

感染症モデルのコンピュータ実習

- 数式処理ソフト Maple によるシミュレーション -

Computer exercises on a mathematical model of infectious diseases -Simulation with computer algebra software Maple-

中村 俊子*

NAKAMURA, Toshiko*

概要：理学部数学科の2年次専門選択科目「数式処理による解析」の中で、SIRモデルの解説と数式処理ソフト Maple を用いたシミュレーションを行ったので紹介する。SIRモデルは感染症の流行を記述する連立微分方程式で、SIRモデルおよびこれを基本とする数理モデルが新型コロナウイルス感染症の流行分析や予測においても用いられている。

1. はじめに

城西大学理学部数学科では、2年次配当の専門選択科目「数式処理による解析」において、解析学に関連したさまざまなトピックスについて数式処理ソフト Maple を用いたコンピュータ実習を行っている。2020年度より、感染症モデルの数理解析およびシミュレーションの例として、SIRモデルを教材に組み入れているので紹介する。

SIRモデルは、1927年に英国のケルマックとマッケンドリックにより定式化された感染症の流行を記述する連立微分方程式で、1900年代のペストの流行における感染曲線を再現することがよく知られている。新型コロナウイルス感染症の数理解析としても後述のようにSIRモデルおよびこれを基本とした数理モデルが用いられている。

授業では、SIRモデルの導出や解の数学的性質について説明するとともに、モデル方程式に含まれるパラメータを実データに基づいて選びシミュレーションを行った。特に、実習や課題では、感染伝達係数がワクチン接種や各種措置により抑えられた場合や治療薬の開発等により回復率が向上した場合のシミュレーションを行い、これらのパラメータの変化がモデル方程式の解の時間的ふるまいに与える効果を考察した。

* 城西大学理学部数学科

2. 教材とコンピュータ実習

感染症モデル (SIR モデル)

1927 年に英国のケルマックとマッケンドリックにより定式化された SIR モデルを用いて、感染症の流行をシミュレーションしてみましょう。最もよく知られた SIR モデルは次の連立微分方程式です。

$$(*) \quad \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$

ここで、 $S(t)$ は時刻 t における感受性人口サイズ、 $I(t)$ は感染人口サイズ、 $R(t)$ は感染から回復した、あるいは感染により隔離された人口サイズを表し、集団を感染のステージにより 3 つ (Susceptible - Infectious - Recovered/Removed) に分けています。また、 β は感染伝達係数、 γ は回復率です。

連立方程式 (*) の各辺を足すと、

$$\{S(t) + I(t) + R(t)\}' = 0$$

となり、「 $S(t) + I(t) + R(t) \equiv \text{一定}$ 」であることが分かります。

$\beta = 0.0024$, $\gamma = 0.07$ の場合に初期条件 $S(0) = 99.51$, $I(0) = 0.10$, $R(0) = 0.39$ の下でシミュレーションを行ってみましょう。

```
> with(plots):
> b:=0.0024
> c:=0.07
> dsolve({diff(s(t),t)=-b*s(t)*i(t),diff(i(t),t)=b*s(t)*i(t)-c*i(t),
diff(r(t),t)=c*i(t),s(0)=99.51,i(0)=0.10,r(0)=0.39})
(SIR モデル (*) を解く)
> dsolve({diff(s(t),t)=-b*s(t)*i(t),diff(i(t),t)=b*s(t)*i(t)-c*i(t),
diff(r(t),t)=c*i(t),s(0)=99.51,i(0)=0.10,r(0)=0.39}, numeric)
(SIR モデル (*) を数値的に解く)
> odeplot(%,[t,s(t)],[t,i(t)],[t,r(t)]),t=0..300,legend=[未感染者,
感染者,回復者])
```

[Maple ワークシート]

```
[> with(plots):
> b := 0.0024
b := 0.0024 (1)
> c := 0.07
c := 0.07 (2)
```

> dsolve({diff(s(t),t)=-b*s(t)*i(t), diff(i(t),t)=b*s(t)*i(t)-c*i(t), diff(r(t),t)=c
*i(t), s(0)=99.51, i(0)=0.10, r(0)=0.39})

$$\left\{ \begin{aligned}
 i(t) = & \text{RootOf} \left(\int_{-a}^{-Z} 100 \, / \left(\int_{-f} \left(\text{LambertW} \left(-Z2 \sim, \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\text{RootOf} \left(8750 \text{LambertW} \left(-Z2 \sim, -\frac{Z e^{\frac{3}{875}}}{7 e} \right) + 29853 \right) e^{\frac{6 f}{175}} e^{-1}}{7} \right) + 1 \right) \right) \, d_{-f} \\
 & + 7 t + \int_{-a}^{\frac{1}{10}} -100 \, / \left(\int_{-f} \left(\text{LambertW} \left(-Z2 \sim, \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\text{RootOf} \left(8750 \text{LambertW} \left(-Z2 \sim, -\frac{Z e^{\frac{3}{875}}}{7 e} \right) + 29853 \right) e^{\frac{6 f}{175}} e^{-1}}{7 e} \right) + 1 \right) \right) \, d_{-f} \right) \, r(t) = \\
 & \int_0^t \frac{1}{100} \left(7 \text{RootOf} \left(\int_{-a}^{-Z} 100 \, / \left(\int_{-f} \left(\text{LambertW} \left(-Z2 \sim, \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\text{RootOf} \left(8750 \text{LambertW} \left(-Z2 \sim, -\frac{Z e^{\frac{3}{875}}}{7 e} \right) + 29853 \right) e^{\frac{6 f}{175}} e^{-1}}{7} \right) + 1 \right) \right) \, d_{-f} \right. \\
 & \left. + 7 \, _z l + \int_{-a}^{\frac{1}{10}} -100 \, / \left(\int_{-f} \left(\text{LambertW} \left(-Z2 \sim, \right. \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$-\frac{RootOf\left(8750\text{ LambertW}\left(-\frac{Z2\sim}{7e}, -\frac{Ze^{\frac{3}{875}}}{7e}\right)+29853\right)e^{\frac{6f}{175}}}{7e}+1\right)\text{d}_f\left)\text{d}_{zI}\right)$$

$$+\frac{39}{100}, s(t) = -\frac{1}{6} \left(175 \operatorname{LambertW} \left(-\frac{22}{3} \right) \right)$$

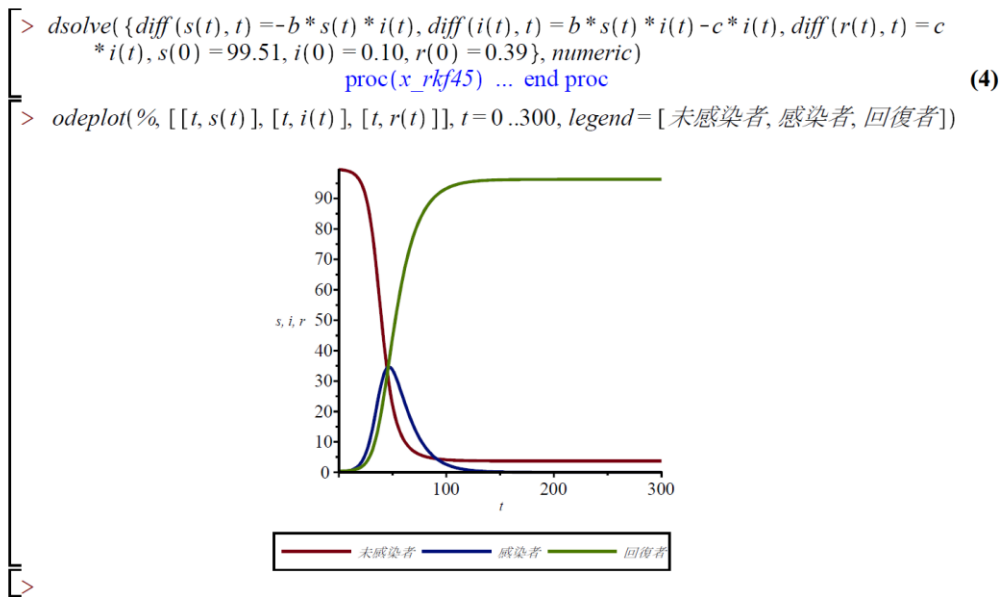
$$-\frac{1}{7} \left(\text{RootOf} \left(8750 \text{ LambertW} \left(-Z2^{\sim}, -\frac{Z \text{e}^{\frac{3}{875}}}{7 \text{e}} \right) \right) + 29853 \right)$$

$$e^{\frac{1}{175}} \left(6 \operatorname{RootOf} \left(\right) \right)$$

$$-a \left[\frac{f \left(\text{LambertW}_{-Z2} - \frac{\text{RootOf} \left(8750 \text{LambertW}_{-Z2} - \frac{Ze^{\frac{3}{7}}}{7e} \right) + 29853 \right) e^{\frac{6}{175}} e^{-1}}{100} \right] d f + 7 r$$

$$\left. \begin{aligned} & + \left[\frac{1}{10} \right. \\ & \left. - \frac{100}{f \left(\text{LambertW}_{_Z2}, - \frac{\text{RootOf} \left(8750 \text{LambertW}_{_Z2}, - \frac{\frac{3}{7e^{875}}}{7e} \right) + 29853}{7e} \right) \frac{6f}{175}} \right] \text{d}f \end{aligned} \right) \Bigg] \Bigg)$$

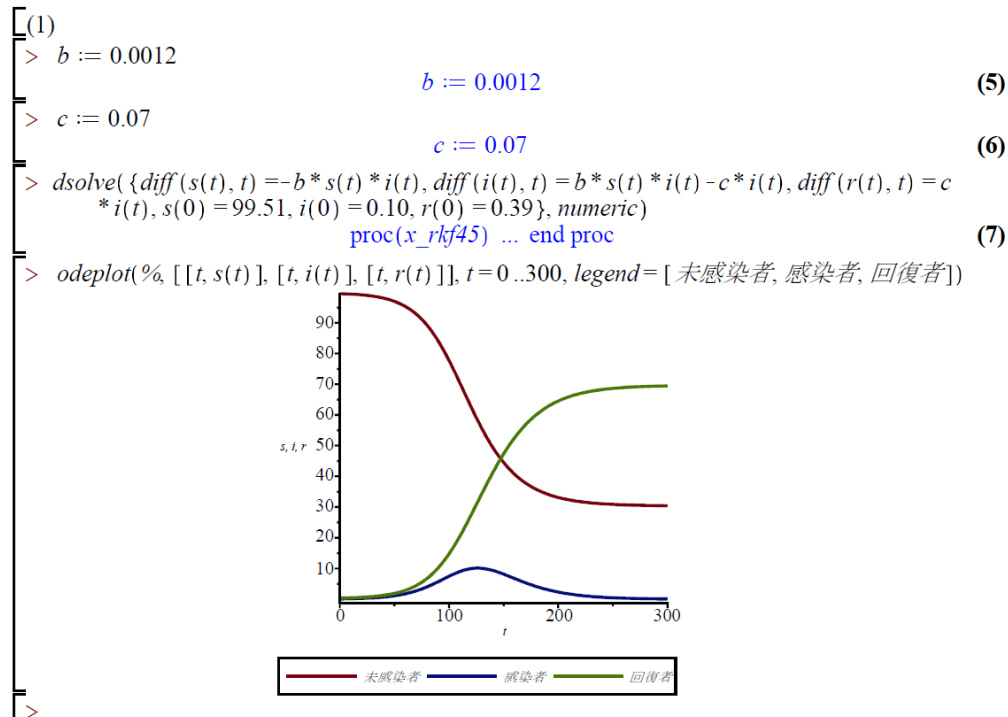
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ e^{-1} \\ \\ \end{array} \right\}$$

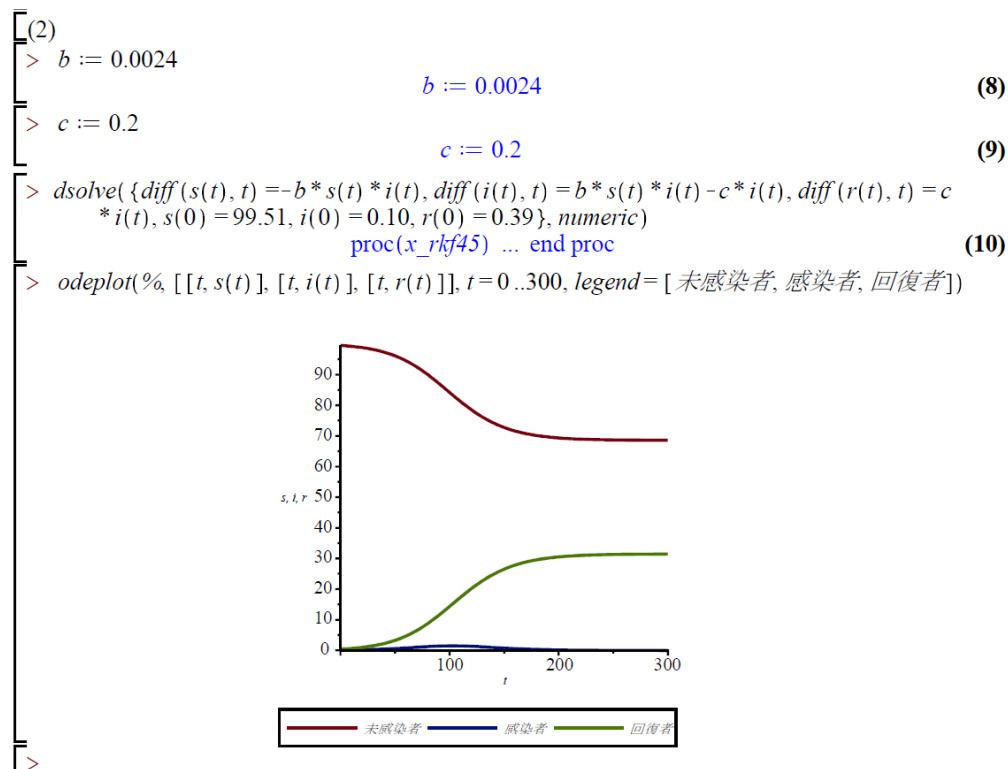


実習 1 上の例題において, 次の場合のシミュレーションを実施せよ.

- (1) 感染伝達係数 b を 0.0024 から 0.0012 に変更 (ワクチンの効果)
- (2) 回復率 c を 0.07 から 0.2 に変更 (治療薬の開発)

[正解例]





注意 COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) の感染の広がりの予測では, 感染直後の感染性のない潜伏期間を考慮した SEIR モデルも用いられています. 最近公開された Google の予測では, SEIR モデルを基本モデルに採用して, 各係数 (パラメータ) の変動を過去データから機械学習によって生成することにより, 今後 28 日間の流行動向予測を行っています (<https://storage.googleapis.com/covid-external/COVID-19ForecastWhitePaper.pdf> (2022 年 1 月 31 日時点)).

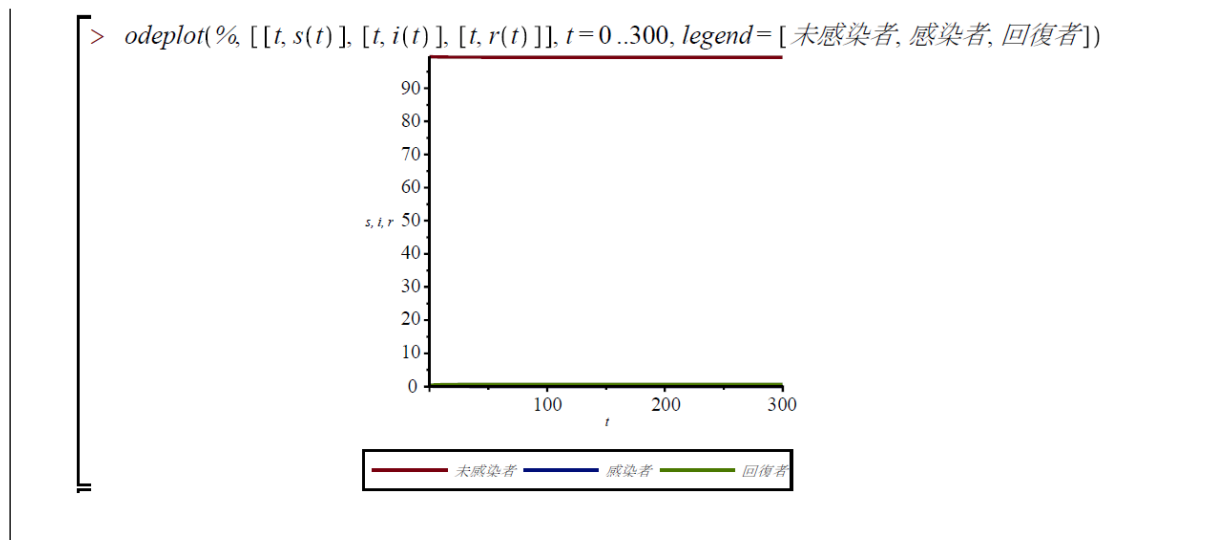
課題 例題において, 感染伝達係数 b を 0.0024 から 0.0012 に, かつ, 回復率 c を 0.07 から 0.2 に変更した場合のシミュレーションを実施せよ.

[正解例]

```

> b := 0.0012
b := 0.0012 (11)
> c := 0.2
c := 0.2 (12)
> dsolve( {diff(s(t), t) = -b * s(t) * i(t), diff(i(t), t) = b * s(t) * i(t) - c * i(t), diff(r(t), t) = c
* i(t), s(0) = 99.51, i(0) = 0.10, r(0) = 0.39}, numeric)
proc(x_rkf45) ... end proc (13)

```



3. まとめ

授業では、SIR モデルの紹介とともに、モデル方程式に含まれるパラメータの感染伝達係数が半分に抑えられた場合や回復率が 0.07 から 0.2 に向上した場合等のシミュレーションを行った。前者は、ワクチン接種により集団免疫力をある程度獲得できたとした場合の効果の他、例えば、外出を 7 割に減らす行動規制等をとった場合に未感染者と無症状感染者の外出回数がそれぞれ 7 割に減るため両者の接触する確率がその 2 乗の $0.7^2=0.49$ (約 5 割) となる効果を考察する助けとなる。また、後者は、感染者が回復するのに例えば平均 14 日間かかっていた (回復率は $1/14 \approx 0.07$) のが、治療薬等の開発により 5 日間で済む (回復率は $1/5=0.2$) ようになる場合を想定したものである。シミュレーション結果から、感染者数を抑えることや感染のピークを遅らせることができることが読み取れる。

参考文献

1. H. Inaba, Japan J. Indust. Appl. Math., 18 (2), 273-292, (2001)
2. 稲葉寿, 数理科学, 538, 1-7, (2008)
3. W. O. Kermack and A. G. McKendrick, Proceedings of the Royal Society, 115A, 700-721, (1927) [reprinted in Bulletin of Mathematical Biology, 53(1/2), 33-55, (1991)]
4. 鈴木絢子, 西浦博, 日本内科学会雑誌, 109 (11), 2276-2280, (2020)
5. H. R. Thieme, Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, Princeton and Oxford, (2003)