学生論文

高校生のためのRomberg積分

中　田　　柊

概　要

Romberg積分は定積分の近似を得る手法（数値積分）の一種である。台形公式に対して特定のアルゴリズムを適用することで，定積分の（台形公式と比べてより良い）近似が得られる。

実用的なアルゴリズムである一方，教材としても非常に優秀なものであろうと考えられる。Romberg積分を導入する上で必要な知識のほとんどは高校生の知識を活用するものであり，発展的な内容でも，高校の内容から十分に観察することができる。また，Excelなどを用いることで，計算の様子を動的に察することもできる。

本稿では，Romberg積分の数理的な背景及び実装を高校教員程度の知識を仮定して解説する。本稿の執筆には城西大学紀尾井町キャンパス理学部数学科３年次の配当科目である『情報研究Ⅰ』でのレポートを参考にしている。また，紙面の都合上，証明や例・誤差評価を含め多くのことを省いているので，詳細に関しては城西大学の教育支援システム『WebClass(https://webclass.josai.ac.jp)』のゲスト用資料を参照していただきたい（公開されたが，私事につき，提出当初のレポートを掲載）。なお，Excelによる実装は城西大学理学部数学科３年の佐藤泰広氏の結果を参考にした。

キーワード：教材作成，高校生向け

１．近似を行うモチベーション

高校の数学では様々な関数の不定積分（原始関数）の公式があり，また，部分積分や置換積分を用いると，高校における定積分を求めるという問は，関数の形を工夫して，既知の関数の定積分を求めるという問題に帰着させることが多い。しかし，$\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx, \int e^{x^2}dx$などの不定積分は初等関数[1]で書けないことが知られている。更に，仮に求められても，その値が複雑な値になってしまうということも考えられる。コンピュータがそもそも有限の値しか扱えないので，その結果が実用的かどうかはまた別の問題である。

ある近似の加速法を考えることは，例えば，教科書の巻末にあるような，「正規分布表」や「sin xの値一覧」などを作る上でも非常に重要である。多くの値の近似を計算するのに，効率の悪いアルゴリズムをいちいち使っていては，計算領域や記憶容量の圧迫を招く可能性がある。従って，加速法は結果的にコンピュータの負荷を軽減させる効果をもたらす。

この通り，近似は有限なものしか扱えないコンピュータを数値計算として実用的に動かすためには必ず考えなくてはいけないことの一つであると言える。

２．Romberg積分の準備

Romberg積分を行う上では，最低限次のことを知らなければ触れることは難しい：

１．台形公式
２．Taylor展開
３．補間・補外
　（a）Lagrangeの補間
　（b）Richardsonの補外
４．Nevilleのアルゴリズム

また，誤差の評価という観点では，**Bernoulli数**，**Bernoulli多項式**と**Euler-Maclaurinの公式**を知っておく必要がある。本稿においては，主に活用するという観点で論ずるので，このことは割愛する。詳しくは概要に述べたサイトを参照していただきたい。

２．１　台形公式

区間［a，b］上ほとんど至る所で区分的に連続な関数[(2)] $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，グラフと x 軸によって切り取られる部分の**符号付き面積**であると解釈される。実際にこれは**区分求積法**という方法によって，あるいはもっと一般的に**Riemann和**から，むしろ本質であることがわかる。すなわち，(定)積分を近似しようという試みは，面積を近似しようという言葉に変えることができる。

面積という概念は高校までで厳密に定義されないが，ここで我々は長方形と台形の面積を求める公式は知っていると仮定しよう。このもとで，縦長の長方形のみを用いて積分を評価するのは区分求積法などの考えるところである。一方，これは非常に大雑把な評価である。なぜなら，対象となる被積分関数のグラフは一般に直線ではなく曲線[(3)] なので，それを「x軸に平行な線で構成されたものだけで表現しなさい」と言われると，余分な部分・足りない部分が多く出てきてしまう。そこで，台形を用いて面積を近似することを考える。

いま，区間［a，b］上で定義された連続関数 $f(x)$ で，簡単のために区間上任意の点で正となり，単調増加であるものを考える。まず，一つの辺が $b-a$ となる一つの長方形を使って面積を近似する。この時，$f(x)$ は［a，b］上で定義された単調増加の連続関数なので，面積の真の値 S は

$$(b-a)f(a) \leq S \leq (b-a)f(b)$$

と評価できる。この時，$f(x)$ が x の増加に伴って急激に増えていくようであれば，不等式の範囲は明らかに大きくなっていく。不等式の範囲は，いわば誤差の範囲であるが，これが増える一つの原因は，長方形による近似が区間の端点の情報と，$f(x)$ の一点の情報のみしか与えられていないことに起因する[(4)]。一方で，台形を一つだけ使って次のように近似することを考える：

$$S \approx (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

二つの近似を考えると，この違いは図形の上側にある。長方形は単なる x 軸に平行な直線であるのに対し，台形では，傾きがついていても許される。従って，区間［a，b］をいくつかの点で区切って，さらに細かく近似を求めても，台形公式の方がいくらか真の値に近い値となるのである。

台形公式の一つの応用として，円周率 π が3.05以上であることを示そう。いま，半径が１で中心が（０，０）であるような円の方程式 $x^2+y^2=1$ から，x，$y \geq 0$ となる部分をとり，この面積を評価する。ここで行うのは，x，y が共に有理数となる点をいくつかとって，それに対して隣り合った点同士に対して台形公式を用いるということだ。ここで，扇形の内部が凸性を有することから台形公式による面積が常に真値を下回ることは既知としておく。まず，円上の有理点として，

$$(x,y)=(0,1),\left(\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right),\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right),\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right),\left(\frac{24}{25},\frac{7}{25}\right),(1,0)$$

を取る。このとき，計算が大変なので，Excelに計算を任せると(5)，次のような評価式を得る。

$$\frac{\pi}{4}>0.77692308\cdots$$

両辺を４倍すると，

$$\pi>3.10769231\cdots>3.05$$

となる(6)。

２．２　Taylor展開

そもそも**級数展開**とは，関数を多項式の級数で表現してやろうということである。展開というと，次のようなこと

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

を思い浮かべる。これもやっていることは，上で述べた動機とほとんど変わらない。では，次に，$-1<x<1\ (\Leftrightarrow |x|<1)$という条件のもとで，$\frac{1}{1-x}$を『展開』しよう。まず，等比級数の有限和を考えると，

$$\sum_{n=0}^{N}x^n=\frac{1-x^N}{1-x}$$

となるので，$|x|<1$の仮定のもとで，$N\to\infty$とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

を得る。このことを，関数$\frac{1}{1-x}$は$|x|<1$の制約のもとで，多項式に展開できたという(7)。

級数展開のうち，**Taylor展開**はその中でも有名なものの一つである。これに対して，これを支える定理に**Taylorの定理**というものがあるが，これも割愛する。ここでは，Taylor展開のみを特別に扱う。

Taylor展開とは，定理のステートメントに沿って言えば，ある特別なクラスの関数(8)がある級数展開を持つことを主張していて，その明示的な公式を与えるものである。すなわち，そのようなクラスの関数$f(x)$について，$f(x)$をn回微分した『導関数』を$f^{(n)}(x)$と書く。このとき，$x=0$を中心としたTaylor展開とは，ある正数rが存在して，$|x|<r$であるとき，そのような任意のxに対して$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$というように級数表示できることをいう。項数を有限で打ち切ると近似が得られるという事実は［２］およびサイトに掲載したPDFなどを参照されたい。

２．３　補間と補外

２．３．１　基本的なアイデア

中学校の数学や，小学校の算数では，点を通る曲線（直線・折線を含む）のグラフを描くことがある。補間はまさにそれである。理科などで，得られた点の範囲外までグラフを伸ばすことがあるが，これは補外のアイデアである。

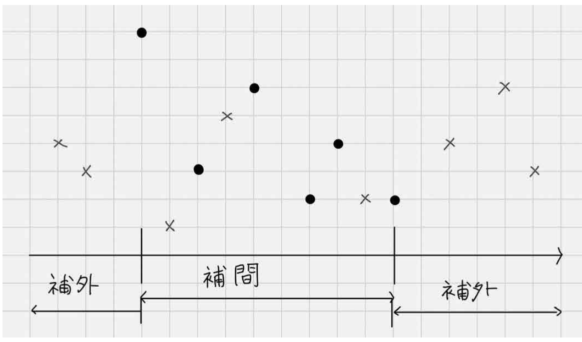


図１　補間と補外のイメージ。丸点が元々の点で，バツ印が補間・補外で得られた点であるとしている。

補間や補外で誤解してはいけないことは，別に点を通りさえすれば，それがいかにもっともらしくなくとも良いということである(9)。点さえ通ればいいので，次のようなものも認められる。それぞれ，強調されている点を通るようなグラフである。

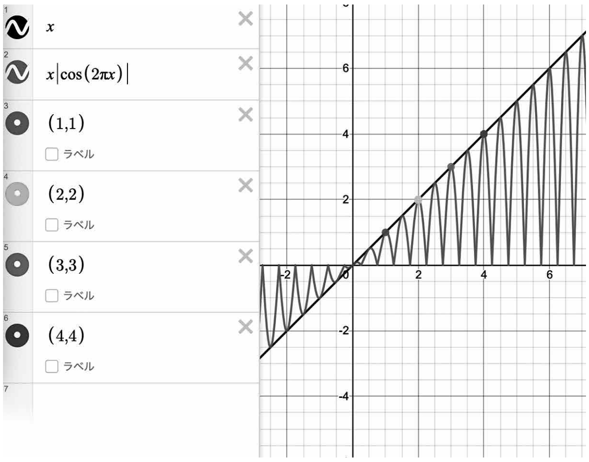


図２　指定の４点を通る２つの補間。

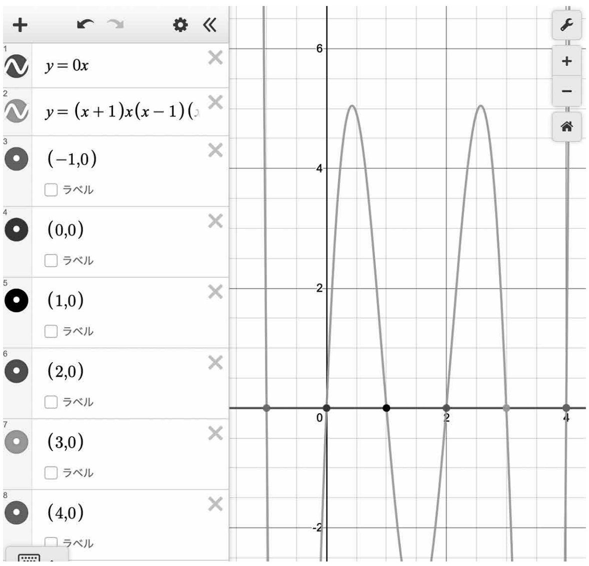


図３　指定の５点を通る２つの補間。一つは$y=0$で，一つは$y=(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$である。

２．３．２　Lagrange補間

補間をするとはいえ，何の手法も仮定しないのではどうしようもない。ここでは，多項式によって補間する方法を考える。すなわち，$xy-$平面上の$n+1$個のデータ点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$が与えられたとき，全ての点が$y=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$という関係式を満たすように定数$a_n, \cdots, a_1, a_0$を決定する。このとき，$y=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$を**補間多項式**と呼ぶ。$i \neq j$ならば，$x_i \neq x_j$というように制約をしておくと，$n$次以下の補間多項式はただ一つに定まる。これに関していうと，まず，存在性について述べておく。これは，高校生向けには$n=2, 3$の時に検証するのが良い。これが検証できると，一般のnの場合でも同様の手順で示すことができることがわかる。もっと簡潔な議論としては，Vandermondeの行列式が上の制約のもとで０にならないことから，存在することがわかる（もっというと，これは一次連立方程式が唯一の解を持つということから，n次以下の補間多項式は一意に存在することがわかる。しかし，高校生向けではない）。また，もう少し強い定理の証明に対して因数定理を用いることで，n次以下の多項式がただ一つに限られることもわかる。

Lagrange補間とは，その補間多項式を求めるアルゴリズムである。まず，$n+1$点を上の状況と同様に取る。この時，**基底多項式**と呼ばれる$n+1$個の多項式$p_m(x), m=0, 1, \cdots, n$を

$$p_m(x) = \prod_{\substack{i \neq m \\ 0 \leq i \leq n}} \frac{x - x_i}{x_m - x_i} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots} \frac{\cdots(x-x_n)}{\cdots(x_m-x_n)}$$

として定める。このとき，$p_m(x)$は次の性質を持つ：

$$p_m(x_j) = \begin{cases} 1 & m = j \\ 0 & m \neq j \end{cases}$$

次に，$L(x)$という多項式関数を，ある未知数$a_0, a_1, \cdots, a_n$を用いて，次のように定義する：

$$L(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m p_m(x)$$

このとき，先程述べた性質から，任意の$j=0, 1, \cdots, n$に対して，$L(x_j)=a_j$と書ける。従って，任意のjについて，$a_j=y_j$と定めると，これが補間多項式になる。このようにして求めるアルゴリズムを

Lagrange補間と言うのである。また，基底多項式の定め方からもわかるように，この補間では，n次以下の多項式しか現れない。

２．３．３　Richardsonの補外

級数展開が可能な$f(x)$が$x\to 0$で極限値を持つとは，級数展開$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$において，$f(0)=a_0$が成り立つことをいう。Richardsonの補外は，実際に$x=0$での極限が存在するような関数$f(x)$で，特に級数展開$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$を持つとき，$a_0$を近似的に求めるアルゴリズムの一つが**Richardsonの補外**である。ここで，知られている関数$f(x)$と，$0<\lambda<1$によってパラメタ付けされた関数$f(\lambda, x)$から，次のように極限値の近似値$\bar{f}_1^{(1)}$を求める；

$$\bar{f}_1^{(1)}=\frac{f(\lambda x)-\lambda^{p_1} f(x)}{1-\lambda^{p_1}}$$

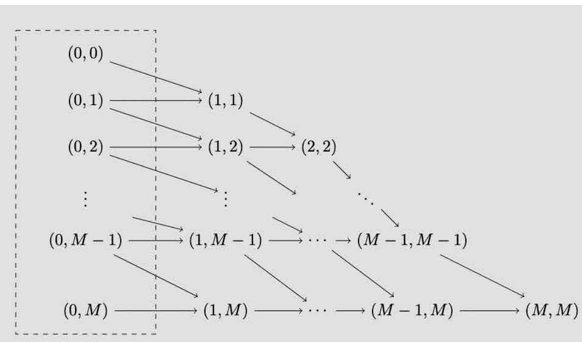
ここで，p_iとは，級数展開

$$f(x)=a_0+\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{p_i}$$

の指数p_iのことを示す。ところで，$f(\lambda^2),\ldots,f(\lambda^M)$が求まれば，$i=1,2,\ldots,M$，$j=1,2,\ldots,i$について次の漸化式；

$$\bar{f}_i^{(0)}=f(\lambda^i x), \bar{f}_i^{(j)}=\frac{\bar{f}_i^{(j-1)}-\lambda^{p_j}\bar{f}_{i-1}^{(j-1)}}{1-\lambda^{p_j}}$$

から順次値を求めて，より精度の高い近似値$\bar{f}_M^{(M)}$を求めることができる。上でのi，jについて，簡単のために$\bar{f}_i^{(j)}$を(i, j)とかくと，次のような図式になる。



「逐次的に求めることができる」というのは，点線内部が既に与えられているためである。

２．４　Nevilleのアルゴリズム

NevilleのアルゴリズムはLagrange補間多項式を求めるアルゴリズムの一つである。補間多項式を求めること自体は先述のように，基底多項式を求めて，その線型結合の係数さえ調べ上げて整理すれば良いのだが，もはや基底多項式を求めることなく求めてやろうというのである。

まず，Lagrangeの方法と同じように，点(x_i, y_i)；$i=0,1,2,\ldots,n$を与え，互いに異なるi，jに関して$x_i\neq x_j$と約束しておく。この時，次の方法によって$P_{i,j}$を定める：

$$P_{i,0}=y_i$$

$$P_{i,j}=\frac{(x-x_{i-j})P_{i,j-1}-(x-x_i)P_{i-1,j-1}}{x_i-x_{i-j}}$$

この時，i，$j=n$，つまり，$P_{n,n}$が与えられた点におけるLagrange補間多項式と一致するのである。

３．Romberg積分

３．１　Romberg積分のアルゴリズム

Romberg積分のアルゴリズム自体は簡単で，Nevilleのアルゴリズムしか使わない。これを箇条書き表示する。

1．いくつかの幅を与える。

$$h_0=c>0$$

$$h_1=\frac{h_0}{N_1}$$

$$\ldots$$

$$h_m=\frac{h_0}{N_m}$$

ここで，N_iは２以上の自然数としておくと良

い。

２．上で求めた幅に対して，台形公式で定積分の近似値を次のように求める。

$$T_{0,\ 0}=T(h_0)$$
$$\cdots$$
$$T_{m,\ 0}=T(h_m)$$

３．Nevilleのアルゴリズムによって，次のように$T_{i,\,k}$を求める。

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left[\frac{h_{i-k}}{h_i}\right]^2 - 1}$$

ここで，$[\cdot]$ は床関数である。すなわち，$[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}; n\leq x\}$ である。

４．佐藤泰広氏による実装

元々の課題では，［３］に描かれた，より具体的なRomberg積分の適用に関して論ずることもテーマとして上がっていた。本学の理学部数学科所属の３年生佐藤泰広氏はそのテーマに沿ってレポートを執筆された。彼はExcelによる数値計算を行なったので，その紹介をもって，高校生向けの実装の紹介とする。

近似を求めたい定積分は$\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$である。ここで，この真値をSとおく。この真値は積分の公式を用いて，$\log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2} \approx 0.40546511$と計算できる。ここで，log・は底が$e$であることに注意(10)。また，精度に関しては適宜変更すれば良い。

さて，$f(x)=\frac{1}{x+1}$とおくと，$\int_1^2 f(x)dx$は次のようなn等分の台形公式による近似

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\left(\frac{f(1)+f(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

が得られる。右辺をS_nとおく。nとして，$n=1$，２，４，８, 16, 32, 64, 128で上の式を適用して，Excelで計算する。その表は次のようになる。

n	Sn	Sn-S(誤差)
1	0.416666666666667	1.E-02
2	0.408333333333333	3.E-03
4	0.406186868686869	7.E-04
8	0.405645851191180	2.E-04
16	0.405510312960932	5.E-05
32	0.405476410516339	1.E-05
64	0.405467933784932	3.E-06
128	0.405465814532027	7.E-07

(11) S_nの計算には，各セルに対して次のような関数を用いている。例えば，$n=32$なら，＝((２－１)/E10)＊((１/２＋１/３)＊１/２＋SUM(１/((B３：B33＊(１/E10)＋１)＋１)))
というように設計されている。このとき，B列には１から128までの整数が格納されていて，nやkの役割を果たしている。また，E列には，それぞれnの値が格納されている（提示した表中のnの列がそれに該当する)。このように，上で求めたS_nを用いてRomberg積分を適用すると，その値は0.405465108108164となった。Excelのセル計算による誤差評価では，誤差はないとされた(12)。

５．まとめ・本教材の課題点

本教材は次の視点から，中学生・高校生，あるいは大学１年生に対して数学の応用・発展的な内容を体験してもらおうという意図を持っている：

1．（中学生に対して）既知の面積公式（具体的には台形公式）を用いるとことで，x^2とx軸と$x=1$が切り取る面積を求めるなどの，積分の考えを体験する。
2．（高校生に対して）既知の積分の公式では太刀打ちできない積分の問題があることを学ぶ。
3．（高校生・大学１年生に対して）応用の分野において，その根幹を成しているのが，自分たちが今学んでいる数学そのものであるということを学ぶ。

一方，本論文で掲載したのは紙面の都合で省

いた箇所が非常に多く，Romberg積分の誤差評価なども本来であれば行うべきことである。WebClassで掲載した資料は紙面の制約がないので多くのことを記載したが，これを授業で扱うのは時間という制約のもとで可能であろうかという疑問が残る。また，高階の微分だけでなく，例えば$\sin x$の微分というと，高校２年生はふつうできないものなので，３年生の中盤まで待つ必要がある。もっと言えば，自然対数は存在そのものが高校２年生はわからないかもしれない。すると，まるまる誤差評価の話を抜いてしまう必要が残る。そればかりか，高校３年生の，もはや受験という時期に，どれだけの学生がここに時間と余裕を割こうと考えるかも怪しくなる。従って，本教材は近似の体験をするということに限定すれば中学生でも使えるものかもしれないが，半分以上の内容を楽しもうと思うと，高校３年生程度の知識はやはり必要になってくる。

さらにコンパクトにできるか・高校２年生に対しても誤差評価の話がわかるようなものにできるかということが本教材の今後の課題である。また，今後似たような教材を作成する際にはある程度内容の軽さは考慮されるべきであろう。

謝辞

清水史也先生には，多くの助言を頂きました。本紀要への投稿を推薦してくださったために論文を書くに至りましたし，改めて教材として元のレポートを見直し，Romberg積分の持つ教材としての力に気がつくことができました。また，私が確認にと拙い論文の草稿を先生にお渡しした際にも，執筆方針を変えたいとお願いをしたときにも，快く相談に乗っていただき，惜しみないご助力をくださいました。このようなご協力なしにこの論文は書き得ませんでした。改めてここに感謝の意を表します。

また，データの提供をしてくださった佐藤泰広氏に感謝いたします。氏のデータは非常によく纏まっていました。特に根底を成す台形公式の計算手法はRomberg積分を教材として扱うのに非常に重要なアイデアであり，大変助かりました。

注

（１）多項式関数（もっと一般に有理関数），指数関数，対数関数，三角関数という意味。

（２）発散する点がなく，不連続な点が有限個に限られる関数を意味する。

（３）数学では一般に連続な線を曲線と呼ぶ。

（４）その中でも，最も面積が小さく・大きくなるものをとっているので，上の評価を得たに過ぎない。

（５）ここで，計算はセルによる計算を用いている。

（６）入学試験にこのような問題が出てきても，上のように腕力で解くのはもちろんお勧めしない。これはあくまで「このような手法でもできる」ということを提示したに過ぎない。

（７）ただし，あくまで級数なので，実際の多項式とは差異があることに注意。ここでは，x^n；$n \in \mathbb{N}$の線型結合で書けるという程度の共通点でもって「多項式に展開できた」といった。

（８）実解析関数などともいう。これに関しては，［１］の154ページの定理６．２．８などを参照されたい。

（９）中には，「点を表現しうるそれらしいグラフを描こう」という，回帰というものが存在する。しかし，これは，それらしいグラフを描かなくてはならないという動機なのに対して，補間はそういうことはない。

（10）書籍やアプリケーションソフトによってはlog・は常用対数を表していることがある。その場合，自然対数はln・となる。

（11）なお，元々は真値として0.40546511を適用していたが，ln関数が用意されていたので，こちらに切り替えた。

（12）おそらくは精度の問題だと思うが，ここまでくるとほとんど変わりないとみなせる。ちなみに，Casio社の計算サイト『生活や実務に役立つ計算サイト（https://keisan.casio.jp/exec/system/1260332465）』を用いて計算したところ，真値である$\log\frac{3}{2}$は大体0.405465108108164382程度であり，少なくとも10^{-15}程度までは正しいことがわかった。

参考文献

［１］三宅敏恒（1992）『入門微分積分』培風館

［２］大島利雄『実解析（Fourier級数）』（https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/lecture/fourier.pdf）（2021年９月24日）

［３］趙　華安（2000）『Excelによる数値計算法』共立出版