

令和 4 年 6 月 27 日現在

機関番号：32403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K17588

研究課題名(和文) 周期積分の圏化と安定性条件の空間上のフロベニウス構造の研究

研究課題名(英文) Study of a categorification of period integrals and Frobenius structures on the spaces of stability conditions

研究代表者

池田 暁志 (IKEDA, Akishi)

城西大学・理学部・准教授

研究者番号：40755162

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：安定性条件の空間とは、超弦理論に現れるD-ブレーンの安定性を決定するためのパラメーター(中心電荷)の空間であり、数学者のBridgelandにより導入された。一方、周期積分とは、図形の中にある穴の長さや角度を積分により測ったものである。本研究では、この一見異なる「中心電荷」と「周期積分」の間に、考える図形を曲面とした場合を考えて対応関係を見出すことに成功した。また、この対応関係が、考えている曲面に懸垂と呼ばれる操作を実行してより高い次元の図形を構成した場合に、どのように拡張されるかを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の主題であるD-ブレーンの安定性条件を決定するパラメーター(中心電荷)と周期積分は、安定性条件が発見された約20年前から研究者の間で何かしらの対応関係があることが期待されていたものの、明確に対応関係が定式化され、証明されることは近年までなかった。本研究では、この対応関係を明確化し、曲面に関連する場合は先行研究を含む形で統一的に説明する枠組みを作ることができた。この結果、超弦理論に現れる数理論の解明に貢献をすることが出来たと言える。

研究成果の概要(英文)：The space of stability conditions, introduced by Bridgeland, is the space of parameters (called the central charges) which characterize the stability conditions of D-branes in string theory. On the other hand, the period integral measures lengths and angles of holes in a geometric object. In this research, we investigate the correspondence between central charges and period integrals when the geometric objects are surfaces. We also found how to extend this correspondence if we consider higher dimensional geometric objects obtained by suspending surfaces.

研究分野：幾何学

キーワード：安定性条件の空間 Calabi-Yau代数 Frobenius多様体

1. 研究開始当初の背景

三角圏の安定性条件とは、超弦理論にあらわれる D-ブレーンの安定性を記述するため考えられたものであり、Bridgeland により 2002 年に数学的な定式化が成された。この安定性条件を集めることで出来る安定性条件の空間は、中心電荷と呼ばれる正則な局所座標を持つ複素多様体の構造が入ることが知られている。しかしながら、近年までその空間の大域的な構造は一部の例を除いてほとんど知られていなかった。近年、Bridgeland-Smith による、曲面に付随する Calabi-Yau 三角圏の安定性条件の空間とリーマン面の二次微分の空間を同一視する仕事を契機として、安定性条件の中心電荷と周期積分の関係性や安定性条件の空間の大域的構造の研究が活発化しつつあった。また、これを契機として、以前から安定性条件の空間上には Frobenius 構造と呼ばれる幾何学的な構造を構成できることが期待されていたが、この点について具体的に研究を進めることが出来る環境が整いつつあった。

2. 研究の目的

三角圏の安定性条件の空間の大域的構造の解明、その空間の局所座標である中心電荷と周期積分の関連性の確率、及びその空間上への Frobenius 構造の構築が研究目的である。ただし、三角圏というだけでは扱うクラスが広すぎるので、具体的に Calabi-Yau 代数上の加群の導来圏というクラスの三角圏に絞って、以下の内容を研究するのが目的である：

- (1) 安定性条件の空間の中心電荷と、複素構造の変形空間の周期写像の間の対応関係を確立する
- (2) 安定性条件の空間の大域的構造を明らかにし、その上に Frobenius 構造を構築する

3. 研究の方法

本研究を実施する方法としては、国内外の関連分野の研究者と議論し、また関連分野の研究集会に参加しつつ、以下の内容の研究を具体的に実施していく予定である：

- (1) Calabi-Yau 三角圏の次元 N を整数から複素数に拡張した構成を行う
- (2) Calabi-Yau 三角圏の次元 N を動かしたときの安定性条件の空間の振る舞いを調べる
- (3) ADE 型の Calabi-Yau 代数について、上記の (1), (2) をより詳細に調べ、安定性条件の空間の大域的構造を記述する
- (4) 曲面に付随した Calabi-Yau 代数について、上記の (1), (2) をより詳細に調べ、安定性条件の空間の大域的構造を記述する

4. 研究成果

様々な研究成果が得られ、内容を論文にまとめ、それらを論文雑誌に投稿し、すでに雑誌に掲載されたものもある。また国内外の研究集会でその成果についての発表を行った。これらの結果について、以下にまとめると：

- (1) 中国の清華大学の教授である Qiu Yu 氏との共同研究の中で、上で挙げた次元 N が複素数であるかのように振る舞う Calabi-Yau 代数の構成に成功し、その内容について共著論文にまとめた。また、その共同研究の中で次元が複素数であるかのような Calabi-Yau 代数の導来圏の上に、 q -安定性条件と呼ばれる新しい概念を導入し、その q -安定性条件の空間が複素多様体となることを示した。この内容についても同じ論文内にまとめた。
- (2) 同じく Qiu Yu 氏との共同研究の中で、曲面に付随する Calabi-Yau 代数の一般的な構成を発見した。これは、gentle 代数と呼ばれるクラスの多元環の Calabi-Yau 完備化であると考えられる。また、このクラスの Calabi-Yau 代数の導来圏の安定性条件の空間の構造を明らかにした。これらの内容について、共著論文にまとめた。
- (3) 同じく Qiu Yu 氏、及び清華大学の助教授である Zhou Yu 氏と共に、上で構成した Calabi-Yau 代数上の加群と曲面上の曲線との間の対応関係を確立した。これは、ホモロジー的ミラー対称性の一種であると考えられる。この内容についても共著論文にまとめた。
- (4) 近年研究され始めた三角圏上の力学系について、安定性条件を用いると圏論的エントロピーの計算が出来ることを証明した。これは、中心電荷の大きさが周期の大きさと対応することを示唆する内容である。この内容については、まとめた論文がすでに数学雑誌から出版済である。
- (5) 大阪大学の高橋氏、白石氏、大谷氏とともに、 l -Kronecker 箆に付随する不変式論を元に

して Frobenius 構造を構成することに成功した。この Frobenius 構造は l -Kronecker 籠上の加群の導来圏の安定性条件の空間に入ると期待されるものである。この内容についても論文にまとめ、論文はすでに雑誌から出版済である。

以上のように、当初の研究目的については多くの部分が遂行でき、また追加で様々な結果も得られ、多くの研究成果が得られることとなった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 IKEDA AKISHI	4. 巻 244
2. 論文標題 MASS GROWTH OF OBJECTS AND CATEGORICAL ENTROPY	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 136 ~ 157
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2020.9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikeda Akishi, Otani Takumi, Shiraishi Yuuki, Takahashi Atsushi	4. 巻 112
2. 論文標題 A Frobenius manifold for l-Kronecker quiver	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-022-01506-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 13件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 Gentle代数の2重次数付きCalabi-Yau完備化と曲面の幾何学
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 q-stability conditions on CY- X categories
3. 学会等名 Stability conditions, Frobenius manifold and Mirror symmetry (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 quadratic differentials and q-stability conditions on CY- X categories
3. 学会等名 Workshop on quadratic differentials and q-stability conditions (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 Bigraded Calabi-Yau completions of topological Fukaya categories and q-stability conditions
3. 学会等名 Interaction Between Algebraic Geometry and QFT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 On classification of simply-laced generalized root systems of type A via marked bordered surfaces
3. 学会等名 Mirror Symmetry and Related Topics, 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 q-安定性条件の空間とq-二次微分の空間について
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 q-stability conditions and C^* -equivariant coherent sheaves on canonical bundles
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 q-stability conditions and q-quadratic differentials
3. 学会等名 Mirror Symmetry for Fano Manifolds and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 \mathbb{Q} -stability conditions and C^* -equivariant quantum cohomology for the local P^1
3. 学会等名 Enhancing representation theory, noncommutative algebra and geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 Spaces of stability conditions on the Calabi-Yau categories associated with quivers
3. 学会等名 Geometry, Representation Theory, and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 安定性条件の空間, 超平面配置, 周期
3. 学会等名 研究会「不変式・超平面配置と平坦構造」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 ADE型楕の安定性条件の空間とCoxeter KZ接続について
3. 学会等名 複素領域における関数方程式とその周辺(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 池田暁志
2. 発表標題 Frobenius structures on Hurwitz spaces and confluent KZ equations
3. 学会等名 Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究会

〔国際研究会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------