Visual approximation of continued fractions

日本大学大学院理工学研究科 杉本 和希・西林 大樹
日本大学 川島 誠・鈴木 潔光・利根川 聡・鷲尾 夕紀子・平田 典子

1 はじめに

本稿では，有理数を用いて無理数を近似する最良の方法と言われる連分数展開について，GeoGebra による援用を活用し，無理数のディオファントス近似及び関連する数論的性質を考究する．リーマンゼータ関数の 5 以上の正奇数での値，例えば $\zeta(5)$ の無理数性や超越性（いずれも未解決，[18] 参照）に関する観察を目的とした GeoGebra 及び Mathematica による動的教材についても報告する．

なお連分数の言葉で表される，実数の超越性判定条件に関する研究は，近年著しい進展を見せた [1][2][4][7][15]．これらの判定条件に照らすことのできる ICT 教材構築が今後の目標である．

2 連分数の一般論

まず基本的な文言の定義を行い，連分数とは何かということを概説しよう．整数環を $\mathbb{Z}$, 有理数体を $\mathbb{Q}$, 実数体を $\mathbb{R}$ と表記する．実数 x の最大整数部分，つまり x 以下の最大の整数（いわゆる床関数）を $\lfloor x \rfloor$ と書く．例えば $\lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor 3.14 \rfloor = 3, \lfloor -3.14 \rfloor = -4$ である．

定義 2.1 (連分数展開と n 次近似分数)**.** $\omega \in \mathbb{R}$ とする．$a_0 = \lfloor \omega \rfloor \in \mathbb{Z}$ に対し $\omega - a_0 = 0$ ならば $\omega = a_0$，$\omega - a_0 > 0$ ならば $0 < \omega - a_0 < 1$ の逆数をとり，分母の床関数の値を a_1 とおいて a_1 を引き逆数をとる操作を繰り返すと，$0 < a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

と表される．このように，最大整数部分を引いて逆数をとり続ける操作による実数の表記を ω の**連分数展開**，特に常に分子が 1 の形の場合に，**正則連分数**と言う． 単に連分数展開という場合はこの正規連分数による展開を考えるものとする．

$\omega < 0$ ならば，a_0 を負にとっておけば，$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ は (0 になって止まる場合以外は）正整数になる．連分数展開が有限で止まる，つまり或る番号 n で $a_n = 0$ となる場合は必ず $\omega \in \mathbb{Q}$ となる．この対偶を考えると $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ならば，ω の連分数展開は無限に続く．

2.1 連分数展開を用いた有理数による無理数の近似

以下，本節では無理数の連分数展開を考える．

無理数 $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の連分数展開を添字 n の $a_n \in \mathbb{Z}$ で止めて得られる有理数を

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$$

と表し（ただし $p_n, q_n \in \mathbb{Z}, q_n > 0$, $\gcd(p_n, q_n) = 1$ とする）n 次近似分数という．また，各 a_n を部分商という．

注意 2.1. 一意性を度外視して，分子が 1 とは限らない連分数を考える場合もある．本稿ではそれを**非正則連分数**ということにする．正則連分数の数表がたとえ大量に計算できても，正則連分数の数学的な規則性，或いは不規則性の厳格な証明を持つ数は殆どない．連分数展開に依存しない証明によって，円周率は超越数従って無理数であることが知られているため，連分数展開は有限で止まらず，後述のように周期も持たないことは得られるが，それは円周率の正則連分数の数表から従うものではない．

命題 2.2. $n \geq 1$ に対して n 次近似分数は

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

及び　$p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$ を満たす．特に p_n, q_n は互いに素となる整数である．

行列で表示すると以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proof. 一般論 [14][17] より従う．

定理 2.3 (L. G. P. Dirichlet の定理 [17])**.** $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．このとき

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

を満たす $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \gcd(p, q) = 1)$ は無限個存在する．

$\overline{\mathbb{Q}}$ を代数的数 (有理数係数一変数多項式の根) 全体のなす集合とする．代数的数は体を成し，必ず複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれることが知られている．また n 次代数的数とは，その数が零点になる有理数係数一変数の（有理数体上での）既約多項式の次数が n 次であるときに

いう．例えば黄金数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は $x^2-x-1=0$ という $\mathbb{Q}$ 係数の $\mathbb{Q}$ 上での 2 次の既約多項式の解であるので，2 次代数的数である．

$\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{Q}}$ の元は非可算集合である．この $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{Q}}$ の元を超越数と称する．

上記の Dirichlet の定理の counter part として，以下の定理が成立する．

定理 2.4 (K. F. Roth の定理 [17]). $\omega\in\overline{\mathbb{Q}}\setminus\mathbb{Q}$ 即ち ω は代数的無理数であるとする．

任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

を満たす $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\ \ (p,q\in\mathbb{Z},q>0,\gcd(p,q)=1)$ は有限個に限る．

Dirichlet の定理は，無理数は有理数で**良く近似できる**ことを示すが，Roth の定理は，その無理数が代数的数の場合，**有理数による良い近似を持たない**ことを意味する．有理数によって無理数への数論的に意味のある近似を与えることを，一般に無理数の有理近似という（詳しくは述べないが距離を用いずに高さという関数を用いた近似，ここでは近似する分数の分母を用いた近似）．

以下はよく知られた事実である [14] [17].

定理 2.5. 任意の無理数 ω は無限連分数展開を持ち，

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2} \tag{1}$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\omega$ が成り立つ．逆に任意の無限連分数は実数を定めるが，その実数の連分数展開は与えられた無限連分数と一致する．

式 (1) の右辺より，q_n が大きな整数のときには ω と有理数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ との距離が小さいことが見て取れる．さらに，ディオファントス近似の観点から，連分数展開による有理近似に関して以下の 2 定理が成立する [17].

定理 2.6 (A-M. Legendre の定理). $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ とする．このとき

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}$$

を満たす $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\ \ (p,q\in\mathbb{Z},q>0,\gcd(p,q)=1)$ は必ず ω の近似分数になる．

定理 2.7 (K. Th. Vahlen の定理). $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対して $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\dfrac{p_n}{q_n}$ を連続した ω の近似分数とするとき，2 個の近似分数のうちの一方は必ず次の不等式を満たす.

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}.$$

以上の定理より，無理数に良く近づく有理近似を与える有理数は，本質的に連分数展開から得られるものであると言って良い．

ここで無理数性と同値な条件を述べたディオファントス近似の命題を述べておこう [17]．次の命題が成立する．

命題 2.8. ω を実数とする．次の 4 項目 (1)(2)(3)(4) は全て同値である．

(1) $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ が存在して次の不等式を満たす：

$$0 < \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

(3) 任意の実数 $Q > 1$ に対し，整数 q が $1 \leq q < Q$ の範囲に，また整数 p が存在して次の不等式を満たす：

$$0 < \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

(4) 無限個の $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ が存在して次の不等式を満たす：

$$0 < \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

上記の (1) ならば (4) という部分が Dirichlet の定理に相当する．(2)(3)(4) を満たすような速い近似を与える有理数の数列構成ができれば，実数の無理数性が従うということになるが，実際にはこのような数列を構成するということそのものが，難問なのである．

2.2 連分数展開と超越数

定義 2.2 (部分商)**.** $K(\omega) = \sup_{n \geq 1} a_n$ とおく．

$K(\omega) < \infty$ のとき，**部分商が有界**であるといい，$K(\omega) = \infty$ のとき**部分商が非有界**である，もしくは ω は BAD=Badly approximable であるという．

一般に以下の事実が知られている [14]．

命題 2.9. $\omega \notin \mathbb{Q}$ の連分数展開の部分商 a_n について，
ある添字から先は周期的 $\Longleftrightarrow$ ω は 2 次の代数的無理数 (即ち $\mathbb{Q}$ 係数 2 次方程式の根）．

従って，2 次の代数的無理数以外の実数 ω に対しては，部分商は周期的ではない．一方，部分商が周期的ならば有界になる．しかし有界ならば周期的であるとは勿論いえない．

広く信じられている，A. Ya. Khinchin による次の予想がある [12, p.50]．

予想 2.10. 3 次以上の実代数的無理数 ω の部分商 a_n は非有界，即ち $K(\omega) = \infty$ であろう．

3 次以上の代数的無理数である実数で，部分商が非有界な例は，現時点で一つも知られていないのである！

注意 2.11. 部分商が有界な例として次がある．Thue-Morse 数列という -1 と 1 のみ（0 と 1 のみでも良い）から成る，周期的にはならないが有界な数列を第 n 次部分商とする，無限正則連分数の収束極限である実数は，超越数である *[15].* 部分商が非有界である正則連分数展開で与えられる実数の例としては $[1, 2, 3, \cdots, n, \cdots]$ が Modified second Bessel 関数 $I_n(z)$ と呼ばれる関数で表されて $\dfrac{I_0(2)}{I_1(2)}$ という値になる．

なお Thue-Morse 数列のような，一般に（一定の規則をもつ）automatic と呼ばれる数列と連分数との関係，予想 2.10 を含む未解決予想については別の機会に解説するが，正則連分数の部分商 a_n のところに，automatic 数列の各項を用いて作った連分数が定める実数は，Thue-Morse 数列と同様，必ず超越数になる [3].

3　連分数の図示

3.1　Ford 円による連分数による収束速度の図示

定義 3.1 (Ford Circle)**.** $p \in \mathbb{Z}$ と $0 < q \in \mathbb{Z}$ は互いに素であるとする．$\mathbb{R}^2$ 平面において中心 $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2q^2}$ の円を Ford 円と言い，$C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ で表す.

この定義は L. R. Ford [9] による．この円に関して知られていることを述べる．

定理 3.1 (L. R. Ford の定理)**.** 次が成立する．

1.) 2 円 $C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ と $C\left(\dfrac{r}{s}\right)$ が外接する $\Longleftrightarrow ps - qr = \pm 1$.

   つまり $ps - qr \neq \pm 1 \Longrightarrow C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ と $C\left(\dfrac{r}{s}\right)$ は共有点を持たない.

2.) 2 円 $C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ と $C\left(\dfrac{r}{s}\right)$ が外接 $\Longrightarrow$ 円 $C\left(\dfrac{p+r}{q+s}\right)$ は $C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ と $C\left(\dfrac{r}{s}\right)$ の両方に外接.

3.) 近似分数 $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}$ は $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$ を満たすことより，第 $n-1$ 次近似分数と第 n 次近似分数の Ford 円は外接.

連分数展開とは，無理数を有理数の極限値として表すための方法であるが，連分数による実数の有理数近似列，即ち与えられた実数を連分数展開し，その実数に近づく第 n 次近似分数から成る有理数の数列を幾何学的に示す図形が Ford 円である．

定理 3.1 より，n 次近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対する Ford 円 $C\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ を順次描くと，全て互いに外接する．Ford 円では半径が小さいほど，ω に $\dfrac{p_n}{q_n}$ が近づくことを意味する．特に，突然大きな部分商が出現すると q_n が大きくなるため，ω に**急に近づく**小さい Ford 円 $C\left(\dfrac{p}{q}\right)$ が現れることになる．このときの近似分数は，ω の良い近似を与える有理数である．

注意 3.2. 中心の y 座標の値と半径が等しいので Ford 円と x 軸は接し，x 座標が $\dfrac{p}{q}$ であるため，円の x 軸との接点がそのまま有理数である n 次近似分数になる．

4　Riemann zeta 関数の値の連分数展開

以下に概説する Riemann zeta 関数は，複素数に定義域を拡張できることが知られているが，本稿では実数 $s > 1$ に対してのみ考える．

定義 4.1 (Riemann zeta 関数)**.** 実数 $s > 1$ を変数とする Riemann zeta 関数を次で定める:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$\zeta(s)$ は $s > 1$ の範囲で収束する．

正偶数 $2m(m \geq 1)$ での値は $\zeta(2m) = \pi^{2m}\times$ 有理数になることが知られている．この有理数はベルヌーイ数と呼ばれる．例えば L. Euler による Basel 問題の答としての有名な値が $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ である [10]．

一方，3 以上の奇数においての Riemann zeta 関数の値は，謎に満ちている．

4.1　$\zeta(2)$ の連分数展開

$\zeta(2)$ の一つの非正則連分数展開として次が知られる：

$$\zeta(2) = \cfrac{5}{3 + \cfrac{1^4}{P(1) + \cfrac{2^4}{\ddots \cfrac{}{P(n) + \cfrac{n^4}{\ddots}}}}}$$

ただし $P(n) = 11n^2 + 11n + 3$ である．

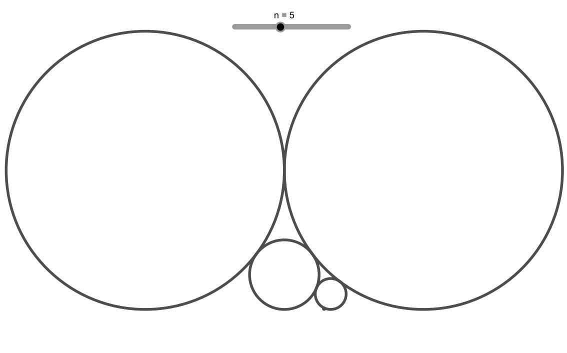

図 1: $\zeta(2)$ の Ford 円表示

この多項式は，Hermite-Padé 近似という数学的に深い理論を用いて求められている．このような多項式の構成は一般には困難である．

$\zeta(2)$，$\zeta(3)$ に対する正則連分数展開に対応する近似分数として，次の数表で与えられている計算結果がある．この連分数展開の近似の表 1 に対する Ford 円が，図 1 に相当するものとなる．

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	2	1	2
2	3	2	$\frac{3}{2}$
3	5	3	$\frac{5}{3}$
4	23	14	$\frac{23}{14}$
5	51	31	$\frac{51}{31}$
6	227	138	$\frac{227}{138}$
7	1640	997	$\frac{1640}{997}$
8	1867	1135	$\frac{1867}{1135}$
9	9108	5537	$\frac{9108}{5537}$

表 1: $\zeta(2)$ の近似分数表

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	5	4	$\frac{5}{4}$
2	6	5	$\frac{6}{5}$
3	113	94	$\frac{113}{94}$
4	119	99	$\frac{119}{99}$
5	232	193	$\frac{232}{193}$
6	351	292	$\frac{351}{292}$
7	1636	1361	$\frac{1636}{1361}$
8	1987	1653	$\frac{1987}{1653}$
9	19519	16238	$\frac{19519}{16238}$

表 2: $\zeta(3)$ の近似分数表

4.2 $\zeta(3)$ の連分数展開

$\zeta(3)$ の正則連分数展開に対応する近似分数の数値は表 2 で与えられているが，この表 2 に対する Ford 円が，図 2 である．

R. Apéry [5] によって 1978 年に $\zeta(3)$ が無理数になることが証明された．連分数の形から，証明の鍵となる近似が推察されたという理由による．F. Beukers による別証明 [8] 及び E. Reyssat による概説 [16] もある．例えば $\zeta(3)$ の非正則連分数展開は次の形を持ち得る．

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 + \cfrac{-1^6}{Q(1) + \cfrac{-2^6}{\ddots \cfrac{}{Q(n) + \cfrac{-n^6}{\ddots}}}}}$$

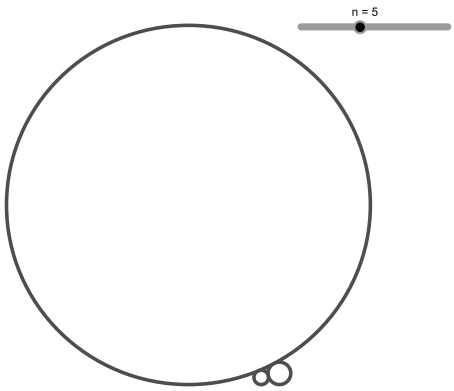

図 2：$\zeta(3)$ の Ford 円表示

ただし $Q(n)=(2n+1)(17n^2+17n+5)$ である．

$\zeta(3)$ の無理数性は証明されたが，代数的数なのか超越数なのかは不明である．しかし Roth の定理などディオファントス近似の一般論より，有理近似がシャープで速いものは超越数と考えて良いことから，超越数であろうと予想されている．この予想を確かめるには，まず有理近似によって元の実数にどの程度のスピードで近づくかという観察が必要であろうと考えられる．

無理数であることが不明な実数に対しては，命題 2.8 の条件を満たす有理数列の構成を試行することも重要である．

4.3 $\zeta(5)$ に対する試み

$\zeta(5)$ は無理数そして超越数であろうと予想されているが，Apéry らの証明を拡張する試みは 40 年間を超えて続けられ，全て失敗している．連分数展開でも，$\zeta(5)$ の正則連分数，及び相当する近似分数の数値計算が表 3 のように与えられているだけで，正当な証明を持つ正則連分数展開を与えた一般式はまだない．図 3 は $\zeta(5)$ の表 3 による第 4 近似分数 Ford 円で，第 5 次近似分数の円（小さい点）が見える．四角の枠内を拡大しよう．

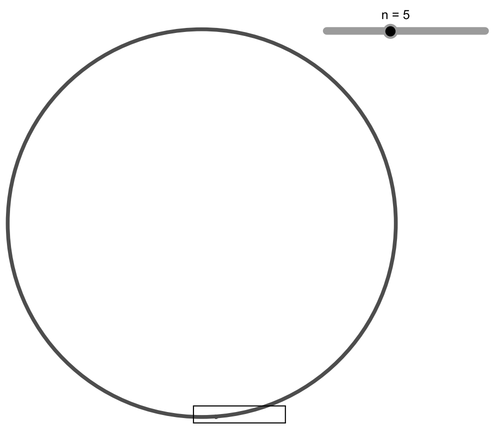

図 3：$\zeta(5)$ の Ford 円 ↑ (小さい点あり)

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	1	1	1
1	28	27	$\frac{28}{27}$
2	337	325	$\frac{337}{325}$
3	365	352	$\frac{365}{352}$
4	702	677	$\frac{702}{677}$
5	10895	10507	$\frac{10895}{10507}$
6	11597	11184	$\frac{11597}{11184}$
7	68880	66427	$\frac{68880}{66427}$
8	80477	77611	$\frac{80477}{77611}$
9	229834	221649	$\frac{229834}{221649}$

表 3: $\zeta(5)$ の近似分数表

図 3 の第 5 次近似分数の Ford 円 (小さい点) のある枠の部分の拡大図が以下である．

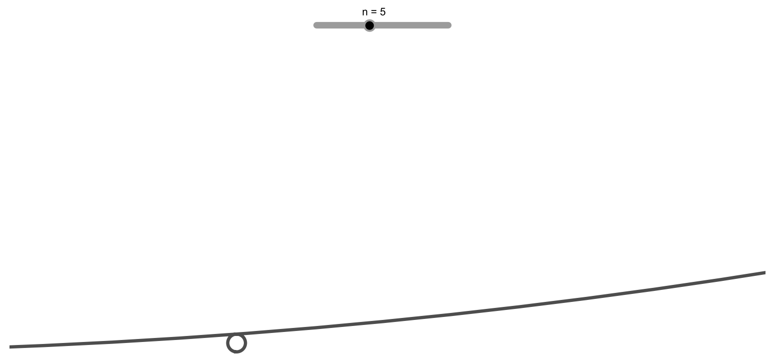

図 4：$\zeta(5)$ の Ford 円 ↑ (小さい点の代わりに $\zeta(5)$ の第 5 次近似分数の Ford 円が見える）

図 4 の大きな円は $\zeta(5)$ の第 4 次近似分数の Ford 円である．急に Ford 円が小さくなるため，良い有理近似であろうことは一見して推察できるが，残念ながら無理数性や超越性が証明できるような有理近似になるという証明はない．なお，図 1・図 2・図 3・図 4 は GeoGebra によるものである．

Riemann zeta 関数の特殊値の Ford 円に対し，高遠節夫先生が tex で素晴らしい動画をお作りになられたので，ここに紹介させて頂く．

$\zeta(2)$ に対する高遠先生の Ford 円

`https://s-takato.github.io/examples/offline/fordcircle2jsoffL.html`

$\zeta(5)$ に対する高遠先生の Ford 円

`https://s-takato.github.io/examples/offline/fordcircle5jsoffL.html`

5　近似分数の Mathematica による視覚化

$\zeta(s)$ において $s \geq 3$ を満たす正奇数における値は，全て無理数そして超越数であろうと予想されている．現在証明済の事実は $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ のみである（[18] 参照）．未解決予想である $\zeta(5) \notin \mathbb{Q}$ も含めて，連分数展開の近似分数及び実際値との比較を Mathematica で視覚化する実験について以下に報告する．

5.1　連分数に対する実験

ここでは実数の連分数展開における第 N 番目の近似分数が，元の値にどの程度近いかということ及び，関数の定義を与える級数で，初項から第 N 項までの有限和が，元の値にどの程度，近くなるかということを，元の値とそれぞれの各項との差をとって，グラフにプロットする実験を行い，Mathematica で可視化した．可視化の効果を測るための問題を設定し，私立大学理工学部 2 年生 51 名に対して，Mathematica 動画を授業において見せる前と見せた後の両方に同じ問いに答えてもらったが，動画視聴後の正答率が高かった（詳細は紙面の都合で割愛する）．

以下はまず連分数という概念を理解してもらうための問いである．

[問い 1]　π の連分数展開に対する問題
円周率 π を考える．π の最大整数部分は 3 なので，$\pi - 3 = 0.141\cdots$ である．
0.141 の逆数をとると $\dfrac{1}{0.141\cdots} = 7.0625\ldots$ であり

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \ddots}$$ となるが，このとき 7 の次に来る整数は何か？

正解は $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\boxed{15} + \ddots}}$ より 15.

即ち，
$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\boxed{15} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$
という操作を続けて得られる有理数は $3 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7}$，$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\boxed{15}}} = \dfrac{333}{106}$，$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\boxed{15} + \cfrac{1}{1}}} = \dfrac{355}{113}$，

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\boxed{15} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = \frac{103993}{33102}$$ で，これらが π の近似分数である．

[問い 2]　Riemann zeta 関数の値に対する問題

$\zeta(3)$ 及び $\zeta(5)$ の値に対し，連分数展開と級数ではどちらが元の値に速く収束するか？

回答の選択肢

(1) 連分数展開，　即ち近似分数列の収束

(2) 級数，　即ち $\zeta(s)$ の定義の級数における，有限部分和の数列の収束．

(3) どちらも同じ

(4) 比較できない

連分数展開と級数では，どちらが元の値に速く収束するか？という問いに対して，その実の値，即ち $\zeta(3)$ 及び $\zeta(5)$ を連分数展開で近似するときの近似分数が，実の値と『何桁

合致しているか』を (青色)，Riemann zeta 関数の定義の級数の初項からの有限和 (オレンジ色) が実の値と『何桁合致しているか』を Mathematica を用いて比較しグラフにした．グラフの横軸が，近似分数列の項数もしくは級数の項数である．たて軸が実の値に合致した小数以下の桁数である．小数点以下 1 桁をマイナス 1 桁というように表示している．

グラフではオレンジ色よりも青色が下に伸びているが，これは青色のほうがオレンジ色に比べ，同じ項数において，小数点以下の値の合致桁数が多いことを意味する．

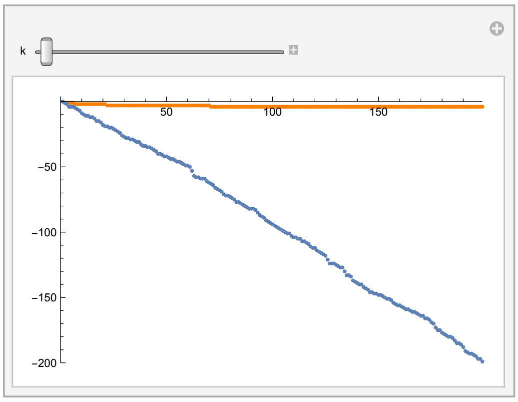

図 5：$\zeta(3)$ の連分数展開と級数

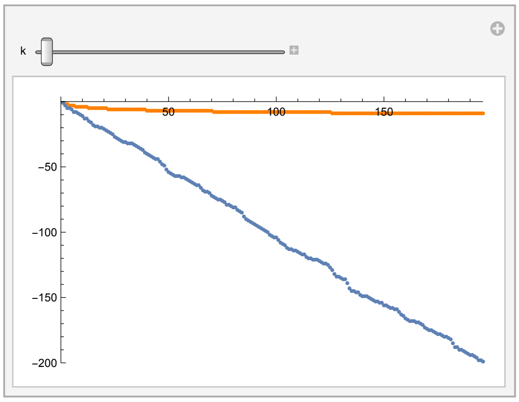

図 6：$\zeta(5)$ の連分数展開と級数

そして問い 2 については次の正解になる．

[正解]　$\zeta(3)$ 及び $\zeta(5)$ に対し，選択肢 (1) の連分数展開が元の値に速く収束する．

5.2　Mathematica による教育効果

Mathematica のグラフを導入することで，問題の答が分かりやすくなったかどうかを受講生に問うた．

Mathematica についてのアンケート設問

1. 分かりやすくなった
2. ある程度は分かりやすくなった
3. あまり分かりやすくない
4. まったく分かりやすくない

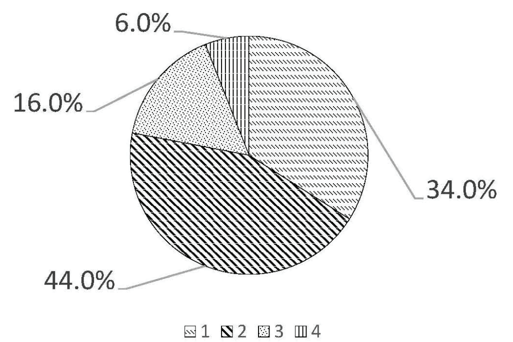

図 7：Mathematica の効果を問うアンケート

アンケート結果の円グラフは図 7 である．「分かりやすくなった」及び「ある程度は分かりやすくなった」という回答を合わせると 78% になったことから，Mathematica 動画を

見せることによる教育効果が，ある程度は得られたのではないかと考えられる．

コロナ下であったために対面授業ができず，オンライン動画配信のみを実施し，受講生自身の手で Mathematica 動画を動かしてもらえなかったのは，極めて残念であった．

6 謝辞

本稿に関しましては木更津工業高等専門学校の山下 哲教授及び，城西大学の大島利雄先生に，全般にわたりお世話になりました．この場をお借りして厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud and L. Davison, *Continued fractions and transcendental numbers*, Ann. Inst. Fourier, **56** (2006), 2093–2113.

[2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math., **165**, (2007), 547–565.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *A Short Proof of the Transcendence of Thue-Morse Continued Fractions*, The American Math. Monthly, **114** no. 6, (2007), 536–540.

[4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Palindromic continued fractions*, Ann. Inst. Fourier, **57** (2007), 1557–1574.

[5] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque no. 61, (1979), 11–13.

[6] J. Borwein, A. van der Poorten, J. Shallit, W. Zudilin, *Neverending Fractionn, An introduction to Continued Fractions*, Australian Math. Soc. Lecture Series **23**, 2014, Cambridge Univ. Press.

[7] Y. Bugeaud, *Transcendence of Stammering Continued Fractions*, In: Number Theory and Related Fields, eds. J. Borwein, I. Shparlinski and W. Zudilin, Springer Proceedings in Math. and Statistics **43**, Springer, 2013, 129–142.

[8] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[9] L. R. Ford, Fractions, The American Math. Monthly, **45**, no. 9 (1938), 586–601.

[10] J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ *and Related Identities,* The American Math. Monthly, **109**, (2002), 196–200.

[11] 川島 誠，平田 典子，ディオファントス近似：無理数とパデ近似, 共立出版, 数学の輝きシリーズ. 刊行予定.

[12] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, First Russian publication in 1935, reprint 1997, Dover Publications.

[13] F. Lindemann, *Über die Zahl* π, Math. Ann. **20**, no. 2, (1882), 213–225.

[14] I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, First edition 1960, Fifth edition, 1991.

[15] M. Queffélec, *Transcendance des fractions continues de Thue-Morse*, J. Number Theory, **73** (1998), 201–211.

[16] E. Reyssat, *Irrationalité de* $\zeta(3)$ *selon Apéry*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, **20**, (1) (1978/79), no. 6, 1–6.

[17] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes Math., **785**, Springer, 1980.

[18] W. Zudilin, *One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational*, Russian Math. Surveys, **56**, (2001), 774–776.

Kazuki Sugimoto,
Hiroki Nishibayash,
Kiyomitsu Suzuki,
Satoshi Tonegawa,
Yukiko Washio
College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

Makoto Kawashima
Department of Liberal Arts
and Basic Sciences
College of Industrial Engineering
Nihon University
Izumi-chou, Narashino, Chiba
275-8575, Japan

Noriko Hirata-Kohno
kouno.noriko@nihon-u.ac.jp
Department of Mathematics
College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan