数学教職課程用講義-実践編

アクティブラーニングによる図形と論理に関する学習の例

城西大学理学部数学科　小木曽岳義[*1]，清水優祐[*2]，　中村あかね[*3]，廣惠一希[*4]

概要

このノートでは, 図形と論理に関する教材について, 能動的に手を動かしたり, まわりの人と議論をし, 考えを深める形のアクティブラーニングを大学生, 高校生向けの授業, 模擬授業を通し, 学習内容をより効果的に印象に残るように指導した例とその教育効果について紹介する.

1　はじめに

数式処理による代数学という城西大学理学部数学科 3 年生の選択科目, 城西大学に大学見学に来たさいたま市の高校の高校 2 年生向けの模擬授業, 埼玉県, 東京都, 山形県, 千葉県の高校生 3 年生を対象に行ったオープンキャンパスの模擬授業において, 以下の 2 つの話題について, 学生が積極的に問題に取り組み, 楽しみながら考えられるように以下のような話題を提供し, 徐々にヒントを与えるという工夫をしながら解答に導いた.

1. 論理的な問題を先ず図形の問題に変換して見やすくして, それを初等的整数論の知識を用いて解決する問題を, 徐々にヒントを与えつつ解答に導いた（例題 1 ）
2. 格子点の中点という幾何学的な問題に対して, 鳩の巣原理という組み合わせ論の基礎的な道具を用いて解決するという手順を, 徐々にヒントを与えつつ解答に導いた (例題 2)

[*1] e-mail kogiso@josai.ac.jp
[*2] e-mail yshimizu@josai.ac.jp
[*3] e-mail a-naka@josai.ac.jp
[*4] e-mail kazuki@josai.ac.jp

2　図形と論理の学習のアクティブラーニング

ここでは, アクティブラーニングを用いた図形と論理に関する学習の例を 2 つ紹介する.

2.1　例 1：握手数について

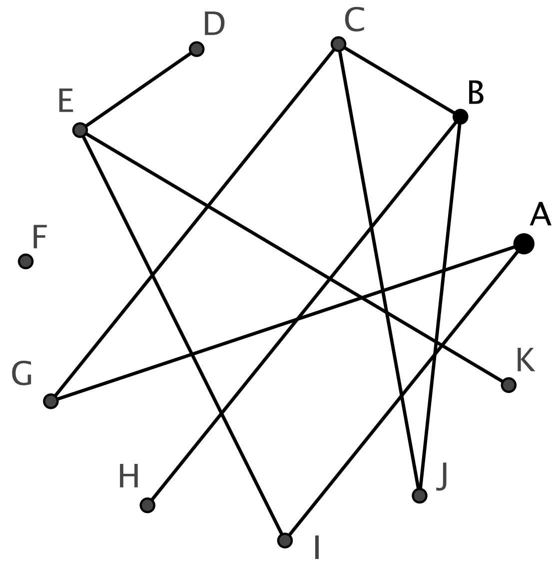
問題 1 n 人の人がパーティーに参加して, 参加者がそれぞれ何人かの人と握手した. そうすると, その n 人は偶数人と握手したグループと奇数人と握手したグループに分かれるが, 奇数人と握手をしたグループの人数は必ず偶数人であることを証明せよ.

この問題について, 先ずノーヒントで考えてもらう. グラフを使えばよいというアイデアが思いつかない学生がいた場合は, 以下のようなヒントを与える：
[ヒント 1-1] 人をドットまたは○で頂点として表示し, 握手は頂点を結ぶ線分として表す. そのようにして, 上記の問題 1 が, 以下のようなグラフ上の頂点から生える線分の個数についての問題に置き換えられることに注意しよう.

上記の [ヒント 1-1] により, 問題 1 は以下のようなグラフの問題 1' に置き換わる：

問題 1' n 個の頂点を用意して, それらの n 個の頂点を線分で好きなように結んだとする. そうすると, その n 個の頂点からなる集合 X は, 偶数本の線分が生えている X の頂点のなす集合 X_E と奇数本の線分が生えている X の頂点のなす集合 X_O に分かれるが, X_O の元の個数はどの様に頂点を線分で結んでも常に偶数個であることを証明しなさい.

受講者への問いかけ・指示 1-1　黒板に 11 個のドットを書き, 受講者の学生ないし生徒を何名か選び, 好きなように頂点を選んで, 好きなように頂点を線分でつないでもらう. 例えば, 以下のように頂点が線分で結ばれたとしよう：



（図 1 ）

このとき, 11 人各々が握手した人数（11 個の点から生えている線分の数）を表にすると以下のようになる：

メンバー (頂点)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
握手数 (頂点から生えている線分数)	2	3	3	1	3	0	2	1	2	2	1

上記の表から分かるように, 偶数人の人と握手した人は A(2 人), F(0 人), G(2 人), I(2 人), J(2 人) の 5 人, 即ち, $X_E = \{A, F, G, I, J\}$, 奇数人と握手をした人は B(3 人), C(3 人), D(1 人), E(3 人), H(1 人), K(1 人) の 6 人, 即ち, $X_O = \{B, C, D, E, H, K\}$ となる. このとき奇数人と握手をした人の人数が偶数人, X_O の元の個数が偶数個であることに注目する. 再び別の受講者の中から何人か選び, また握手の仕方を変える（頂点を線分でつなぐつなぎ方を変える）, そうしてもやはり, 奇数人と握手をした人数（頂点から奇数本の線分が出ている頂点の個数）は偶数個となることを分かってもらい, 頂点の個数, 誰がどう握手をするか（頂点からの線分の生え方）によらず, そうなることを理解してもらう.

受講者への問いかけ・指示 1-2 このヒントの後で, 少し時間をおいて, 学生, 生徒が問題が解けたかを確認する. また問題の意味が理解できたかどうかを確認する.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック 実際の授業, 模擬授業においては, 問題が解けた学生が何名かいた. また問題で何が問われているかどうかわからない学

生, 生徒はいなかった. 問題が解けた学生, 生徒には資料を読むなどの課題を与え, 当該の問題からは解放させる. まだ解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなアプローチを行った.

[ヒント 1-2]　握手は, 例えば A さんが B さんと握手をしたら, B さんも A さんと握手をしたことになる. 言い換えると, 頂点 A と頂点 B が線分で結ばれているならば, A から B に向かって線分が一本生えているし, B からも A に向かって一本生えていることに注意しよう. 以上のことから, 全体の総握手数（各人が握手をした回数の合計数）, 言い方を変えると, 各頂点から生えている線分の数の合計は必ず偶数になる.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　上記のヒントでその先を見通すことができ, 答えを導き出した学生, 生徒がいた. そういう学生, 生徒には資料を読むなどの課題を与え, 当該の問題からは解放させる. まだ解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなアプローチを行った.

[ヒント 1-3]　偶数人と握手をした人の総握手数, 言い換えると X_E の頂点から生えている線分の合計数は偶数であることを伝える. 何故なら偶数の任意個の和は偶数であるからである.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　上記のヒントでその先を見通すことができ, 答えを導き出した学生, 生徒がいた. そういう学生, 生徒には資料を読むなどの課題を与え, 当該の問題からは解放させる. まだ解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなアプローチを行った.

[ヒント 1-4]　全体の n 人は偶数人と握手をしたグループと奇数人と握手をしたグループに分かれる. 言い方を換えると, $X = X_E \cup X_O$, $X_E \cap X_O = \phi$ である. このことと上記の [ヒント 1-2], [ヒント 1-3] から奇数人の人と握手をした人の総握手数, 言い方を換えると, X_O の頂点から生えている線分の数の合計は, 偶数から偶数を引いた数だから偶数になる.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　上記のヒントでその先を見通すことができ, 答えを導き出した学生, 生徒がいた. そういう学生, 生徒には資料を読むなどの課題を与え, 当該の問題からは解放させる. まだ解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなアプローチを行った.

[ヒント 1-5]　問題は, 奇数が k 個あったときに, その合計が偶数であれば, k が偶数になることを導きなさい. という問題に帰着された. この問題のように, 直感的に自

明な命題を証明するのによく使われるのが「背理法」や「対偶」を示すという方法である.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　上記のヒントで, 残りのすべての学生, 生徒が, 「奇数の奇数個の和は奇数だから, 上記の結論に矛盾する, したがって [ヒント 1-5] の k は偶数でなくてはならない」 ということを理解し, 参加者全員が当該の問題を理解し, 解決できた.

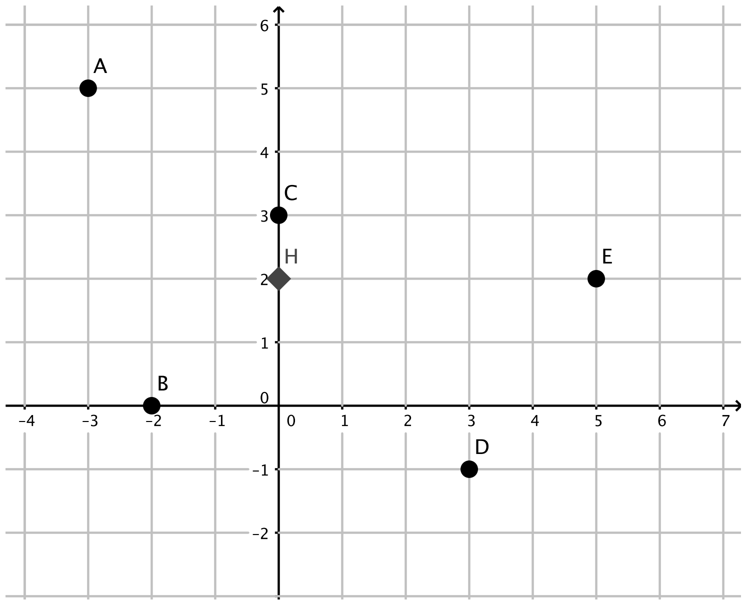
教育効果 1　問題 1 のように文章のみで考える問題を問題 1' のようなグラフの問題に置き換えることで, 以下のような教育効果が見受けられた. 上記のように黒板に出て何人かの学生, 生徒が自ら頂点を好きなように結んだグラフについて, 題意が満たされているのを参加している学生が確認をし, 問題の意味がよく呑み込めていない学生, 生徒においても「何が問われているか」が理解できる. また, 教員の側が一方的に例を与えると, 「都合のいいように煙にまかれた」という印象を持ち, その時点で考えることをやめてしまう学生, 生徒も出てくることが想定されるが, 学生自ら与えた例について, 教員が答えるというスタイルは, 以下のような野球の話に例えられる. 前者は, 教員が自らトスしたボールを好きなところに打って拾わされるノック練習であり, 「やらされている」という感情を抱くことが想定される. 後者は, 学生, 生徒が「自分が好きなように投げたボールを教員が打てるのだろうか？」, 「もし打てるのなら, どのように打ってくるのか？」という試合, ゲーム的要素を感じ, その問題に関心をもち, 答えのみならず答えの導き方についても興味を持つことが想定される.

2.2　例 2：格子点の中点

問題 2　格子点を任意に 5 つ選ぶと, その中からある 2 点を選べば, その 2 点の中点もまた格子点になることを証明しなさい.

受講者への問いかけ・指示 2-1　黒板にある程度細かい格子の絵を白いチョークで大きく描き, 受講者の学生ないし生徒を 1 人選び, 好きなように格子点を 5 つ選ぶか, 5 人の学生か生徒を選びそれぞれ好きな格子点を選んでもらう.

このときの状況が下記の様であったとしよう.



（図２）

受講者への問いかけ・指示 2-2　自分たちが選んだ５つの格子点の中から,「中点が格子点になるような２点の格子点を選ぶことができるか考えてみよう」と問うてみる.

この時点での学生，生徒の理解度のチェック　実際の授業, 模擬授業においては, 多くの学生, 生徒が, 上記の場合においては格子点 A と格子点 D を選ぶと, その中点 H は格子点になることを見つけることができた．また問題で何が問われているかどうかわからない学生, 生徒はいなかった．しかし, この時点で, どうして任意に選んだ５つの格子点についてそのような現象が起こるのか説明できる学生や生徒はいなかった.

[**ヒント 2-1**]　もし５つの格子点ではなくて４つの格子点を選んだ場合はどうか？という質問をする.

この時点での学生，生徒の理解度のチェック　授業に参加しているほとんどの学生, 生徒はいろいろ試行錯誤して, ４つの場合はどの様に２つを選んでもその中点が格子点にはならない場合があることを見つけられた. 例えば一マスの４つの格子点はその例であることに気が付いた学生, 生徒がいた.

受講者への問いかけ・指示 2-3　参加者の学生, 生徒に, それでは,「何故５つの場合に条件を満たすのに４つの場合は満たさないのか？」と問うてみる.

この時点での学生，生徒の理解度のチェック　実際の授業, 模擬授業においては, 一部の学生, 生徒がこの先まで見通し解答にたどりついた．そういう学生, 生徒には資料を読ませるなどの指示を与え, 問題から解放する．残った, まだ問題が解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなヒントを与える.

[ヒント 2-2]　もし 5 人の人が集まったら, その中の誰かさんと誰かさんは必ず同じ AOB 式血液型にならないだろうか？

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　実際の授業, 模擬授業においては, 一部の学生, 生徒がこの時点で, 「鳩の巣原理」が関係していることは理解できたようである. しかし, 今考えている当該問題と「鳩の巣原理」がなかなか結び付かない様子であった.

[ヒント 2-3]　もし, 格子点を 4 つのグループに分けるとしたらどの様に分けられるだろうか？特に, 皆さんが 4 つの格子点で条件を満たさない一マスの 4 つの格子点を参考にして考えてほしい.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　実際の授業, 模擬授業においては, この時点で一部の学生, 生徒がこの先まで見通し解答にたどりついた. そういう学生, 生徒には資料を読ませるなどの指示を与え, 問題から解放する. 残った, まだ問題が解けていない学生, 生徒については, さらに以下のようなヒントを与える.

[ヒント 2-3]　格子点というのは 2 つの整数のペアで決まる. 整数を 2 つのグループに分けるとしたら, 皆さんはすぐに偶数のグループと奇数のグループに分けることを思いつくと思う. そのことから考えると, 格子点を 4 つのグループに分けるとしたら, (x-座標, y-座標)=(偶数, 偶数), (偶数, 奇数), (奇数, 偶数), (奇数, 奇数) と分けられることに気がついたと思う.

この時点での学生, 生徒の理解度のチェック　この時点で, ほとんどの学生, 生徒が理解した. 一部の学生, 生徒がまだなんとなくすっきりせず, 上記のヒントと問題の解決が結びつかないというので, 最後に以下の解説を行い理解してもらった.

最後の段階の解説　先ず, 格子点が 5 つあり格子点のグループが上記の 4 つしかないので, 「鳩の巣原理」から 5 つの格子点のうちの 2 つは上記の 4 グループのうちの同じグループに入る. このとき, どのグループに入ったとしても, 同じグループの 2 点の格子点は偶数足す偶数も, 奇数足す奇数も偶数になるのでその半分は整数になる, つまりその座標を (m_1, m_2), (n_1, n_2) とするとこのとき, 中点の座標 $(\frac{m_1+n_1}{2}, \frac{m_2+n_2}{2})$ は, (m_1, m_2), (n_1, n_2) が同じグループであれば, 整数になる, すなわち格子点になる.

教育効果 2　今回もこの授業のポイントは, こちらが 5 つの格子点を書いてそれについて 2 点を選ぶのではなく, 授業を聞いている学生, 生徒に 5 つの格子点を選ばせて, その中から 2 点を選ばせることに意義がある. 1.1 節の例もそうだが, 教員が選んだ

例で説明すると, 「うまく煙にまかれた」とか, 「特異なケースについてだけうまくいっているのではないか？」という疑念を抱く学生, 生徒が出てくると思われるが, 自分たちが勝手に選んだ5つの点から自分たちが2点を探すという自主的, 能動的な行動を通して, 問題への関心, 理解が深まる. また実際に問題解決に参加している意識が強くなるので, 問題可決への意欲や, 解決出来たときの達成感も強くなると思われる.

3　総括と今後の課題

今回の大学生, 高校生を対象にしたアクティブラーニングによる授業, 模擬授業について, 出席していた学生, 生徒にアンケートをとり, 以下の項目について答えてもらった.

(1) この授業は興味深いものでしたか？
(2) この授業の感想を自由に書いて下さい.
(3) 数学への関心がより強くなりましたか？
(4) 今回の話題の背後にある数学について学習してみたいと思いましたか？
(5) 自由に感想を書いて下さい.

アンケートの集計結果は以下のように概ねポジティブな意見が多かった. 「数式処理による代数学」に出席していた大学3年生を対象とした集計では, 教員志望の学生が多かったこともあり, このテーマで上記で, この授業の進め方であれば, 大変楽しく, またこの問題を何とか解いてみようという積極的な気持ちになり, 能動的な形で授業に集中できた, という回答が多数あった. また問題が解けたり, 解答が理解できたときに達成感があった, という感想を多くの学生が書いてくれた. オープンキャンパスの模擬授業や高校2年生の大学訪問で模擬授業を受けた高校生は, 自分たちが黒板で勝手に描いたグラフや, 格子点から, ヒントを段階的にもらって, 最終的に全員が解けたり, 解答を理解できたのはよかったし, 達成感があった, そしてなにより話題が楽しかったという感想が多かった.

以上のように, ポジティブな評価をしてくれた受講者が多く, アクティブラーニングを意識した授業は, 功を奏したと言えると思う.

最近の学生の傾向として, 自分の頭で先ず考えず, なんでもすぐに検索などして「調べようとする」傾向が見受けられる. 調べることは学習のある段階では必要なことであるが, 先ず問題の意味を理解して, 何をすればいいのかが, 分かったら, 自分の

頭で考える, また周りの学生と議論することが許されていれば, 議論することが重要である. その後で, 自分で調べたり, 教員にヒントをもらうのがよいと考えたので, 授業は, 一切先にキーワードや背後にある数理については, あえて触れず, 最後に, 実はこの話題はこのような分野と関係があるとか, さらに勉強をするとこんなことが分かるということを説明した.

今後の課題としては, グラフや格子点など初等幾何や, それと関連する論理, 初等整数論に関連する話題を扱ったが, いろいろな分野で, このような学生や生徒が, 楽しく, 能動的に学べ, なおかつ達成感が感じられる教材, 授業法を開発していく必要を感じた.

参考文献

[1] Winkler, Peter, *Mathematical puzzles: a connoisseur's collection*, A K Peters, Ltd, Natick, MA, 2004, xii+163, ISBN : 1-56881-201-9.

[2] Winkler, Peter, *Mathematical mind-benders*, A K Peters, Ltd, Wellesley, MA, 2007, x+148, ISBN : 978-1-56881-336-3; 1-56881-336-8,