様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ４ 月 １６ 日現在

機関番号：３２４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２８４
研究課題名（和文）等長リー変換群作用とコンパクト局所等質リーマン多様体上の幾何構造

研究課題名（英文）Locally homogeneous Kaehler manifolds and Transformation groups

研究代表者
神島　芳宣（Kamishima, Yoshinobu）

城西大学・理学部・特任教授

研究者番号：１０１２５３０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：このプロジェクトでは，大きな対称性をもつリー群Gの可微分作用がX上にあるとき閉非球形リーマン多様体X/Γの幾何構造を調べた.変換群の観点から可縮空間Xへの群作用を調べることによりX/Γを調べた.X/Γはインフラ-可解多様体をファイバーとするSeifert fiberingの構造を持つことを示した.トポロジーの観点からは群Γは群拡大: 1→Δ→Γ→ Q→ 1を持つことがわかり,Seifert fiberingを通して軌道束の繰り返しによるリーマン多様体のインフラ可解タワーが得たられ,この構造定理を使って具体的な多様体(局所等質ケーラー多様体，また局所等質佐々木多様体)を特徴づけた.

研究成果の学術的意義や社会的意義
研究成果の社会への発信は東京という地理的条件もあり大学をあげて努めた.具体的には城西大学紀尾井町キャンパスにおいてコロキュウムを開催,また坂戸(埼玉)キャンパスではオープンユニバーシティでわかりやすく研究成果の一端を社会に還元している.一方で海外には研究集会(サマースクール（Hamburg)を含む）に赴き長期のスパンでの講義・連続講演を提供することで,社会における基盤としての数学の重要性を世界に伝えている.この分野における学術的な意義として,様々な分野への結果に対する,理論的担保と永久の信頼性を与える数学的基盤の構築を行った.

研究成果の概要（英文）：The following were the subjects of my research. I.Structure of Isometry groups with radical,and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry. Classification of infra-solv tower of fiber bundles.
(Isometry groups with radical,and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry.II.Isometric classification of compact locally homogeneous aspherical
Kaehler, Sasaki manifolds. We proved every compact aspherical Riemannian manifold admits a canonical series of orbibundle structures with infra-solv fibers which is called an infra-solv tower. Its length and the geometry of its base measure the degree of continuous symmetry of an aspherical Riemannian manifold. We show that the manifold has large local symmetry if it admits a tower of orbibundle fibrations with locally homogeneous fibers infra-solv tower whose base is a locally homogeneous space. We constructed examples of aspherical manifolds with large local symmetry, which do not support any locally homogeneous Riemannian metrics.

研究分野：幾何学とトポロジー

キーワード：幾何構造　群の対称性　非球形多様体　幾何的剛性　可微分剛性　Infra-可解タワー　リー群と等質空間　等長群

１．研究開始当初の背景

今回この研究はコロナウイルス感染症 (Covid-19) の影響により 2 年間の延長期間 2 年を経て最終年度 2023 年となった. 幾何多様体の多くは, それが持つトポロジー的性質により幾何構造, 多様体の構造, 可微分剛性さらにはリー変換群の対称性について特徴づけられることを経験的に知っている. このことに鑑み, 当該年度の研究は連続リー群 G の可微分作用が可縮リーマン多様体 X 上に存在しているとき, 与えられた閉非球形リーマン多様体 X/Γ の幾何構造について過去から現在まで調べた.

２．研究の目的我々の研究も一昨年からは当初の目的を達し, その主結果のさらなる応用という方向で進めていった. 可縮リーマン多様体 X 上に離散群 Γ が等長変換として自由かつ固有不連続に作用するとき, コンパクト非球形リーマン商多様体 X/Γ が得られる. このプロジェクトの研究目的は, 大きな対称性をもつリー群 G の可微分作用が X 上に存在しているときに閉非球形リーマン多様体 X/Γ の幾何構造を調べることであった. 変換群の観点から商空間 X/Γ よりも可縮被覆空間 X への群作用を調べることにより X/Γ を特徴づけた. G の Levi 分解を通して, X/Γ はインフラ可解多様体 R/Δ をファイバーとする Seifert fibering の構造を持つことを示した. Topology の観点から群 Γ は群拡大: $1{\to}\Delta{\to}\Gamma{\to}Q{\to}1$ を持つ. これに付随して, Seifert fibering: $\mathsf{R}{\to}X{\to}W$ ができ,X/Γ と同じ性質を持つ底空間 (一般に orbifold) W/Q が得られるため, 結果として軌道束 (orbi-bundle) の繰り返しによるリーマン多様体のインフラ可解タワーが得られる. すでに過去の報告でも述べたが, この構造定理を使って具体的な多様体の構造を特徴づけた. X/Γ として, 局所等質ケーラー多様体, また局所等質佐々木多様体, 局所共形ケーラー多様体（Vaisman 多様体）などを特徴づけた. $n(>2)$-次元 homotopy torus がインフラ可解タワーにより一点に終わるとき, standard torus に微分同相になる. (対称性の大きな exotic torus は存在しない.) 応用性の高いものとしてコンパクト商を持つ可縮な空間上のコンパクト Lie 群作用の非存在性を示す次の位相的結果を得た.

Theorem 1. 可縮な可微分空間 X 上に離散群 Γ が可微分 *properly discontinuously* (固有不連続) に作用し, X/Γ はコンパクトとする. 与えられたコンパクト群 K が X に可微分かつ忠実に作用しているとき, もし Γ の作用が K の作用を正規化（*normalize*）するならば, $K=\{1\}$ （自明）である.

この定理の証明は非輪状複体に作用している群の cohomology 論に基づく. また Smith の定理も利用する. この系として, 次が得られる.

Corollary 1. X/Γ はコンパクトであるような可縮な *Riemann* 多様体を X とするとき, 等長群 $\mathrm{Iso}(X)$ は非自明なコンパクト正規部分群を持たない.

４．研究成果

Let X be a contractible Riemannian manifold, and suppose there exists a discrete group Γ of isometries of X such that the quotient space X/Γ is compact. Then X is said to be *divisible*. If in addition Γ is torsion-free, the quotient space is a compact aspherical manifold. Let $\mathrm{Iso}(X)$ denote the group of isometries of X. The action of the continuous part $\mathsf{G} = \mathrm{Iso}(X)^0$ of the isometry group on the space X may be seen as describing the *local symmetry* of the quotient metric space X/Γ, which is a Riemannian orbifold. Under the assumption that X/Γ is a manifold, Farb and Weinberger (Ann. of Math. 168) proved the fundamental fact that $X/\mathrm{Isom}(X)^0$ is again a contractible manifold, and is giving rise to an *Riemannian orbibundle* $X/\Gamma\ \to$

$X/(\Gamma\,\mathrm{Isom}(X)^0)$ where the fibers are locally homogeneous spaces modelled on $X_{\mathsf{G}} = \mathsf{G}/\mathsf{K}$, with K a maximal compact subgroup of G. In this setup, a basic observation is the fact, that the continuous part of the isometry group of the Riemannian quotient $X/\,\mathrm{Isom}(X)^0$ may be non-trivial, and thereby reveals *"hidden"* local symmetries of the space X and its quotient X/Γ. From this point of view, the local symmetry of X/Γ will be encoded in an ensuing tower of orbifold fibrations with locally homogeneous fibers. And we can say that X/Γ has *"maximal"* local symmetry if the tower finally stops over a locally homogeneous orbifold. This motivates the following formal definition:

Definition 1. *We say that $M = X/\Gamma$ has* large local symmetry *if there exists a tower of Riemannian orbibundles $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_k = \{\mathrm{pt}\}$ with locally homogeneous fibers.*

The purpose of this project is to initiate the study of the *local symmetry of aspherical spaces* in terms of their naturally associated *towers of Riemannian orbifold fibrations.* Our first step will be to associate to any compact aspherical Riemannian manifold a canonical Riemannian orbifold fibration whose fibers are modeled on a Riemannian homogeneous space of a solvable Lie group. As a starting point, we are concerned with the action of the maximal connected normal solvable subgroup $\mathsf{R} \leq \mathsf{G} = \mathrm{Isom}(X)^0$, which is called the *solvable radical* of G. We then call the quotient space $Y = X/\mathsf{R}$ the *radical quotient* of X. As our first main result we show that the radical quotient is a contractible Riemannian manifold, and that it is divisible by the image of Γ in $\mathrm{Isom}(X/\mathsf{R})$.

Theorem 1. *The radical quotient X/R is a contractible Riemannian manifold, and the image Θ of Γ in $\mathrm{Isom}(X/\mathsf{R})$ acts properly discontinuously on X/R with compact quotient.*

Note that Theorem 1 shows that the radical quotient gives rise to an *associated Riemannian orbibundle* of the form

$$X/\Gamma \to Y/\Theta \tag{0.1}$$

and this orbibundle has locally homogeneous fibers modeled on R. In the following, we will study the geometry of this fibration in more detail. Before doing so, let us mention the following topological result, which is of independent interest, and is used as a basic tool for the proof of Theorem 1. It asserts that there are no compact Lie group actions normalized by properly discontinuous actions on *acyclic smooth manifolds* with compact quotient:

Theorem 2. *Let X be an orientable acyclic manifold and Γ a group which acts smoothly and properly discontinuously on X with compact quotient. Let κ be a compact Lie group acting faithfully and smoothly on X, such that the action is normalized by Γ. Then $\kappa = \{1\}$.*

The proof of Theorem 2 is based mainly on *cohomology of groups acting on acyclic complexes and application of the Smith theorem.* The first geometric application of Theorem 2 is the following.

Corollary 1. *Let X be a contractible Riemannian manifold which is divisible. Then* $\mathrm{Isom}(X)$ *has no non-trivial compact normal subgroup.*

Based on the proof of Theorem 1 and Theorem 2, we carry out a detailed analysis of the interaction of the smooth properly discontinuous action of the discrete group Γ on a manifold$X$ with the radicals of $\mathrm{Isom}(X)^0$. Some of the additional results, which we obtain, are summarized in the following structure theorem:

Theorem 3. *Let X be a contractible Riemannian manifold and $\Gamma \leq \mathrm{Isom}(X)$ a discrete subgroup such that X/Γ is compact. Let R denote the solvable radical of* $\mathrm{Isom}(X)^0$. *Then there exists a unique Riemannian metric on the quotient X/R such that the map $X \to X/\mathsf{R}$ is a Riemannian submersion. It follows further that:*
(1) $\mathrm{Isom}(X)/\mathsf{R}$ *acts properly on* X/R.
(2) *The kernel of the action* (1) *is the maximal compact normal subgroup of* $\mathrm{Isom}(X)/\mathsf{R}$. (3) *The image of* $\mathrm{Isom}(X)^0$ *in* $\mathrm{Isom}(X/\mathsf{R})$ *is a semisimple Lie group S of non-compact type without finite subgroups in its center. Moreover, it is a closed normal semisimple subgroup of* $\mathrm{Isom}(X/\mathsf{R})^0$. *And therefore normal in a finite index subgroup of* $\mathrm{Isom}(X/\mathsf{R})$.
(4) *Moreover, $\Theta \cap S$ is a uniform lattice in S.*

A Riemannian orbibundle $X/\Gamma \to Y/\Theta$ will be called an *infrasolv bundle* if its fibers are compact infrasolv orbifolds (with respect to the induced metric) which are all modeled on the same Lie group R. We can then state our main result on the geometry of the Riemannian orbibundle (0.1) which is associated to the radical quotient of X. Recall that R denotes the solvable radical of $\mathrm{Isom}(X)$.

Theorem 4. *There exists a simply connected solvable normal Lie subgroup R_0 of R, such that X/Γ has an induced structure of Riemannian infrasolv fiber space (modeled on R_0) over the compact aspherical Riemannian orbifold Y/Θ.*

Corollary 2. *Every aspherical Riemannian orbifold X/Γ gives rise to a canonical infrasolv tower*

$$X/\Gamma \longrightarrow X_1/\Gamma_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\ell/\Gamma_\ell \; ,$$

where the solvable radical of $\mathrm{Isom}(X_\ell)$ *is trivial.*

We can then state our main result on the geometry of the Riemannian orbibundle (0.1) which is associated to the radical quotient of X. Recall that R denotes the solvable radical of $\mathrm{Isom}(X)$.

Theorem 5. *There exists a simply connected solvable normal Lie subgroup R_0 of R, such that X/Γ has an induced structure of Riemannian infrasolv fiber space (modeled on R_0) over the compact aspherical Riemannian orbifold Y/Θ.*

According to Theorem 1, the radical quotient $Y = X/\mathsf{R}$ is a contractible Riemannian manifold and it is divisible by the image of Γ in $\mathrm{Isom}(Y)$. In general, the isometry group $\mathrm{Isom}(Y)$ will have a non-trivial continuous part $\mathrm{Isom}(Y)^0$, and also the radical of $\mathrm{Isom}(Y)^0$ can be non-trivial. (We discussed several types of examples.) We introduce now a general method to construct infrasolv bundles, starting from abstract group extensions of the form $1 \to \Lambda \to \Gamma \to \Theta \to 1$ where the group Λ, in general, will be a virtually polycyclic group, and Θ is a discrete group which is dividing a contractible Riemannian manifold Y. The basic construction is partially based on the notion of *injective Seifert fiber spaces* (as developed by Lee-Raymond). As an application of this method, we can derive:

Theorem 6. *Let Θ be a torsion free uniform lattice in the hyperbolic group* $\mathrm{PSO}(n,1)$. *Suppose $1 \to \mathbb{Z}^k \to \Gamma \to \Theta \to 1$ is a central group extension which has*

infinite order. Then there exists a compact aspherical manifold X/Γ *such that*
(1) X/Γ *admits a metric of large symmetry with length* $\ell = 1$.
(2) *For* $n \geq 3$, X/Γ *does not admit a locally homogeneous Riemannian metric. In particular,* Γ *does not embed as a uniform lattice into a connected Lie group.*
(3) *For* $n = 2$, X/Γ *admits the structure of a locally homogeneous Riemannian manifold. In particular,* Γ *embeds as a uniform lattice into a connected Lie group.*

It will inherit a Riemannian orbifold bundle structure over the compact hyperbolic manifold $\mathbb{H}^n/\Theta$ with typical fiber a k-torus T^k and exceptional fiber a Euclidean space form.

The space X/Γ is referred to a *Seifert fibering* which is developed by Lee and Raymond. This construction can be applied to any compact locally homogeneous symmetric manifold $\Theta\backslash G/K$ of real rank 1 such that $H^2(\Theta, \mathbb{Z}^k)$ has an element of infinite order.

We obtained the following supporting exmaple.

Corollary 3. *There exists a compact aspherical Riemannian manifold* X/Γ *of dimension four that admits a complete infrasolv tower of length one, which is fibering over a three-dimensional hyperbolic manifold. Moreover, the manifold* X/Γ *does not admit any locally homogeneous Riemannian metric.*

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 Baues Oliver、Kamishima Yoshinobu	４．巻 27
２．論文標題 Isometry groups with radical, and aspherical Riemannian manifolds with large symmetry, I	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Geom. Topol.	６．最初と最後の頁 1-50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/gt.2023.27.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

１．著者名 Y. Kamishima	４．巻 59(4)
２．論文標題 Quaternionic contact 4n+3-manifolds and their 4n-quotients	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	６．最初と最後の頁 435-455
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-021-09758-5.	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

１．著者名 D. Alekseevsky, K. Hasegawa, Y. Kamishima	４．巻 234
２．論文標題 Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Nagoya Math. J.	６．最初と最後の頁 83-96
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj. 2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

１．著者名 O. Baues, Y. Kamishima	４．巻 70
２．論文標題 Locally homogeneous aspherical Sasaki manifolds	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Differential Geom. Appl.	６．最初と最後の頁 1-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 Y. Kamishima
2．発表標題 On the fundamental groups of compact aspherical manifolds with parabolic structure
3．学会等名 国際研究集会, The Fourth Taiwan-Japan Joint Conference on　Differential Geometry（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Y. Kamishima
2．発表標題 A Note on Vanishing of Equivariant Cohomology of Proper Actions and Application to the Conformal and CR-automorphism Groups
3．学会等名 国際研究集会,, The 2nd Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Y. Kamishima
2．発表標題 Geometric structures on contact Heisenberg nilpotent Lie group
3．学会等名 KAIST Geometric Structures Lecture Series (Korea)（招待講義）（招待講演）
4．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	長谷川　敬三 (Hasegawa Keizo) (00208480)	新潟大学・人文社会科学系・フェロー (13101)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関