

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03341

研究課題名（和文）種々の変換を用いた超幾何微分方程式の解析

研究課題名（英文）Analysis of hypergeometric equations using various transformations

研究代表者

大島 利雄（Oshima, Toshio）

城西大学・数理・データサイエンスセンター・副所長

研究者番号：50011721

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000 円

研究成果の概要（和文）：middle convolutionなど種々の変換を用いて特殊関数としての超幾何関数の特徴づける微分方程式の解析を行った．不分岐不確定特異点をもつ常微分方程式に普遍開折の概念を導入した．解の普遍積分表示やStokes係数の変換理論を与え，rigidな場合はすべての特異点を変数とみて多変数超幾何微分方程式へ普遍拡張されることを示した．

多変数超幾何微分方程式系について，新たな積分変換を導入し，今まで解析されていなかったrigidの枠からはみ出る広いクラスが扱えるようになり，解の積分表示，べき級数表示，接続公式などの結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数の場合も含む超幾何関数について，満たす微分方程式系，べき級数表示，積分表示，既約性，隣接関係式などについての一般的解析手法を与え，それを用いて具体的で基本的な超幾何関数の場合の結果を示しており，今後の超幾何関数の研究にとって基本的な指針となるであろう．

手法は構成的で数式処理によるコンピュータアルゴリズムで実現しており，他の研究者も利用可能なようにライブラリの形にまとめ，マニュアルも含めて公開している．

研究成果の概要（英文）：I analyze hypergeometric equations which characterize hypergeometric functions as special functions by applying several transformations including middle convolutions. I define versal unfoldings of ordinary differential equations with unramified irregular singular points and give versal integral representations of their solutions and a transformation theorem of Stokes coefficients of them. If the equations are rigid, I prove that they are versally extended to hypergeometric systems with several variables regarding singular points as variables.

Introducing new integral transformations, I analyze a wide class of hypergeometric systems with many variables which are not necessarily rigid and give integral representations of their solutions, power series expressions of them and their connection formulas etc.

研究分野：代数解析学

キーワード：超幾何微分方程式 多変数超幾何関数 middle convolution 積分変換 接続公式 不確定特異点 Stokes係数 数式処理

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 特殊関数として最も重要な Gauss の超幾何関数と超幾何微分方程式に対して種々の拡張がなされてきたが、個別的理論が多く一般的な研究は少なかった。一方、Katz が middle convolution やリジッド指数の概念を導入して以降、新たな視点での研究が可能になった。

(2) これに関連して、Dettweiler-Reiter による Pfaff 系方程式の留数行列に対する Katz 理論の解釈、Crawley-Boevey による Deligne-Simpson 問題の解決、大島による単独高階の場合の解析、原岡による多変数 Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 型方程式への middle convolution の拡張、Painleve 方程式の分類への寄与など大きな進展があり、不確定や多変数の超幾何微分方程式の一般的な解析が期待される状況にあった。

2. 研究の目的

(1) 超幾何微分方程式に対する様々な変換、すなわち、middle convolution などの積分変換を基本とし、Gauge 変換、群対称性などによる座標変換、特異集合への制限や方程式の拡張、特異点の合流やその逆の開折、可約な場合の既約成分の抽出、などを通じて、超幾何微分方程式の解の性質を明らかにする。

(2) 多変数の超幾何微分方程式に対し、古典的な Appell の超幾何関数などが満たす KZ 型方程式の研究を中心に可約性や接続問題などを解き、特異集合への制限によって新たな手法としてリジッドとは限らない場合も含めて常微分方程式への応用を行う。不分岐な不確定特異点をもつ方程式に対しては、開折と合流を通じて確定型の時を含めた統一的な解析手法を開発して具体的な結果を得る。

3. 研究の方法

(1) 不確定、多変数、高階数の微分方程式系においては計算が複雑になるので、理論構築のための計算実験に、数式処理 Risa/Asir を用いた。また、そのためのライブラリの開発だけでなく、得られた理論を使っての計算を実現するためのプログラム開発と同時進行で研究を進めた。

(2) KZ 型方程式に middle convolution を拡張して多変数超幾何微分方程式の研究への足がかりを作った熊本大学の原岡氏と密に研究交流を行って研究の調整を行った。Covid19 でやむを得ない期間を除いて、交互に年に 2 回研究集会を主催した。海外を含め、関連する研究集会に参加して、講演を行うと共に最新の情報を得た。

4. 研究成果

(1) Riemann 球面上の不分岐不確定特異点をもつ高階単独線形常微分方程式に対し、リジッド指数を保ったまま Fuchs 型線形微分方程式の特異点をパラメータ変数とする系の中に埋め込む普遍開折を定義し、その存在の予想を定式化した。この方程式への Fuchs 型方程式のすべての合流過程は、この普遍開折の特殊化として得られる。さらにアクセサリー・パラメーターが存在しないリジッドな場合などを含んだクラスで予想が正しいことを versal addition と middle convolution という 2 つの変換を用いて示した。これにより、リジッドな場合は、接続問題や解の積分表示など解析的性質がよく分かっている Fuchs 型の場合の自然な合流として不分岐不確定特異点をもつ方程式が具体的に得られ、不確定特異点を持つ場合の接続問題や積分表示について、一般的な解析への道が開けた。

(2) 普遍開折を、単独高階の場合のみならず Pfaff 系の常微分方程式の場合にも定義し、その存在予想を定式化した。さらにリジッドな場合などを含んだクラスで予想が正しいことを Pfaff 系の普遍開折に対する 2 つの変換 versal addition と middle convolution を定義することによって示した。特異点を 4 点以上持つリジッドなフックス型線形常微分方程式は、自然に多変数の Knizhnik-Zamolodchikov 型方程式に拡張されるが、不分岐不確定特異点をもつリジッド線形常微分方程式に対しても、普遍開折まで拡張した多変数の Knizhnik-Zamolodchikov 型方程式に埋め込めることを示した。

- (3) リジッドな Fuchs 型常微分方程式の半局所モノドロミーの代数的計算公式を与えた．これによりリジッドで不分岐不確定特異点を持つ線型微分方程式の不確定特異点における局所モノドロミーの計算公式も得られた．
- (4) 城西大学の大学院生清水との共同研究で Gauss の超幾何微分方程式の解のモノドロミー群の特徴づけを初等的に与えた．
- (5) カオス系を含む代数的な一階の非線形常微分方程式について，解を数十桁の高い精度で高速計算する Taylor 法を開発し，解の爆発現象も高い精度での計算への道を開いた．
- (6) Covid19 対応のオンライン講義に関連して，ネットワークの通信速度の遅延に関心を持ち，それをモデル化した関数積分方程式を得た．その解の具体的な表示は分からないが，解の漸近的挙動について数値計算から結果を推測し，その証明を与えた．Covid19 対応のため，関連する考察などを含めてインターネットに早々に公開した．
- (7) Riemann 球面上の不分岐不確定特異点をもつリジッドな線形常微分方程式は，middle convolution と addition とを組み合わせた変換を何度か重ねることにより，互いに移り合うことが分かっていた．middle convolution に対応する Riemann-Liouville 積分の積分路を複素平面上で考えることにより，様々な漸近挙動を持った局所解が構成されることを示し，その解を解析接続していき，出発点と異なる，あるいは同じ特異点に近づくときの解の様子を知るために積分路をどのように取るとよいかを示した．さらに，その積分の値の漸近的振舞いから，不確定特異点をもつ常微分方程式の解の接続問題，すなわち，接続係数や Stokes 係数が確定特異点の場合の接続問題の場合と同様に帰納的に計算できることを示した．この結果を導くため，複素積分の意味づけを含めた正当性と諸性質とを一般的な定理として与えた．この定理によって，一般超幾何関数の合流方程式における接続係数や Stokes 係数を明示的に与えることができ，この方程式の既約性の必要十分条件と可約な場合の分解の様子も完全に分かった．結果が綺麗に述べられることから，一般の場合の結果も予想が立った．
- (8) middle convolution と関連して線型常微分方程式の研究に極めて有効な Riemann-Liouville 変換は，多変数の超幾何関数の研究にも有効であるが，それを多変数の積分変換に一般化した．すなわち，Dirichlet の積分公式に基づいた本質的に多変数の積分変換を定義し，その逆変換も具体的に積分変換で与えた．更に Gauge 変換や多変数の有理的座標変換などと組み合わせ，べき級数間におけるさらに一般の積分変換を定義した．これにより古典的な多変数の超幾何関数として知られている Appell や Lauricella の超幾何関数や一部の Horn などの不確定特異点型の超幾何関数も含めて統一的に扱えるようになり，満たす方程式の変換や GKZ 型方程式との関連を調べた．これらの結果として，最も基本的な Appell の F_1 を一般化した 2 変数の一般階数の超幾何関数を定義し，特異点での独立解や接続公式を導くために基本となる結果を示した．
- (9) べき級数で与えられる多変数超幾何関数の基本的なクラス，すなわち，Appell や Lauricella やより広い Kempe de Fariet の超幾何を含む超幾何級数に対し，熊本大学の松原氏と共同研究を行って次の結果を得た．超幾何級数を特徴づける微分方程式を解析し，その方程式の階数や隣接関係式，特異点集合，既約性の必要十分条件，解の積分表示などの結果を一般的に得た．また，原点や無限遠点に関係する多くの特異点で特異点解消を行うことにより， n 変数の超幾何関数のときは $(n+1)!$ 個の特異点での独立解を具体的に構成してそれらの間の接続公式を与えた．まず 2 変数超幾何で基本的な結果を示し，特に Knizhnik-Zamolodchikov 型方程式を満たす場合には，留数行列のスペクトル型を具体的に決定することによって，他のすべての特異点での情報も得ることが出来た．また，一般に Gelfand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ) 微分方程式を満たすことを示し，より多くの変数の場合も GKZ 方程式における既知の成果を合わせて使うことによってこれらの結果を示した．成果をまとめた論文を投稿し，審査中 (Arxiv. 2311.18611)．
- (10) 3 変数以上の超幾何関数に対応する Knizhnik-Zamolodchikov 型方程式において，その留数行列が middle convolution によってどのように変換されるかについては，組み合わせ論的に複雑なためほとんど解析がなされていなかった．それに対して，トーナメント戦に関わる組み合わせ論の解析が適合することが分かり，簡潔な記述に成功した．この結果については，論文にまとめ中．
- (11) 当該研究においては，数式処理 Risa/Asir 上でプログラムを開発しながら計算機実験を行い理論的結果を得る，というように進められたものがほとんどである．また，得られた成果もプログラムで実現して，その後の研究に役立てた．これらは Risa/Asir 上のライブラリ `os_muldif.rr` としてまとめられ，他の研究者の役に立つよう，そのプログラムのマニュアル `os_muldif.pdf` と共にインターネット上で公開している．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Toshio Oshima	4. 巻 -
2. 論文標題 Integral transformations of hypergeometric functions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Symmetry in Geometry and Analysis - Festschrift for Toshiyuki Kobayashi, Progress in Math	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Oshima	4. 巻 -
2. 論文標題 Generalized hypergeometric functions with several variables	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 表現論シンポジウム講演集	6. 最初と最後の頁 93-102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Oshima	4. 巻 782
2. 論文標題 Riemann-Liouville transform and linear differential equations on the Riemann sphere	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 57-91
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/conm/782/15722	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大島利雄	4. 巻 4
2. 論文標題 複素数平面での Japanese Theorem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 城西大学数学科数学教育紀要	6. 最初と最後の頁 1-2
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.20566/sugakukyoiku-4_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Oshima	4. 巻 57
2. 論文標題 Versal unfolding of irregular singularities of a linear differential equation on the Riemann sphere	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Publ. RIMS Kyoto Univ.	6. 最初と最後の頁 893-930
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/57-3-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大島利雄	4. 巻 3
2. 論文標題 Japanese Theoremについて	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 城西大学数学科数学教育紀要	6. 最初と最後の頁 70-92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大島利雄	4. 巻 3
2. 論文標題 自然数の負の奇数べきの和の収束とその誤差	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 城西大学数学科数学教育紀要	6. 最初と最後の頁 93-97
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大島利雄	4. 巻 2
2. 論文標題 Online 講義とデータ量	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 城西大学数学科数学教育紀要	6. 最初と最後の頁 68-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Oshima	4. 巻 12
2. 論文標題 Confluence and versal unfolding of Pfaffian systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 117-151
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20566/13447777_12_117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshio Oshima and Kouhei Shimizu	4. 巻 12
2. 論文標題 A characterization of the monodromy group of Gauss hypergeometric equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 153-161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20566/13447777_12_153	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Oshima Toshio	4. 巻 256
2. 論文標題 Semilocal Monodromy of Rigid Local Systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 189 ~ 199
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-99148-1_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大島利雄	4. 巻 2101
2. 論文標題 Fuch型方程式の接続問題	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 98-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計39件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 10件）

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 トーナメント戦の数理と多変数の超幾何微分方程式系
3．学会等名 Risa/Asir conference 2024
4．発表年 2024年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 KZ方程式とトーナメント戦
3．学会等名 アクセサリー・パラメーター研究会
4．発表年 2024年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Transformations of hypergeometric systems
3．学会等名 代数解析日大研究集会
4．発表年 2024年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Generalized hypergeometric functions with several variables
3．学会等名 2024年表現論ワークショップ
4．発表年 2024年

1. 発表者名 Toshio Oshima
2. 発表標題 Generalized hypergeometric functions with several variables
3. 学会等名 18th Discussion Meeting in Harmonic Analysis, in honour of centenary year of Harish Chandra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大島利雄
2. 発表標題 Generalized hypergeometric functions with several variables
3. 学会等名 2023年度表現論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Oshima
2. 発表標題 Generalized hypergeometric functions with several variables
3. 学会等名 Polish-Japanese workshop on differential equations in the complex domain (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshio Oshima
2. 発表標題 Integral transformations of hypergeometric functions with several variables
3. 学会等名 Complex Differential and Difference Equations II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 2変数の一般化超幾何函数
3．学会等名 2023年函数方程式サマーセミナー
4．発表年 2023年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Fractional calculus of hypergeometric systems
3．学会等名 Kobayashi 60, Univ. of Tokyo (国際学会)
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Fractional calculus of hypergeometric systems
3．学会等名 超局所解析と漸近解析の展望, RIMS
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 凸多角形の三角形分割と数式処理
3．学会等名 Computer Algebra - Foundations and Applications, RIMS (招待講演)
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 収束べき級数に対する積分変換と多変数超幾何関数
3．学会等名 2022年度表現論ワークショップ
4．発表年 2023年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 収束べき級数に対する積分変換と多変数超幾何関数
3．学会等名 代数解析日大研究集会
4．発表年 2023年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 数学とコンピュータと
3．学会等名 数学と諸科学の連携に向けた若手数学者交流会2023
4．発表年 2023年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Integral transformations of hypergeometric functions with several variables
3．学会等名 Workshop on Accessory Parameters (国際学会)
4．発表年 2023年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Risa/Asirを用いての多変数超幾何微分方程式の研究
3．学会等名 Risa/Asir Conference 2023
4．発表年 2023年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Towards analysis of rigid Pfaffian systems
3．学会等名 FASNET21（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Fractional analysis of linear differential equations on the Riemann sphere
3．学会等名 Web-seminar on Painleve Equations and related topics
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 不確定特異点をもつ多項式係数常微分方程式の接続問題
3．学会等名 超幾何方程式研究会 2022
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 不確定特異点をもつ常微分方程式の解析
3．学会等名 2021 年度表現論ワークショップ
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 リーマン球面上の線形微分方程式の接続問題
3．学会等名 アクセサリー・パラメーター研究会
4．発表年 2022年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Towards analysis of rigid Pfaffian systems
3．学会等名 超幾何方程式研究会 2021
4．発表年 2021年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Towards analysis of rigid Pfaffian systems
3．学会等名 2020 年度表現論ワークショップ
4．発表年 2021年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 常微分方程式の数値解析
3．学会等名 Risa/Asir Conference 2021
4．発表年 2021年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Confluence and Unfolding of Pfafian Systems
3．学会等名 FASFE19, Valladolid, Spain (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2019年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Confluence and Unfolding of Pfaffian Systems
3．学会等名 Advances and Perspectives in Representation Theory, Shandong University, Qingdao China (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2019年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Confluence and versal unfolding of Pfaffian systems
3．学会等名 超幾何微分方程式研究会
4．発表年 2020年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Pfaff系の合流と開折とその応用
3．学会等名 2019年度表現論ワークショップ
4．発表年 2020年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Pfaff系の合流と開折
3．学会等名 ウィンターセミナー 2019
4．発表年 2020年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Hypergeometric equations with several variables -- connection problems and confluences
3．学会等名 FASPDE18（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 常微分方程式とKZ方程式の接続問題と合流操作とmiddle convolution
3．学会等名 アクセサリー・パラメータ研究会
4．発表年 2018年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 Confluence and unfolding of irregular singularities of hypergeometric equations
3．学会等名 代数解析学の諸問題 - 超局所解析及び漸近解析 -
4．発表年 2018年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 From Fuchsian ordinary differential equations on P^1 to equations with several variables and irregular singularities
3．学会等名 The Legacy of Joseph Fourier after 250 years (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2018年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 分かるFuchs型常微分方程式から不確定特異点をもつ多変数方程式へ
3．学会等名 微分方程式と表現論
4．発表年 2018年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 接続公式の合流
3．学会等名 ウィンターセミナー 2018
4．発表年 2019年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 接続問題の合流と開折
3．学会等名 代数解析学の諸問題
4．発表年 2019年

1．発表者名 大島利雄
2．発表標題 合流と開折 -- 接続問題と多変数化
3．学会等名 アクセサリー・パラメータ研究会
4．発表年 2019年

1．発表者名 Toshio Oshima
2．発表標題 Analysis of hypergeometric systems via confluence and fractional derivative
3．学会等名 Representation theory of reductive Lie algebras
4．発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1．著者名 大島利雄	4．発行年 2020年
2．出版社 数学書房	5．総ページ数 226
3．書名 個数を数える	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Oshima Labolatry Home Page
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>
研究者総覧 大島利雄
http://researcher.josai.ac.jp/html/100000328_ja.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------