

クラウドサービスを用いたグループ研究の指導と ポスター作成について

埼玉大学大学院理工学研究科 中川 幸一¹

1 はじめに

高校生以下が行う研究活動の場としては主に以下のようなものがある.

- 部活動 (科学部, 数学部 etc.)
- 理数科, 数理科学科 etc.
- 高大連携²
- ジュニアドクター育成塾³
- スーパーサイエンスハイスクール (SSH)⁴
- グローバルサイエンスキャンパス (GSC)⁵

規模としては, 興味と関心をもつ同好の生徒が自発的・自主的に集まって行っている小規模なものから, 国立研究開発法人科学技術振興機構 (JST) の委託を受けて行っている大規模なものまで多岐にわたる.

また, これらで行われる研究は個別研究とは言うものの個人から複数人まで規模はバラバラであり, 研究テーマも新規で始めるものから継続して行っているものまで形態も様々である.

このように多様な形態の中で, 継続的に研究を行うための環境構築や数学ソフトウェアの活用の仕方について, 埼玉大学で実施した GSC プログラムの一つである「ハイグレード理数高次生育成プログラム (HiGEPS)」とジュニアドクター育成塾の一つである「科学者の芽成長促進プログラム」で行った, クラウドサービスを用いたグループ研究の仕方についてと, オンラインの共同 LaTeX エディターの一つとしての Overleaf を用いたポスター作りについての事例を報告する.

2 クラウドサービスを用いたコミュニケーションや研究について

研究テーマの決定及び進め方として生徒のみで行うこともあるが, ここでは指導教員または TA・メンター (以下, 指導者) の指導・助言のもと生徒が課題を決定し研究を行う

¹E-mail: k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

²高等学校と大学が連携して行う教育活動で, 双方との接続における一人一人の能力を伸ばすための連携

³将来の科学技術イノベーションを牽引する傑出した人材の育成に向けて, 高い意欲や突出した能力を持つ小中学生を発掘し, 理数・情報分野の学習などを通じてその能力を伸ばさせる体系的な取り組み

⁴理数・情報分野の学習等を通じて, 高い意欲や突出した能力を有する高校生を育成する事業

⁵理数・情報分野に秀で, 英語力と国際感覚をもった高校生を育成する事業

こととする。また生徒は、パソコンなどは使えることを前提とし、指導者と生徒が一对多や多対多の場合を想定することとする。このとき、以下のような環境で研究することが望ましいと考えられる。

いつでも研究ができる

使用が限られるような有料ソフトは極力避けるようにし、使い始めのハードルが高すぎないもの。また、場所や環境が極力束縛されないようなもの。

デジタルなデータや履歴

アナログ中心では最後の取りまとめが大変なことも多いので、研究の時系列が追いやすいようなもの。

情報が共有しやすい

今後将来的にも使い続けて欲しいので、応用性や拡張性があるもの。また、望めばより複雑なこともできるもの。

3 研究に用いたクラウドサービスについて

使用したクラウドサービスについて、使用してもらった受講生の感想も含めて報告する。

3.1 数学ソフトウェア・環境等

Wolfram Development Platform (Wolfram Cloud)

無料で Mathematica と同じようなことができる。ほとんどの生徒には、短期間で使い方を理解し単独で使いこなすにはハードルが高かった。ただ、中には色々と試行錯誤しながら活用していた生徒もみられた。ヘルプなどがインターネット上に充実していたことが要因として大きいと見られる。このため、スクーリングでの研究では、Mathematica を用いて、生徒と一緒に計算方法やアルゴリズムを考え、計算やプログラミングの入力等は指導者が行う形をとった。

L^AT_EX, Overleaf

数式を含むため、ワードプロセッサと比べて記述が容易であった。また、共同作業が可能のため、複数人での作業及び共有などが容易であった。しかし、ワードプロセッサと勝手が違うので使い方を覚えるまでは苦勞した。小中学生に対しては、内容に重きをおいてもらい、入力は複数のメンターが代理で行った。体裁の微調整なども含めて、同一環境でどこからでも修正できる点が非常に好評であった。

3.2 数学以外のソフトウェア・環境等

Skype

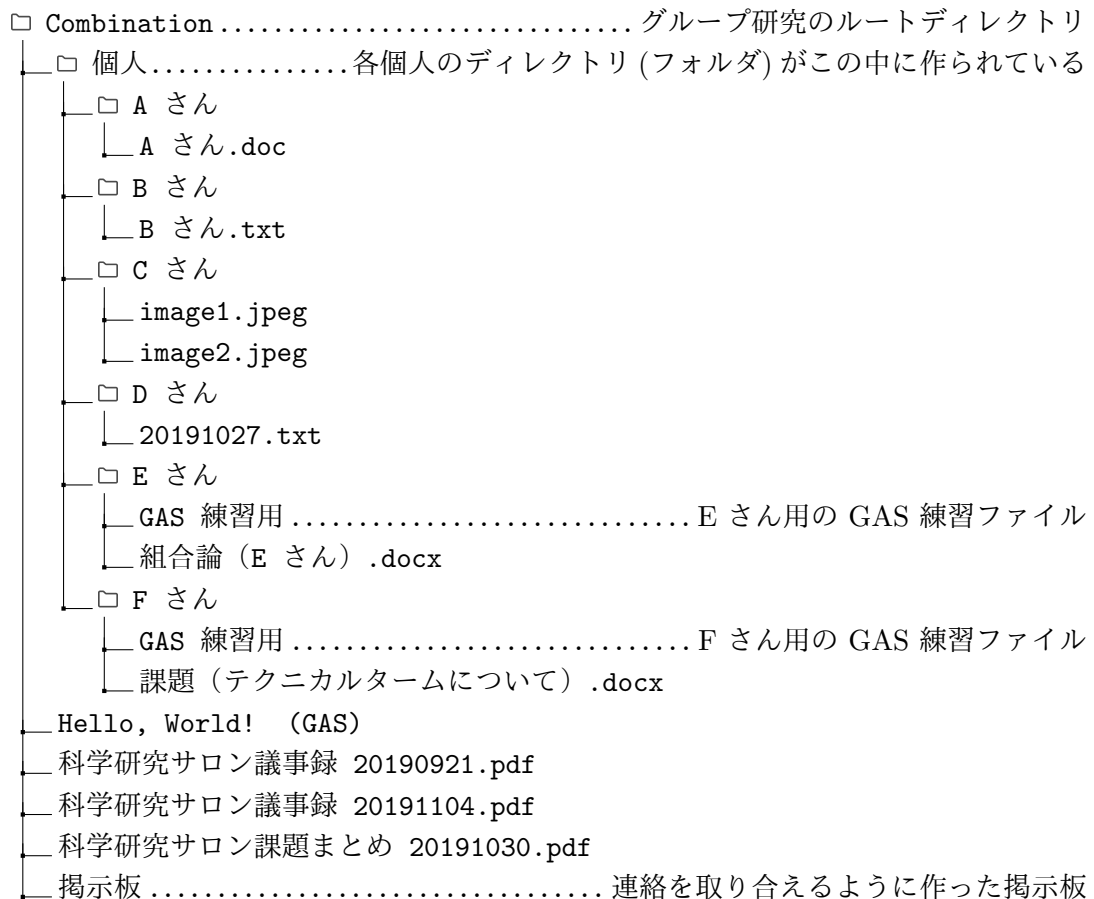
Zoom などの Web 会議サービスもあるが、Skype は無料で使え、接続の時間制限などもないという理由から選択した。文字、音声、映像、ファイル等のやり取りが可

能で、履歴も残るため確認や整理が容易であった。また、グループチャット機能を使うことにより、質問やディスカッション等時間や場所を選ばずにやり取りが出来た。

Google Drive 等

研究資料やメモなどの保管及び共有の場所として用いた。また、生徒個人々にフォルダを作成し、個人間のフォルダは自由に閲覧できるようにした。これにより、必要に応じて生徒間でもやり取りが出来るように考えたが、そこまでの利用には至らなかった。しかし、ファイルの管理及び共有が容易であったため成果の整理などには大いに役だった。

一例として科学者の芽成長促進プログラムで用いた Google Drive の構成を以下に記す。(プライバシー保護のため、受講生の名前は伏せてある。また、ファイルも一部省略してある。)ここでは、[Combination] をこのグループ研究のルートディレクトリとしている。その中に、[個人] というディレクトリがあり、さらにその中に個人用のディレクトリが作成されている。



4 Overleaf によるポスター作成

Overleaf とは、クラウドベースのオンラインリアルタイム共同 L^AT_EX エディターである。自身の PC に T_EX 環境を構築せずとも、Web ブラウザで直接 L^AT_EX ドキュメントを

作成・編集できるため、大変便利なオーサリングツールである。この Overleaf を使用した、ポスター作成のポイントを説明する。

4.1 Overleaf を使用するための前準備

Overleaf の使用を開始するには、Web ブラウザより <https://ja.overleaf.com/> にアクセスし、アカウントを作成する必要がある。すでにアカウントを持っている場合は、ログインすると Overleaf のプロジェクト管理ページが表示される。プロジェクト管理ページから「新規プロジェクト」のボタンをクリックすることにより、論文やレポート、ポスターなどを「プロジェクト」別に新規作成することにより、そこからドキュメントの作成を開始することができる。

4.2 ポスター作成のための前準備

Overleaf 内のコンパイル環境には pdfL^AT_EX, L^AT_EX, X_YL^AT_EX, LuaL^AT_EX が用意されており、TeX Live のバージョンと合わせて、何を使うかを選択する必要がある。初期設定では、2020 年 11 月現在 pdfL^AT_EX (TeX Live 2020) となっている。これらの変更は、各プロジェクト内の左上の「メニュー」から選択することができる。

Overleaf で pL^AT_EX⁶ ドキュメントをコンパイルするには、プロジェクトのコンパイラ設定を「LaTeX」に設定してから、以下の内容が書かれた（ファイル拡張子なしの）`latexmkrc` という名前のファイルをプロジェクトに追加する必要がある。

```
$latex = 'platex';  
$bibtex = 'pbibtex';  
$dvi2pdf = 'dvipdfmx %0 -o %D %S';  
$makeindex = 'mendex %0 -o %D %S';
```

upL^AT_EX を用いたい場合は、上記の内容の「platex」を「uplatex」に変更し、「pbibtex」を「upbibtex」に変更して `latexmkrc` ファイルを作成する。

4.3 ポスターの作り方

L^AT_EX 等を用いたポスターの作成には色々な方法があるが、ここでは Beamer を用いた方法を紹介します。大雑把な作成イメージとしては、ポスターサイズの大きな 1 枚スライドを準備し、そこに順次内容を加えていくという作り方である。

中身の作成には、Beamer でスライドを作っていくのと同じ感覚で作成できる。以下にポスター作成のための Tips を紹介する。

⁶他のコンパイラの設定等については <https://ja.overleaf.com/learn/latex/Japanese> を参照すること。

4.3.1 用紙の設定

A0⁷・縦長⁸のサイズでポスターを作成する例を示す。また、このままではフォントサイズ⁹が小さいのでここも調節する。以上の用紙サイズ及びフォントサイズを設定するためには、プレアンブルに以下の一行を書き加えれば良い。

```
\usepackage[orientation=portrait, scale=1.2, size=a0]{beamerposter}
```

4.3.2 Beamer の諸設定

Beamer のテーマとカラーテーマを設定する。これには色々なテーマとカラーテーマが準備されている。図 2, 図 3 のポスターでは

```
\usetheme{Frankfurt}
\usecolortheme{whale}
```

という設定を選んでいる。また、スライドでナビゲーションシンボル及びヘッドラインを非表示にする為に、プレアンブルに以下の内容を書き加える。

```
\setbeamertheme{navigation symbols}{}
\setbeamertheme{headline}{}
```

更に、著者、所属、日付の部分の色を黒色に指定するために、プレアンブルに以下の内容を書き加える。

```
\setbeamercolor{author}{fg=black}
\setbeamercolor{institute}{fg=black}
\setbeamercolor{date}{fg=black}
```

4.3.3 ブロック環境の追加

Beamer のブロック環境には block, alertblock, exampleblock の 3 つが準備されている。しかし、他のブロック環境を用いたいことも多々ある。例えば図 3 のポスターの参考文献の表記に用いているブロック環境は以下のような設定で作られている。

```
\newenvironment<>{reference}[1]% 参考文献ブロック
{\setbeamercolor{block title}{fg=black,bg=yellow!75} % ブロックタイトルの色を設定
\setbeamercolor{block body}{fg=black, bg=yellow!25} % ブロック本体の色を設定
\begin{center}\begin{minipage}{.95\linewidth} % ブロックの幅を設定
\begin{block}#2{\centering#1}}
{\end{block}\end{minipage}\end{center}}
```

上記の内容を参考に該当箇所を適宜変更すれば、オリジナルのブロック環境が作成できる。

⁷他の例として模造紙(四六版)サイズ(788 x 1091)の場合は size=custom, width=78.8, height=109.1 とする。

⁸横長にしたい場合は orientation = landscape とする。

⁹scale を設定しない場合 (scale = 1.0) は documentclass で設定されているサイズそのものになる。

4.3.4 二段組み

図 2 のように 1 : 2 と変則的な幅で二段組みをしたい場合は Beamer に実装されている `columns` 環境を用いる方法が便利である。

```
\begin{columns}[t]
  \begin{column}{0.30\paperwidth} % 左列のはじまり
    % 左列に書く内容
  \end{column}

  \begin{column}{0.60\paperwidth} % 右列のはじまり
    % 右列に書く内容
  \end{column}
\end{columns}
```

5 まとめ

Skype や Google Drive などを用いて、オンラインでもすぐに質問や相談などのやり取りができるよう整備したため、コミュニケーションがスムーズに行えた。特に、グループ間で資料を共有できるようにまとめ上げていたため、資料が繁雑にならずまとめ作業が容易になったことは指導者、受講生共に非常に助かった。そのおかげで研究時間の確保やスケジュール管理がしやすく、かなり高度で発展的な内容にまで対応することができた。

当初、グループ研究の成果のまとめとしてポスターを作成する際、複数人で PowerPoint での共有やバージョン管理などをする我也想定していた。しかし数学のポスターということで数式も多く、管理が繁雑になってしまうと思い、Overleaf による $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ でのポスター作成を行った。受講生にとって $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ は初めて使うため、最初は相当な戸惑いもあったが、上記の環境整備のおかげで使いづらさのハードルが比較的下がった。また、Overleaf などは情報共有や使いやすさが好評であり、PowerPoint などのようにメールでのやり取りが不要になったためポスターや資料の共同製作が容易であった。

これらを踏まえると、情報共有などの利便性が整っていればソフトウェアなどを使用するにあたり戸惑いが生まれるようなものであっても、比較的容易に習得できる可能性が高いことが分かった。また、多少難しくても応用性や拡張性があるものは、使いこなせるようになっていくにつれて自発的に使用してくれる可能性もあることが分かった。

最後に受講生が Overleaf で資料を作成したときの画面をキャプションしたもの (図 1)、HiGEPS で高校生が作成したポスター (図 2)、科学者の芽成長促進プログラムでメンターが受講生の代理で入力して作成したポスター (図 3) を紹介する。



図 1: Overleaf での作成画面

6 謝辞

本実例報告は、埼玉大学ハイグレード理数高校生育成プログラム (科学技術振興機構 (JST) グローバルサイエンスキャンパス事業) 及び科学者の芽成長促進プログラム (科学技術振興機構 (JST) ジュニアドクター育成塾事業) の助成を受けて行われた研究指導から得られたものです。

参考文献

- [1] 中川幸一, 柿沼悠樹, 吉岡孝浩『高校生による研究活動と数学ソフトウェア』数式処理, 25(2), (2019), pp. 48–51.

Thomson Cubicの特異点論的分類

柿沼悠樹¹ 吉岡孝浩²

¹埼玉県立所沢北高等学校 ²さいたま市立浦和高等学校
2019年4月13日@埼玉大学 HiGEPS アドバンスドコース受講生研究発表会

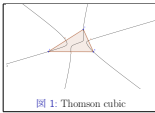
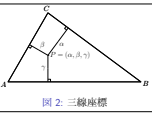
概要

一般的に特異点論を用いた平面曲線分類手法として Hesse 行列とよばれる行列の退化具合によって分類する方法が知られている。本研究では三角形三次曲線の Thomson cubic についてこの手法を取り入れて分類を行った。その結果、基準三角形の形状が不等辺三角形、二等辺三角形、正三角形のときに、それぞれ異なる形状の Thomson cubic が得られることが分かった。

序論

Thomson cubic の定義

基準三角形 ABC と同一平面上の点 X とその等角共役点 X' と重心 G が同一直線上にある曲線のことである。(図 1)

また基準三角形を利用した三線座標 (図 2) を用いて表すと以下の通りである。

Thomson cubic の三線座標

$$ab\gamma(\alpha^2 - \beta^2) + ca\beta(\gamma^2 - \alpha^2) + bca(\beta^2 - \gamma^2) = 0$$

Thomson cubic は三角形の各頂点 A, B, C , 各辺の中点 M_A, M_B, M_C , 垂線の足 H_A, H_B, H_C , 傍心 J_A, J_B, J_C , 内心 I , 重心 G , 外心 O , 垂心 H , 類似垂心 K の全てを通る。この性質により **17 点三次曲線**ともいわれている。

二次曲線の種類

二次曲線とは二次曲面 $z = f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$ を平面 $z = k$ で切ったときの平面上に現れる曲線とみなせる。

二次曲面のアフィン変換

- 原点を通る $\rightarrow a_{10} = a_{01} = 0$
- 原点で特異点を持つ $\rightarrow a_{10} = a_{01} = 0$
- 原点を中心にうまく回転させる $\rightarrow a_{11} = 0$

以上より $f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2$ の形で考えることにする。

Hesse 行列と特異点の種類

原点に対して $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$, $\det H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ としたとき

- $\text{rank } H = 2 \iff \det H \neq 0$: 非退化特異点
- $\text{rank } H < 2 \iff \det H = 0$: 退化特異点

二次曲線の分類

二次曲線の特異点論を用いて分類すると以下のようになる。ただし $a, b > 0$ とする。

関数	$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
$z = ax^2 + by^2$			
	実(楕)円	点(楕)円	虚(楕)円
$z = ax^2 - by^2$			
	双曲線	交叉二直線	(双曲線)
$z = ax^2$			
	実平行二直線	三重直線	虚平行二直線
$y = ax^2$			
	放物線		

Thomson Cubic の分類

Thomson cubic は $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ なる三次齊次式であるので射影平面とみなすことができる。よって、全成分を γ で割り、 $x = \frac{\alpha}{\gamma}, y = \frac{\beta}{\gamma}$ と置き換えたアフィン平面で考えることにして

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right) \rightarrow (x, y)$$

と変換する。

Thomson Cubic の変換

$$f(x, y) = a\alpha x^2\gamma - b\alpha x\gamma^2 - abx^2 + aby^2 + bcx - acy = 0$$

この関数が (p, q) で特異点を持ち、 $f(p, q) = 0$ を満たすと仮定する。

(p, q) で特異点を持つ $f(p, q) = 0$ を満たす条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p, q) = \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) = f(p, q) = 0 \iff \begin{cases} 2acpq - bcq^2 - 2abp + bc = 0 \\ acp^2 - 2bcpq + 2abq - ac = 0 \\ acp^2q - bcpq^2 - abp^2 + abq^2 + bcp - acq = 0 \end{cases}$$

これを計算すると $p = \pm q$ という条件が得られ、 $(x, y) = (p, \pm p)$ 上に特異点が現れることが分かる。このとき $(a, b) = \left(\frac{c(1+p^2)}{2p}, \pm \frac{c(1+p^2)}{2p}\right)$ という関係が得られ、これは基準三角形が二等辺三角形であることを表している。

特異点を持つときの Hesse 行列

$$(a, b) = \left(\frac{c(1+p^2)}{2p}, \pm \frac{c(1+p^2)}{2p}\right) \text{ のとき Hesse 行列は } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(p,\pm p)} = \begin{pmatrix} \mp \frac{c(p^2+1)(p^2+2p+1)}{2p} & \frac{c(p^2+1)(p^2+1)}{2p} \\ \frac{c(p^2+1)(p^2+1)}{2p} & \pm \frac{c(p^2+1)(p^2-2p+1)}{2p} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(p,\pm p)} = \frac{c^2(p-1)^2(p+1)^2(p^2+1)^2}{4p^4} \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

特異点を持つときの Hessian

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(p,\pm p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(p,\pm p)} = \frac{c^4(p-1)^4(p+1)^4(p^2+1)^4}{4p^4}$$

となる。よって Hesse 行列と特異点の種類より分類ができ、以下のことが分かる。

Hessian の値と基準三角形

- Hessian の値が 0 でない。即ち、 $p \neq \pm 1$ 。このとき、 $a = b (\neq c)$ より、基準三角形は二等辺三角形となる。
- Hessian の値が 0 である。即ち、 $p = \pm 1$ 。このとき、 $a = b = c$ より、基準三角形は正三角形となる。

Hessian が 0 の Hesse 行列の階数

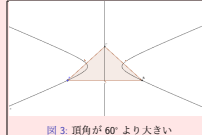
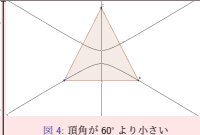
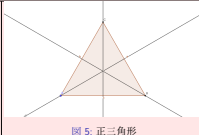
Hessian が 0 であるとき、一般的に 2 変数の場合は、Hesse 行列の階数は 0 または 1 になる。しかし、Thomson cubic の場合は、上記の通り Hesse 行列の形より階数は 1 にならないことが容易に分かる。よって、Hessian が 0 であるとき、Hesse 行列の階数は 0 であることが分かる。

これらの条件のもとに Thomson cubic の概形がどのようなものになるかを GeoGebra を用いて描き観察した。その結果、以下のような分類になることが分かった。

基準三角形と Thomson cubic の概形

- 不等辺三角形 ($a \neq b \neq c$) のとき、非退化 (既約三次曲線)。(図 1)
- 二等辺三角形 ($a = b \neq c$) のとき、頂角から対辺への垂直二等分線 (一次曲線) と双曲線 (既約二次曲線) からなる二次曲線を描く。
 - 頂角が 60° より大きい ($a = b < c$) のとき、直線と双曲線は交わらない。(図 3)
 - 頂角が 60° より小さい ($a = b > c$) のとき、直線と双曲線は交わる。(図 4)
- 正三角形 ($a = b = c$) のとき、三本の直線 (一次曲線) が 1 点で交わる。(図 5)

これは、基準三角形が二等辺三角形のときの「 60° より大きい」と「 60° より小さい」の分岐にあたる。

今後の展望

- 今回は Thomson cubic についての分類だったが、その元となる pK 型の三角形三次曲線 $s_7(ta^2 - u\beta^2) + t\beta(u\gamma^2 - sa^2) + ua(s_3\beta^2 - t\gamma^2) = 0$ についても同様に考えていきたい。
- 三角形の中心を結んでできる曲線を探して興味深い性質を発見していきたい。
- 三角形三次曲線だけでなく、一般の三次曲線の分類を行いたい。
- 身近な数学の問題をさらに特異点論を通して観察したい。

参考文献

- [1] 岩田宗雄編『幾何学大辞典第 1 巻』横濱市、1971 年
- [2] Wrostein, Eric W. "Thomson cubic". <http://mathworld.wolfram.com/ThomsonCubic.html>
- [3] Gilbert, B. "Thomson Cubic". <http://bernard.gilbert.pagespersoorange.fr/Exemples/A002.html>

外部発表

日本数式処理学会 第 14 期第一回教育分科会にて口頭発表 ©神戸大学第二キャンパス, 2019 年 2 月 24 日

図 2: HiGEPS で高校生が作成したポスター

組合せ論とその周辺

岡田 理臣 玉田 一暁 三好 奏太 山本 大智

2020年2月8日@埼玉大学 研究発表会

概要

組合せ論とは、ある集合からある条件を満たすような選び方の総数などを研究する数学の一分野である。今回は、組合せ論に関する内容として、ゲームと組合せ、PCを用いた場合の数、漸化式などについて、各自が調べたことをまとめた。

組み合わせについて (山本 大智)

組合せの目的
異なる n 個のものから r 個を選ぶ場合の組合せの数をPCで出力する。

組合せの計算方法 (具体例: ${}_nC_r$)
 ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
 n の数から1つずつ数を下げながら r 個のかけ算
 1から数を上げ r 個のかけ算

- 4から数を下げて2個のかけ算をする $\Rightarrow 4 \times 3 = 12$
- 1から数を上げて2個のかけ算をする $\Rightarrow 1 \times 2 = 2$
- 上記の2数のわり算をする $\Rightarrow 12 \div 2 = 6$

以上より ${}_4C_2 = 6$ と求められる。

Excelを使って計算する方法
 ${}_nC_r$ の場合では、
= COMBIN(4,2)
と入力すると簡単に求められる。

組合せの目的
異なる n 個のものから r 個を取り出して1列に並べる数をPCで出力する。

組合せの計算方法 (具体例: ${}_nP_r$)
 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
 n の数から1つずつ数を下げながら r 個のかけ算

- 4から数を下げて2個のかけ算をする $\Rightarrow 4 \times 3 = 12$

以上より ${}_4P_2 = 12$ と求められる。

Excelを使って計算する方法
 ${}_nP_r$ の場合では、
= PERMUT(4,2)
と入力すると簡単に求められる。

まとめ

- n 個のものから r 個選ぶには、いくつ組み合わせがあるかを ${}_nC_r$ を使って求めた。
- そして Excel を使って簡単に求める方法について調べた。
- Excel などを使って簡単に関数などを計算して求められることを知り、もっと色々な複雑な計算を求めたいと思った。

参考文献
[1] 高校生向け受験応援メディア「受験のミカタ」: 「高校数学」1から分かる順列と組み合わせの違い(公式問題付き)。(<https://pubs-milota.net/how-to/mathematics/permutation.html>)

漸化式・カタラン数 (岡田 理臣)

定義 (カタラン数)
 $C_n := \frac{2nC_n}{n+1}$
とおく。この C_n を n 番目のカタラン数という。

三角形分割
凸多角形に頂点以外では互いに交わらない対角線を引いて三角形に分割すること。
 $A_n: (n+2)$ 角形を $(n-1)$ 本の対角線で三角形分割する方法の総数

五角形の三角形分割 ($A_3 = 5$)

Dyckパス (及び $B_5 = 5$ の例)
 $n \times n$ 格子上の左下の頂点から右上の頂点への最短経路で、対角線より上側を通らない行き方のこと。
 $B_n: n \times n$ 格子上のDyckパスの総数
格子点の右下に書かれている数字は、スタート地点からその格子点までの最短経路のパスの総数を表している。AB上にAの次の格子点から順に B_1, B_2, B_3 の値が現れている。つまり、AからBまでのDyckパスの総数が $B_5 (= 5)$ となる。

定理 (組合せとカタラン数の漸化式)
 $A_n = B_n = C_n = \frac{2nC_n}{n+1}$
 $C_0 = 1$ とおくと以下の漸化式が成り立つ。
 $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$

カタラン数の漸化式の説明

$$A_3 = A_0 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot A_0$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

参考文献
[1] 耕田 幹也, 堀川 由貴子, 「格子からみえる数学」, 日本評論社, 2013年, pp.160-188.

ポーカーの役と組合せ (玉田 一暁)

ポーカーのルール
配られた5枚のカードの中から、いらないカードを交換し、役の強さを競い合うゲームである。

組合せの数

役の名前	式と組合せ (ジョーカーなし)	式と組合せ (ジョーカーあり)	式と組合せ (53枚中)
ファイブカード	存在しない	13	13
ロイヤルストレートフラッシュ	4	$1 \times 4 \times 5 = 20$	24
ストレートフラッシュ	$4 \times 10 - 4 = 36$	$9 \times 4 \times 5 - 9 \times 4 = 144$	180
フォーカード	$13 \times 48 = 624$	$13 \times {}_4C_3 \times 48 = 2496$	3120
フルハウス	$13 \times {}_4C_3 \times 12 \times {}_4C_2 = 3744$	$13 \times {}_4C_2 \times 12 \times {}_4C_2 + 2 = 2808$	6552
フラッシュ	$4 \times {}_{13}C_5 - 36 - 4 = 5108$	$4 \times {}_{13}C_4 - 20 - 144 = 2696$	7804
ストレート	$10 \times 4^5 - 36 - 4 = 10200$	$(10 \times 5 - 9) \times 4^5 - 144 = 10332$	20532
スリーカード	$13 \times {}_4C_3 \times \frac{48 \times 44}{2} = 54912$	$13 \times {}_4C_2 \times 48 \times 44 + 2 = 82368$	137280
ツーペア	$\frac{13 \times {}_4C_2 \times 12 \times {}_4C_2}{2} \times 44 = 123552$	存在しない	123552
ワンペア	$13 \times {}_4C_2 \times \frac{48 \times 44 \times 40}{3} = 1098240$	$52C_4 - (\text{上記のもの}) = 169848$	1268088
ノーペア	$52C_5 - (\text{上記のもの}) = 1302540$	存在しない	1302540

気をつけること
重複に気をつけ、フォーカード、スリーカードなどの場合は、役を作るカードで使った数字は独立したカードでは使わない。

まとめ
ジョーカーが手札にある場合は、ノーペアとツーペアが出ず、強い役が出やすいので、ジョーカーがあった方が良かった。

セブンブリッジの手札と役の組合せ (三好 奏太)

セブンブリッジの手札と組合せの数、最初に配られた7枚の手札の中で役ができる組合せの数を調べた。

セブンブリッジのルール
カードの組合せを作り、役ができた場に捨て、先にカードが無くなったら勝ち。カードの組合せ(役)は以下のルールに従う。
ボン 同じ数字のカード3枚以上 (例: ♠7, ♠7, ♠7)
チー 同じマークで数字が続く3枚以上 (例: ♠7, ♠8, ♠9)
セブン 7を1枚(連続する同じマークの6または8があれば2枚でも可)
トランプ 52枚から7枚取るときの手札の組合せの数は以下の通りである。
$$\binom{52}{7} = \frac{52!}{7!(52-7)!} = 1 \text{億} 3378 \text{万} 4560 (\text{通り})$$

5枚(1枚+1枚+3枚パターン)捨てられる役の組合せの数

- 1枚の役は7が1枚、4通り
- 2つ目の1枚の役は、7を1枚使っているので、3通り
- 3枚の役がチーの場合44通りだが、7を2つ使っているので $4 \times 3 \times (44 - 3 \times 2) = 456$ 通り
- 3枚の役がボンの場合52通りだが、7を2つ使っているので $4 \times 3 \times (52 - 2 \times 2) = 576$ 通り

以上より $456 + 576 = 1032$ 通り

その他の捨て方のパターンの組合せ

捨てられるカードの枚数	1	2	3	4	5	6	7	合計
組合せの数	4	14	120	461	3124	11585	33616	48924

まとめ

- 最初の手札の配られ方は全部で133784560通りあった。
- そのうち、1枚以上の捨て方が48924通りあった。
- 役の組合せの数は捨てられる枚数ごとに、役のパターンを分けて考えた。
- 同じ数字(特に7)は4つまでしか使えないということに気をつけた。

図 3: 科学者の芽成長促進プログラムでメンターが受講生の代理で入力して作成したポスター