることがわかる。逆に，面積が A である平面図形の周長は $2\sqrt{\pi A}$ 以上であり，周の長さがこの値になるのは円のみであることもわかる。

以上をまとめると，以下の通りである。

「周の長さが一定の平面図形の中で面積が最大のものは 円 である。」
(古典的等周問題の正解)

「面積が一定の平面図形の中で周の長さが最小のものは 円 である。」

古典的等周問題の正解から，ライン川など沿岸にある都市の城壁に半円型のものが多いのが理解できる。



同様の結果は，立体図形に対しても成り立つ。寒い日に手をじゃんけんのグーの状態にするのは，無意識のうちに手の表面積を最小にして体熱を外に逃がさないようにしているのである。また，牛乳や清涼飲料水などの紙パックも，こうした性質を考慮し設計されている。例えば，中身が入っていない空の1リットル入りの牛乳や清涼飲料水のパックの大きさを測ると，底面は1辺の長さがおおよそ7 cmの正方形で，高さは20 cm以下である。したがって，容積は高々 $7 \times 7 \times 20 = 980 \text{ cm}^3$ である。1リットル = 1000 cm^3 である

から、この容器に飲料 1 リットルは入らないのだろうか？ 実際は、飲料を入れると圧力によりパックの形状が変形してやや丸味を帯びるため容積が増えるので、1 リットル入るのである。

実験 3 (1 リットル入り飲料の紙パックの容積計算)

$$\boxed{\quad} \text{ cm}^2 \quad \times \quad \boxed{\quad} \text{ cm} = \boxed{\quad} \text{ cm}^3 \quad (= \boxed{\quad} \text{ リットル})$$

底面積 高さ

補足 (等周不等式の証明)

(準備 1 (曲線で囲まれた図形の面積))

曲線 C が $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ とパラメータ表示される時、点 $(x(a), y(a))$ を C の始点、 $(x(b), y(b))$ を終点という。始点と終点が一致するとき、 C は閉曲線とよばれる。また、 $a \leq t_1 < t_2 < b$ ならば $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ が成り立つとき、 C は単一曲線とよばれる。特に、 C が閉曲線かつ単一曲線であるとき、 C は単一閉曲線 (単純閉曲線あるいはジョルダン曲線) とよばれる。

さらに、 $x(t)$ と $y(t)$ が C^1 級関数で、すべての t について $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ が成り立つときに C は C^1 級曲線とよばれ、 C が C^1 級曲線を有限個つなぎ合わせた曲線であるとき区分的に C^1 級であるという。

区分的に C^1 級である単一閉曲線 $C: (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ において、 C で囲まれた図形の面積 A は

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\} dt$$

と求めることができる。

(準備 2 (フーリエ級数))

定義 区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された関数 $f(t)$ に対し、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

を $f(t)$ のフーリエ級数という。ただし、 a_n と b_n は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される定数で、フーリエ係数とよばれる。

定義 区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された関数 $f(t)$ が、

(a) 有限個の点を除き連続である；

(b) 不連続点 $t = t_0$ では、右極限 $\lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t)$ と左極限 $\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t)$ が存在する；

を満たすとき、区分的に連続であるという。

定理 区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された関数 $f(t)$ が連続、かつ、 $f'(t)$ が区分的に連続で、 $f(\pi) = f(-\pi)$ が成り立つとき、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

が成立する。特に、右辺のフーリエ級数は t について一様に収束する。

(等周不等式の証明 (cf. Hurwitz (1901), 参考文献 [9]))

平面図形の周が $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ とパラメータ表示されているとする。

$$s = -\pi + \frac{2\pi}{L} \int_a^t \sqrt{\{x'(\sigma)\}^2 + \{y'(\sigma)\}^2} \, d\sigma$$

とおくと、 t が a から b まで動くとき、 s は $-\pi$ から π まで動き、

$$\{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

が成り立つ。ゆえに、以下では、必要ならば変数変換することにより、

$$a = -\pi, \quad b = \pi, \quad \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

であることを仮定する。

$x(t), y(t)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数であるから、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

(a_n, b_n, c_n, d_n は定数) とフーリエ級数展開して表すと,

$$L = \frac{2\pi}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt$$

$$= \frac{2\pi}{L} \int_{-\pi}^{\pi} [\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2] dt$$

$$= \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

となる。一方,

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n (a_n d_n - b_n c_n)$$

である。よって, これらより,

$$L^2 - 4\pi A$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n-1)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + n(a_n - d_n)^2 + n(b_n + c_n)^2\}$$

$$\geq 0$$

が導かれ, 等周不等式 $4\pi A \leq L^2$ を得る。特に, 等号成立は,

$$n(n-1)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = 0 \quad \text{かつ}$$

$$n(a_n - d_n)^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad n(b_n + c_n)^2 = 0$$

が成り立つとき, すなわち,

$$a_1 - d_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad b_1 + c_1 = 0,$$

$$n \geq 2 \text{ について } a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

となるときである。よって, このとき,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t - c_1 \sin t,$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos t + a_1 \sin t$$

であるから、これら 2 式を変形して、 $x(t)$ と $y(t)$ は

$$\left\{x(t) - \frac{a_0}{2}\right\}^2 + \left\{y(t) - \frac{c_0}{2}\right\}^2 = a_1^2 + c_1^2$$

を満たすことがわかる。これは円の方程式で、**例題 11**の後で述べた通り、円の場合には等周不等式において等号が成立するから、等周不等式の等号が成立するのは円の場合のみである。

参考文献

- [1] 俣野 博 (1998), 微分方程式 I, 岩波講座 応用数学, 岩波書店.
- [2] 俣野 博 (1998), 微分方程式 II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店.
- [3] 俣野 博 (1996), 微分と積分 3, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店.
- [4] 文部科学省 (2008), 中学校学習指導要領解説 数学編, 教育出版.
- [5] 文部科学省 (2009), 高等学校学習指導要領解説 理数編, 実教出版.
- [6] Richard Courant and David Hilbert (斎藤 利弥 (監訳)・丸山 滋弥 (訳)) (1989), 数理物理学の方法 1, 東京図書.
- [7] Richard Courant and David Hilbert (斎藤 利弥 (監訳)・筒井 孝胤 (訳)) (1989), 数理物理学の方法 4, 東京図書.
- [8] Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba (小川 泰・平田 隆幸・神志那 良雄 (訳)) (1994), 形の法則—自然界の形とパターン, Scientific American Library, 東京化学同人.
- [9] 高橋 陽一郎 (2006), 実解析とフーリエ級数, 岩波書店.