Basel problem visualized by GeoGebra

Daisuke Hosoya, Hironori Okada and Yudai Suzuki

細谷 大輔 (保善高等学校), 岡田 裕紀 (保善高等学校), 鈴木 雄大 (日本大学大学院理工学研究科)

1 はじめに

正整数の平方数の逆数を全て足し合わせた無限級数は収束し，その値は円周率の平方の $\frac{1}{6}$ 倍という不思議な数に一致する．即ち Riemann zeta 関数の 2 における値である．この事実は問題を論じた Bernoulli 一族や Leonhard Euler の故郷の地名に倣い，Basel 問題と称される [2]．Euler が 1735 年に三角関数の無限積展開に負う解法を与えて以来，逆三角関数の積分や Parseval の等式から導出するなどの様々な方法によって証明が与えられている [3] [4] [6]．昨今では大学入試問題としても出題されており [7]，数学を学ぶ上の教養のひとつへの導入教材に値するとも言えよう．

本稿では，この Basel 問題の等式を視覚的に理解させることを目的とした，GeoGebra の動的教材を提案する．また，既存の証明を少しばかり拡張した初等的証明を記述する．

まずは Basel 問題の等式を述べよう．

定理 (Euler, 1735)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

2 Basel 問題の等式と GeoGebra の動的教材

例えば，この Basel 問題を以下のような生徒を対象とした授業において解説することを想定する．

- 学年：高等学校理系クラス 3 年生
- 科目：数学 III
- 単元：極限とその応用
- 内容：Basel 問題について
- 時間：50 分 (導入 10 分，証明と解説 20 分，動画提示と生徒による実践 15 分，まとめ 5 分)

授業の前半に Basel 問題を解説し，高等学校の学習範囲内容のみに基づいた証明を与えているものとする．π^2 が無理数であることを直接示す証明はあるが [1]，授業においては π^2 が無理数であることを証明なしに認めた上で，有理数の無限和が無理数になる例を示すことに焦点を当て，Basel 問題の等式に対する直感的理解及び生徒の疑問への解決を目的とした GeoGebra の活用を試みる．

まず Basel 問題の等式を提示し，以下のように変形を行う．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{k}}{2\pi k} = \frac{\pi}{6}.$$

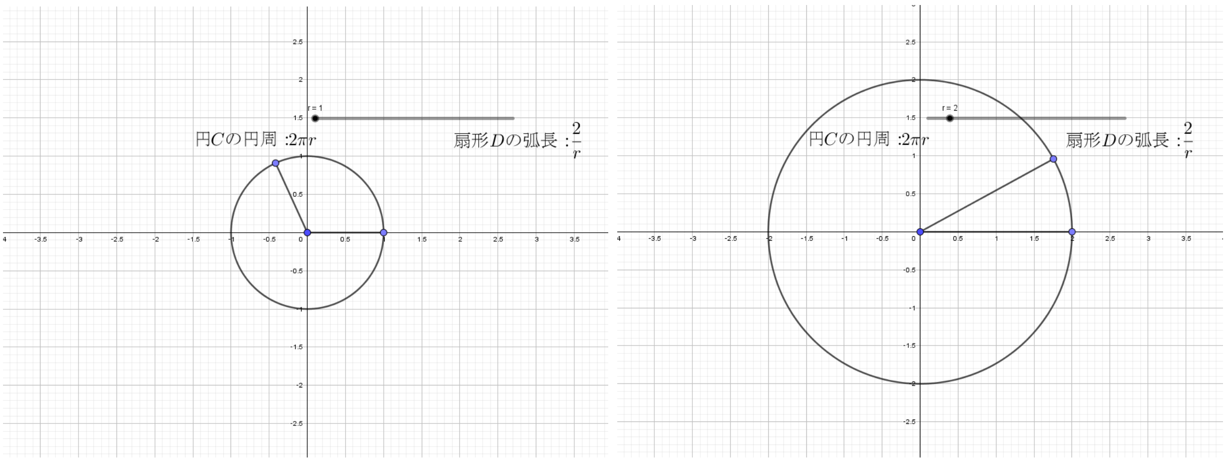
授業の最初に，変形後の等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{k}}{2\pi k} = \frac{\pi}{6} \tag{1}$$

の左辺の級数の各項の分母分子が，半径 k の円においてそれぞれどのような量を表すかを，生徒に考えてもらい，各グループからの意見を聞く．

(1) の左辺の分母 $2\pi k$ は半径 k の円の円周の長さであり，分子は半径 k の円の扇形が面積 1 を持つときの扇形の弧長を表すことに注意すると，和の中の分数 $\frac{\frac{2}{k}}{2\pi k}$ は半径 k の円の円周に対し『面積 1 の扇形の弧長の占める割合』であることが分かる．

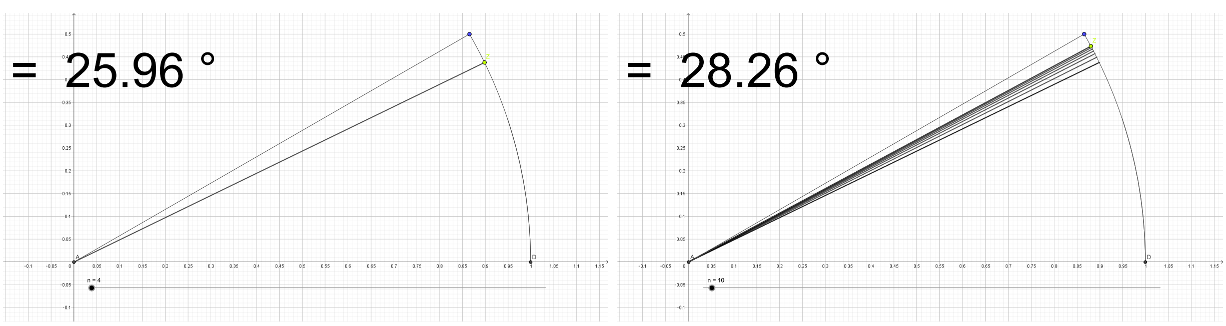
この割合が k の増加によって 0 に近づいていく様子を視覚的に理解してもらうため，ここで GeoGebra で作成した以下の教材 1 を生徒に見せる．



教材 1

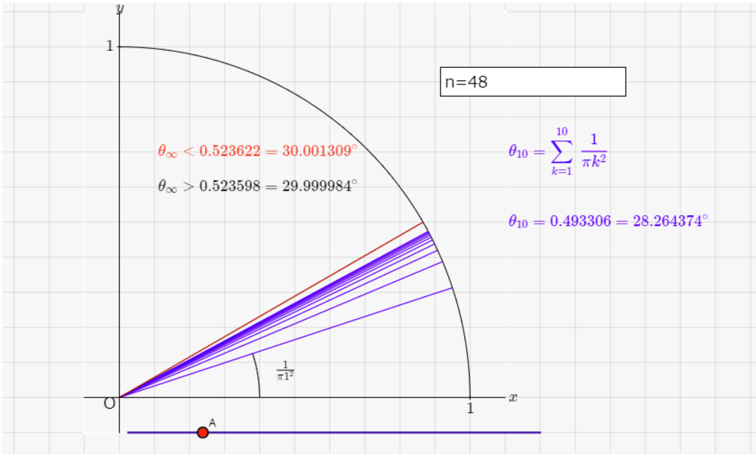
教材 1 では，半径 k（GeoGebra 上では r になっている）の円と，半径 k で弧長が $\frac{2}{k}$ である扇形を中心をそろえて重ねてある．教材 1 のうち左の図は半径 1 の円の中で面積 1 の扇形を表した図で，右の図は半径 2 の円の中で面積 1 の扇形を表した図であり，半径が大きくなるにつれて円周に対する扇形の弧長の割合が小さくなっていくことが視覚的に理解できる．無論，和が収束するとは限らない．

そこで，この割合の和が $30^\circ = \frac{\pi}{6}$(右辺) に収束することの視覚的理解には，次の教材 2 を用いる [8].



教材 2

これは，半径 1，中心角 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ の扇形の弧上に，半径 k，中心角 $\frac{1}{\pi k^2}$ の扇形の弧長を次々とつなげていく様子が見られる教材である．つまり，(1) の両辺の値に弧長と中心角という幾何学的な意味をそれぞれ持たせる．これにより弧長の和，すなわち (1) の左辺が $30^\circ = \frac{\pi}{6}$(右辺) に収束することが視覚的に理解できる．



教材 3

上記の教材 3 [5] は研究集会後に高遠節夫先生にご作成頂いたものである．弧長の和が $\frac{\pi}{6}$ に収束する様子が教材 2 と同様にわかるものであるが，教材 2 と異なり，中心角を下からだけではなく上からも評価する手法を提示頂いたお陰で，より良く収束の様子がわかるようになっている．高遠先生から本稿にこの教材 3 を記載させて頂ける旨のご了承を賜り，ここにご紹介させて頂く次第である．

3 Basel 問題の等式に対する別証明

本節では先行研究に既にある初等的証明 [4][6] の一般化に相当する別証明を述べる．最初に [3][4][6] の証明を概観しよう．いずれも高校数学の範囲で証明できるものであり，先行研究と同様に不等式

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

を用いたはさみうちの計算法に基づいている．

各辺を 2 乗し逆数を取れば，

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} \tag{2}$$

となる．ここで 3 以上の整数値を取る関数 $F(n)$ (ただし n は正整数) を用いて，

$$\theta_{n,k} = \frac{k\pi}{F(n)} (\text{ただし } k \text{ は正整数で } 1 \leqq k < \frac{F(n)}{2})$$

とおくと $0 < \theta_{n,k} < \frac{\pi}{2}$ を満たすことより，(2) において $\theta = \theta_{n,k}$ とすれば，

$$\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}} < \frac{F^2(n)}{\pi^2 k^2} < \frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}$$

を得る．これより，

$$\frac{\pi^2}{F^2(n)}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}} < \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{F^2(n)}\frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}} \tag{3}$$

となるので，各辺 k についての和を適切な範囲までとれば

$$\frac{\pi^2}{F^2(n)}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}} < \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{F^2(n)}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}$$

が従う．

[4] と [6] の違いは，この不等式の $\dfrac{\pi^2}{F^2(n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}$ と $\dfrac{\pi^2}{F^2(n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}$ を求める手法と，関数 $F(n)$ の選択である．[4] では $F(n)=2^{n+1}$, $\theta_{n,k}=\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ を考え，$\theta_{n,k}$ に対し三角関数の基本的性質を繰り返し用いることで，

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}=\frac{2}{3}(4^n-1) \tag{4}$$

を得ている．[6] では $F(n)=2n+1$ として，$\theta_{n,k}=\frac{k\pi}{2n+1}$ とおき，$\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}$ を解にもつ方程式を構築した後に解と係数の関係を用いて，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}=\frac{1}{3}n(2n-1) \tag{5}$$

を導いている．

[4] と [6] の証明の核は，$\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}$ の和を求めること（一般的に $\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\tan^2\theta}+1$ が成立することに注意）及び，その和を $F^2(n)$ で割って $n\to\infty$ としたときの極限が $\frac{1}{6}$ となるように，うまく $F(n)$ を選ぶ点にある．

この点に着目して得られたのが次節の補題である．この補題の証明には $F(n)$ を具体的に決めずとも，$F(n)$ がある性質を満たせば $\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}$ の和が求まることを用いている．即ち [4] と [6] を統合し，一般化した証明に相当すると言えよう．

4　別証明のための補題とその系

補題を述べる．

補題　n を正整数とする．$A(n)$ を正整数の集合から正整数の集合への関数で

$$A(n)\geqq 2,\quad \lim_{n\to\infty}A(n)=\infty$$

を満たすものと仮定する．ε は 0 または 1 を表す．

任意の $A(n)$ と ε に対して

$$\theta_{n,k}=\frac{k\pi}{2A(n)-\varepsilon}\qquad (k=1,2,3,\cdots,A(n)-1)$$

とおくと，

$$\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}=\frac{1}{3}(A(n)-1)(2A(n)-1-2\varepsilon)$$

が成り立つ．

系　補題の仮定のもと，次が成立する．

$$\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}=\frac{2}{3}(A(n)-1)(A(n)+1-\varepsilon).$$

系より $A(n)=2^n$, $\varepsilon=0$ に対して等式 (4) が従う．また，補題において $A(n)=n+1$, $\varepsilon=1$ とすれば，等式 (5) を得る．

なお，補題の仮定をみたす $A(n)$ であれば常に系が成立する点が面白いと考えており，探求活動として，より良い $A(n)$ や定数 ε の選択を生徒に試みさせることもできると考える．補題の証明は後述する．まずは補題を用いて Basel 問題の等式を証明しよう．

5 補題を用いた Basel 問題の証明

(2) において $\theta=\theta_{n,k}=\frac{k\pi}{2A(n)-\varepsilon}(k=1,2,3,\cdots,A(n)-1)$ とする．各辺 k について 1 から $A(n)-1$ まで和を取れば

$$\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}<\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{(2A(n)-\varepsilon)^2}{k^2\pi^2}<\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{1}{\sin^2\theta_{n,k}}.$$

補題より

$$\pi^2\frac{(A(n)-1)(2A(n)-1-2\varepsilon)}{3(2A(n)-\varepsilon)^2}<\sum_{k=1}^{A(n)-1}\frac{1}{k^2}<\pi^2\frac{2(A(n)-1)(A(n)+1-\varepsilon)}{3(2A(n)-\varepsilon)^2}.$$

$n\to\infty$ のとき $A(n)\to\infty$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\pi^2\frac{(A(n)-1)(2A(n)-1-2\varepsilon)}{3(2A(n)-\varepsilon)^2}=\lim_{n\to\infty}\pi^2\frac{2(A(n)-1)(A(n)+1-\varepsilon)}{3(2A(n)-\varepsilon)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

となる．はさみうちの原理より、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ となり，Basel 問題の主張が従う． □

6 補題の証明

以下の記号は，補題と同様とする．ただし，簡便のため $A=A(n)$, $N=2A(n)-\varepsilon$ とおく．また，i を虚数単位として，$z=\cos\theta_{n,k}+i\sin\theta_{n,k}$ とおく．

ド・モアブルの定理より $z^N=\cos N\theta_{n,k}+i\sin N\theta_{n,k}$ であるが，$N\theta_{n,k}=k\pi$ であるから，z^N の虚部は 0 に等しい．

一方，$0<\theta_{n,k}<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta_{n,k}\neq 0$ であるから，$z=\sin\theta_{n,k}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}+i\right)$ としてから N 乗し，

$$z^N=\sin^N\theta_{n,k}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}+i\right)^N.$$

ここで，$T=\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}+i\right)^N$ とおくと，二項定理より

$$T=\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^N+\left(\begin{array}{c}N\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-1}i-\left(\begin{array}{c}N\\2\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-2}-\cdots+i^N.$$

これより T の虚部は $\left(\begin{array}{c}N\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-1}-\left(\begin{array}{c}N\\3\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-3}+\cdots$ であるが，z^N の虚部は 0 であったので，

$$\left(\begin{array}{c}N\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-1}-\left(\begin{array}{c}N\\3\end{array}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{N-3}+\cdots=0 \tag{6}$$

が成り立つ．

以下，ε の値によって場合分けをする．$\varepsilon=1$ のとき，$N=2A-1$ より N は常に奇数値をとる．このとき (6) は

$$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{2A-2}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{2A-4}+\cdots\pm 1=0.$$

ただし，定数項の符号は A の偶奇により定まる．よって，$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}\right)^{A-1}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}\right)^{A-2}+\cdots\pm 1=0$ が成り立つ．これは $A-1$ 次方程式

$$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}x^{A-1}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}x^{A-2}+\cdots\pm 1=0$$

がすべて異なる $A-1$ 個の実数解を持ち，その解が $x=\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}(k=1,2,\cdots,A-1)$ であることを示している．従って，解と係数の関係より

$$\sum_{k=1}^{A-1}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}=\frac{\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}}=\frac{1}{6}(N-1)(N-2)=\frac{1}{3}(A-1)(2A-3).$$

一方，$\varepsilon=0$ のとき，$N=2A$ より，N は常に偶数値を取る．このとき (6) は

$$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{2A-1}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}\right)^{2A-3}+\cdots\pm\begin{pmatrix} N \\ N-1 \end{pmatrix}\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}=0$$

と表せる．ただし，この最終項の符号は A の偶奇で定まる．両辺に $\frac{1}{\tan\theta_{n,k}}$ をかけて

$$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}\right)^{A}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}\right)^{A-1}+\cdots\pm\begin{pmatrix} N \\ N-1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}\right)=0.$$

これは A 次方程式

$$\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}x^{A}-\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}x^{A-1}+\cdots\pm Nx=0$$

の A 個の異なる実数解が $x=0$ と $x=\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}(k=1,2,\cdots,A-1)$ であることを示している．

解と係数の関係を用いて，前述と同様に計算し

$$0+\sum_{k=1}^{A-1}\frac{1}{\tan^2\theta_{n,k}}=\frac{\begin{pmatrix} N \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}}=\frac{1}{6}(N-1)(N-2)=\frac{1}{3}(2A-1)(A-1)$$

が従う．

以上より補題が示された． □

7　今後の課題と展望

今回は，GeoGebra を用いて Basel 問題を視覚的に理解できる動的教材を作成した．この教材は級数の値が 30°，つまり $\frac{\pi}{6}$ に近づくことを理解するための一助になる．しかしながら，Basel 問題そのものの視覚的な証明とはなっていない．このことから，今後は Basel 問題の証明を含み，なおかつ証明の骨子も理解できるような教材を作成したい．

参考文献

[1] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[2] W. Dunham, *Euler: The Master of Us All*, The Math. Association of America, Dolciani Math. Expositions, **22**, 1999.

[3] J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ *and Related Identities,* Amer. Math. Monthly, **109**, (2002), 196-200.

[4] 大浦 拓哉, バーゼル問題の簡単な解法, `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/BaselProof_j.pdf` .

[5] 高遠 節夫, 教材 3, `https://s-takato.github.io/ketcindysample/misc/offline/basel3mainoff.html` .

[6] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, **2**, Dover, 1987.

[7] 安田 亨 他編, 数学大学入試問題解答集 私立大編 2018, 星雲社 227–230.

[8] 細谷大輔・岡田裕紀・鈴木雄大, 教材 2, `http://trout.math.cst.nihon-u.ac.jp/~hirata/basel_20201209_suzuki.ggb` .