

工科大学の数学専門科目のオンライン教材

工学院大学教育推進機構 長谷川研二

1 はじめに

筆者は所属先で1990年から学部1年生向けの基礎科目として微分積分と線形代数を担当してきた。また2年生以上向けの専門科目としてベクトル解析, Fourier解析, 複素関数等を担当してきた。25年程前から大学院科目も担当しており, 学部ではあまり教えない線形代数の応用である線形系と求積法で解けない非線形系を含む常微分方程式に関する科目も担当した。また3年前に担当者が退職したので2019年度より応用解析学 (Fourier解析, 直交関数系, ウェーブレット) と偏微分方程式に関する大学院科目も担当するようになった。

筆者が勤め始めた頃は事前に教科書を購入させ, 担当教員が板書で説明し補助教材としてプリントを配布する, 筆者が学生時代に受講したような授業形態で, 公式や定理の証明や例題の解答を板書で解説してから学生に問題を解かすことを繰り返してきた。しかし, 計算練習だけでは多くの学生は形式的な記号操作で終わってしまい, 履修終了までにその背後にある数学的意味を理解するに至らない。1990年代に担当教員がノートPCを教室に持ち込みモニターの画面をスクリーンで学生と共有できるようになったので, 筆者は新しい試みとして, 微分積分の基本概念である差分商の極限值である微分係数が接線の傾きになることや, Riemann和が短冊を並べた図形の面積で, 積分区間を細分したときの極限值で定義される定積分が境界の一部が関数のグラフになる図形の面積とみなせることを理解させるために, 図を差し替える (アニメーション) コンテンツを作り, スクリーンに映す図としてWinTpicによる平面図の作成から始めた。大学で初めて習う多変数関数の微分積分である偏微分と重積分では主に2変数関数を扱うが, グラフが曲面である。所属先がコンピュータ代数システム (CAS) のMathematicaのライセンスを取得し曲面図もCASにより容易に作成できるので, 停留点において極大・極小や鞍点になる様子や, 2変数関数のRiemann和が高さが異なる細長い直方体の束の体積で, 積分領域を細分したときの極限值で重積分が定義され, 曲面が被さった立体図形の体積になることや, 1変数ごとに細分したときのRiemann和の極限值をとれば累次積分が重積分になる原理を視覚的に理解させることを試みた。その後, 所属先の同僚が $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ 開発グループの一員であったので, $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で $\text{T}_\text{E}\text{X}$ のpicture環境に対応した図データを作成し $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書に挿入できることを知り, $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ のコマンドを自分なりに設定して平面図や立体図を作成し ([5], [6]) スライド教材や微分積分の教科書 [4] に挿入した。微分積分以外にはベクトル解析を担当していた時期に, 曲面を細分して各断片を平行四辺形で近似することで, ベクトルの外積を利用した曲面積の公式の導出過程を理解させるコンテンツも $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で作成した ([3])。長く担当している常微分方程式に関する大学院科目ではベクトル場や解軌道を描いた平面図を $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で作成したが, 10年前に共著で出版した微分方程式の教科書に大学院科目の内容を盛り込んで再出版することになり, EPSの画像ファイルをMatlabで作成し [10] の他に大学院科目のスライド教材にも挿入した。

2020年に新型コロナウイルスが世界中に蔓延して、教室での対面授業ができなくなり代替処置としてインターネットによるオンライン授業になってしまった。学生はスライド教材などをダウンロードしてスライドショーを視聴しながら学習することになったが、所属先ではスライド教材は音声を付けた PowerPoint しか認められず、筆者のように数式を含んだ文書作成を $\text{T}_\text{E}\text{X}$ に頼ってしまうと PowerPoint に直接数式を入力する作業は不慣れで、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ファイルからコンパイルした PDF ファイルの文字や式をスクリーンショットの機能を用いて PowerPoint のスライドに貼り付けた。また教室のスクリーンに映す教材として作成してきた平面図や立体図の他に、オンライン教材用として新たに作成した $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{C}\text{indy}$ による PDF ファイルや Matlab による PNG ファイルの図も挿入した。学生はスライド教材で学習したあと、オンラインの学修支援システムで小テストを解いたり、レポートを画像で提出した。当然、スライド教材をアップロードするだけでなく、授業時間中は GoogleMeet または Zoom によりリアルタイムで学生からの質問に応えられるようにした。

筆者は数学科や大学院数学専攻出身で学部生の時は Lebesgue 積分、Fourier 解析、複素関数、常微分方程式、関数解析を受講したが、偏微分方程式については大学院入学時に出版された変数係数を含む一般論を扱っている [7] から勉強し、熱方程式や波動方程式などの具体的な偏微分方程式は例として知った。大学院科目の担当に関して学生時代の経験を生かしたいが、所属先の大学院生は数学科のように専門科目が数学だけの環境下ではなく、数学の専門家が正当性を保証した上で、授業展開においてある程度の厳密さを犠牲にすることは避けられない。また [15] で述べられているように微分積分は図形的意味から理解できることが多く、筆者が担当している大学院科目は微分積分の発展に相当するので、教材として作成してきた図は数学非専攻の学生に対する指導に有効である。予備知識は学部1年次に習う微分積分と線形代数の他に正則関数に対する Cauchy の積分定理に基づく積分路の変更可能性と留数定理で授業を設計した。Fourier 解析では学生は Lebesgue 積分を知らないので L^2 関数は関数の絶対値の2乗の積分が有限で定義するまでとして L^2 空間の完備性を認めた上で、[9] を参考に部分積分を駆使して区分的に微分可能な関数に対する反転公式を示した。ウェーブレットは Fourier 解析の応用として解説したが、専門書 (例えば [13]) に載っているような図も Matlab で作成して挿入した。偏微分方程式については数学者でない科学者・技術者向けの文献である [1], [12] の他に大学院生時代の指導教官が執筆した [8] も参照しながらスライドを作成した。

本稿では大学院科目のオンライン教材について述べたい。スライドショーにした講義のあらすじの他に挿入した図も紹介し、指導上のねらいや見解を説明する。コロナ感染がなくても教室のスクリーンに映す図として作成したと思うが、オンライン教材であればダウンロードして都合が良いときに繰り返して学習できるので、教育効果の向上が期待できる。

2 Fourier 変換と反転公式

区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x)$ に対して

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

とすれば, Fourier 級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ が $f(x)$ に収束することも収束しないこともあるので形式的に

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

で表す. \sim が $=$ になる, つまり Fourier 級数が $f(x)$ に収束することを示すには $f(x)$ に何らかの条件が必要で, 筆者は大学院向けの応用解析学の授業で [9] を参考に部分和を Dirichlet 核で表し, 区分的に滑らかな関数に対して部分積分による式変形によって, 連続点では収束して不連続点では両方の極限値の平均値に近づく Gibbs 現象まで示した.

$R > 0$ として区間 $[-R, R]$ 上の関数 $f(x)$ に対して $f\left(\frac{R}{\pi}t\right)$ は $[-\pi, \pi]$ 上の関数になり

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{R}{\pi}t\right) e^{-int} dt \quad (1)$$

とすれば, $[-\pi, \pi]$ における $f\left(\frac{R}{\pi}t\right)$ の Fourier 級数

$$f\left(\frac{R}{\pi}t\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

が求まる. 元の変数 x に戻せば $[-R, R]$ において

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/R} \quad (2)$$

つまり R に応じて Fourier 級数の区間の幅を変えることができる. (1) において $t = \frac{\pi}{R}x$ で置換積分すれば

$$c_n = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(x) e^{-in\pi x/R} dx. \quad (3)$$

(3) の右辺を (2) の c_n に代入すれば $[-R, R]$ において

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\pi x/R}}{2R} \int_{-R}^R f(x) e^{-in\pi x/R} dx. \quad (4)$$

R を大きくしても右辺の級数の各項は変わらないので $R \rightarrow \infty$ の極限値に置き換えても良さそうだが, 無限級数なので R を発散させたときの極限値の級数に等しくなるとは限らない. この後の議論は厳密でないが, わかりやすくするために積分区間 $[-R, R]$ の R を先に発散させ積分区間を実数全体の $-\infty < x < \infty$ にして, 残りの R をそのままにすれば (4) の右辺は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\pi x/R}}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\pi x/R} dx$$

になり級数の和は $f(x)$ であることが “期待できる”. ここで, Fourier 変換は

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

で定義されるが、 \mathcal{F} を用いて (4) を背景に $R \rightarrow \infty$ のとき

$$f(x) \leftarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{R} e^{in\pi x/R} \mathcal{F}(f) \left(\frac{n\pi}{R} \right)$$

を認め、 $G(\xi) = e^{ix\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$ とすれば

$$f(x) \leftarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{R} G \left(\frac{n\pi}{R} \right) \quad (5)$$

になる。右辺は無限級数なので M を自然数として、右辺の級数を $n = -M+1$ から $n = M$ までの和にして、 $M \rightarrow \infty$ のときの極限值とみる。

$$S(M, R) = \sum_{n=-M+1}^M \frac{\pi}{R} G \left(\frac{n\pi}{R} \right)$$

は横の長さが $\frac{\pi}{R}$ で縦の長さが $G \left(\frac{n\pi}{R} \right)$ の長方形を $2M$ 個並べた図形の面積である。(5) は $M \rightarrow \infty$ としてから $R \rightarrow \infty$ のときの極限值が $f(x)$ であることを意味するが、 M と R の発散の仕方を変えて実数全体上の $G(x)$ の広義積分になることを図を使いながら説明する。

図1は $M = 2$ のときの図で青い領域の面積が $S(M, R)$ ある。 $\frac{M\pi}{R} \rightarrow \infty$ になるように M と R を同時に発散させると図2のように変化し、 $S(M, R)$ は図3の面積である $\int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx$ に収束するようになる。スライドでは図1~3の他に中間状態の図も追加して収束の様子をアニメーション化した。

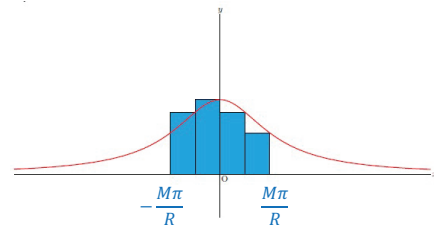


図 1

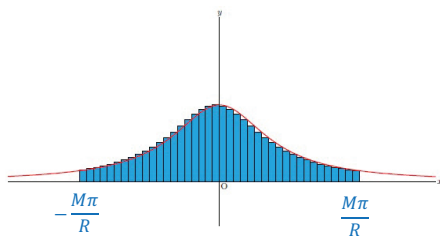


図 2

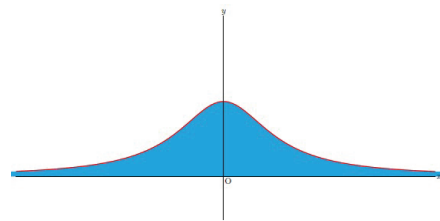


図 3

関数 $g(\xi)$ に対して

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

により Fourier 逆変換 \mathcal{F}^{-1} を定義すれば、図3の面積は

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$$

となり (5) により $f(x)$ に等しいこと、つまり Fourier 変換と Fourier 逆変換に関する反転公式が“期待できる”。ここで、複数の変数を発散させたときの極限值は発散の仕方を変えても変わらないことを証明なしで認めるのは数学専門家にとって許される議論ではなく“期待できる”と表現するまでで証明したとは言えない。この後 [9] と同様に $f(x)$ が区分的に滑らかで実数全体での $|f(x)|$ の広義積分は有限である条件下で不連続点を除いて反転公式が成り立つことを証明する。[7] などの数学専門家向けの文献では急減少で滑らかな関数に対して反転公式を示し、稠密性より L^2 空間まで広げる方法が採られるが、いずれにしろ Fourier 級数は前提としていない。しかし、Fourier 変換は Fourier 級数と独立しているのではなく、Fourier 級数の区間を実数全体に広げたのが Fourier 変換である。実用上、積分は数値積分であり、Fourier 変換のような広義積分は図 3 ではなく図 2 のように近似した状態で計算するので、筆者の担当科目のように Fourier 変換を専門分野に利用することが受講目的であれば、Fourier 級数との繋がりを意識させることは必要不可欠である。

3 準線形 1 階偏微分方程式と特性曲線

偏微分方程式の授業では、非線形を含めた 1 階偏微分方程式、及び 2 階線形である Laplace 方程式、熱方程式、波動方程式の解法を解説する。1 階偏微分方程式に関しては 2 変数に限定して、以下の方程式の解法から説明する。

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u). \quad (6)$$

これは $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ のみに関して線形 (1 次式) であるから準線形と呼ばれる。

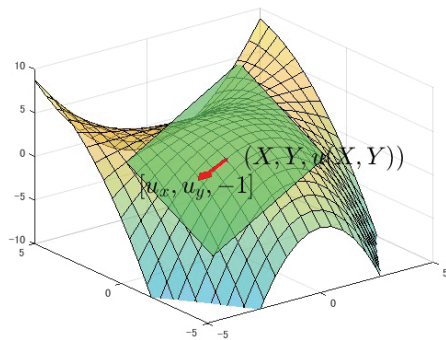


図 4

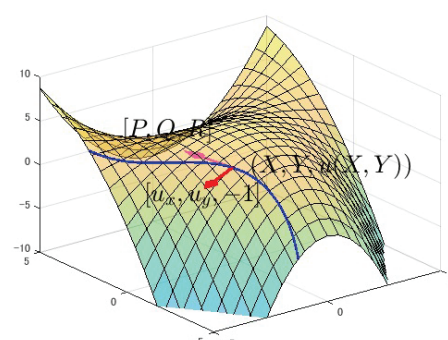


図 5

(6) の解 $u(x, y)$ のグラフは座標が (x, y, z) の 3 次元空間のなかの曲面で解曲面と呼ぶ。曲面の作図は CAS や KETCindy などで自前でも可能になり筆者は Matlab で図 4, 5 のような網掛けの曲面を描いた。解曲面上の点の xy 座標を (X, Y) とすれば、解曲面上の点の座標は $(X, Y, u(X, Y))$ になり、それを接点とする接平面 (図 4 の緑色の平面) の方程式は

$$z = \frac{\partial u}{\partial x}(X, Y)(x - X) + \frac{\partial u}{\partial y}(X, Y)(y - Y) + u(X, Y)$$

であることを偏微分で習うが、この方程式より接平面は3次元ベクトル $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ に垂直である。また (6) の P, Q, R に対して変数 t の常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \quad (7)$$

の解曲線を特性曲線 (図5の青い曲線) と呼ぶ。(7)の解を $(x(t), y(t), z(t))$ とすれば(6)より

$$\frac{d}{dt} (z(t) - u(x(t), y(t))) = \frac{dz}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = R - P \frac{\partial u}{\partial x} - Q \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

になる。したがって、 $t = t_0$ のとき解曲面 $z = u(x, y)$ 上の点 $(X, Y, u(X, Y))$ を通ると

$$z(t_0) - u(x(t_0), y(t_0)) = Z - u(X, Y) = 0$$

になるので図5のように特性曲線は常に解曲面上にある。特性曲線の接線は(7)より3次元ベクトル $[P, Q, R]$ に平行であるので、解曲面の法線ベクトル $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ との内積が0になる、つまり図5が示すように2つのベクトル $[P, Q, R]$ と $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ は直交する。

逆に図6のように特性曲線を集めて曲面を形成すれば特性曲線の接ベクトルは曲面の接平面と平行なので法線ベクトルと直交する。曲面が関数 $z = u(x, y)$ のグラフであれば法線ベクトルの成分は $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ であり特性曲線の接ベクトル $[P, Q, R]$ と直交し(6)を満たし、曲面は(6)の解曲面である。つまり特性曲線は解曲面の構成要素であることがわかる。曲面が滑らかであれば特性曲線の集め方に制約はないが、初期条件を課すと集め方が決まるので初期値問題の可解性も感覚的に理解できる。筆者は大学院生のとき

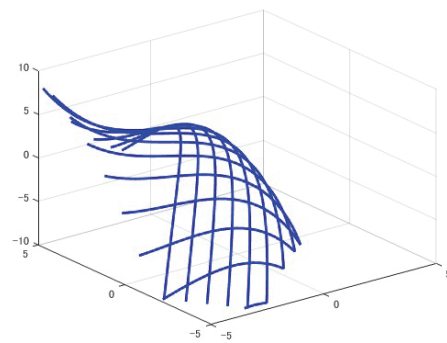


図 6

に線形偏微分方程式の漸近解の構成に必要な eikonal 方程式を解くために [11] などで1階偏微分方程式を勉強したことがあるが、準線形に特化した議論には拘らなかった。担当者が学生のときは違い現在はPCで精緻な図が描けるようになり、準線形に限定しているが図6を見て初めて特性曲線を集めると解のグラフになることを認識した。[14]で述べられているようにCASの機能などを活かして教材を作成すると、学生時代に学んだ分野でも復習に留まらず新たな発見があり感動を覚えることもある。

この後、準線形でない1階偏微分方程式の解法に進み、解 u の他に解の1階導関数 u_x, u_y も変数とみなして準線形の方程式として解く Lagrange-Charpit の方法を解説するが、元の方程式が2変数であれば解曲面は5次元空間の2次元部分多様体になり3次元の枠内で概念を体現化する図が思いつかず、Lagrange-Charpit の方法の理解を促す教材は作成していない。[11]などの数学専門家向けの文献では接触幾何学を認知させてから1階偏微分方程式を解説しており、工学者向けの文献(例えば[12])では接触幾何学への言及はなく実例を解くときは個々の例の特徴に合わせて解いているが、何となく解いているようで接触幾何学を意識しないと解法の一般原理は理解しにくい。筆者のスライドも[12]を参考に作成したが、接触幾何学の概念の一端でも理解させる教材が欲しいところである。

4 境界値問題と Green 関数

Laplace 作用素を用いた \mathbb{R}^2 上の微分方程式

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) = f(x, y) \quad (8)$$

を Poisson 方程式と呼ぶ. 実際は \mathbb{R}^2 全体でなく, 領域 Ω に制限して, Ω の境界 $\partial\Omega$ における値に条件を付けて解を求めるのが一般的である. ここでは境界条件

$$u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (9)$$

を満たす解を求める.

Laplace 方程式の基本解

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

を用いて

$$u(x, y) = \int_{\Omega} E(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$$

とすれば u は (8) を満たすが (9) を満たすとは限らない. $E(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})$ の代わりに Green 関数と呼ばれる

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &= \delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y}) \quad (x, y) \in \Omega, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega \\ G(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) &= 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega \end{aligned}$$

(δ はデルタ関数) を満たす関数 $G(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$ が見つければ

$$u(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$$

と表される u は (8) と (9) を満たす.

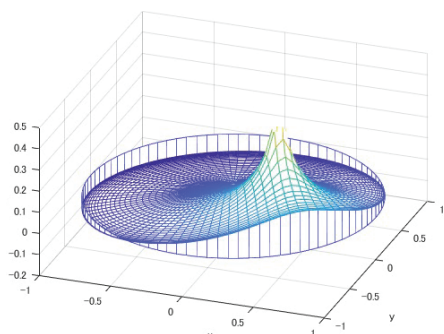


図 7

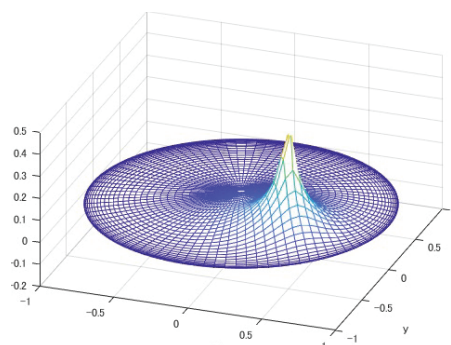


図 8

特定の領域に対して厳密かつ具体的に Green 関数を求める方法はいくつか知られているが, ここでは Ω が円領域で $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$ に対して基本解を平行移動した 2 つの関数 $E(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})$ と $E(x - \hat{x}, y - \hat{y})$ の差が円周上で定数になるように点 (\hat{x}, \hat{y}) を Ω の外部から選べることを利用する. x, y を変数とした関数 $E(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})$ のグラフは図 7 で特異点 (\tilde{x}, \tilde{y}) が原

点でなければ円周上の値は定数でない. x, y を変数とした関数 $G(x, y, \hat{x}, \hat{y})$ のグラフは図 8 で, 特異点は同じだか円周上の値は定数 0 になるように調整したものである. 図 7 と図 8 を見せることは Green 関数の意味を感覚的に理解する助けになる. また特異点で曲面が尖っているが, Green 関数をそのまま利用して数値解を求めようとすれば, 特異点近辺における数値積分の精度が悪いことが実感できる.

実際の領域の形状はさまざまあり, 上記の構成法は円領域に限った巧妙な方法によるもので他の領域には適用できない. 平行移動した基本解に $f(x, y) = 0$ とした (8) の斉次解を加えて境界値が 0 になればよいが, 偏微分方程式を満たしながら都合よく関数値を変えることは非常に難しく, 一般領域に対してはある程度誤差を許容しながら近似的に Green 関数を構成するしかない. その結果として有限要素法と境界要素法が登場し CAS にもパッケージ化されているが, 暗箱でなく Green 関数で解く原理を理解した上で使うべきである. 計算機の計算では問題によっては無視できない程度の誤差が伴う結果もあるので, 計算機への盲信は危険である. 計算結果のおかしさに気づくことも必要で, そのためのリテラシーを身につけることも本稿で紹介した専門科目を工科系大学の学生に提供する目的である.

5 今後の課題

本稿ではオンライン授業のため作成した大学院科目のスライド教材で, PC で精緻に作図したことで筆者自身に新たな知見をもたらした図を選んでみた. 本稿では応用解析学と偏微分方程式に関する科目の教材を取り上げたが, オンライン授業になった 2020 年度におけるこの 2 科目に対する 4 段階評価の授業アンケートで履修者の半数近い 8 人が回答し, 理解度については, 1 人が理解できない, 2 人が理解でき, 5 人はやや理解できたと回答した. またオンライン教材への評価とみなせる設問として資料は効果的に使われたかについては, そう思うが 3 人, ややそう思うが 4 人, あまりそう思わないが 1 人であった. 2021 年度は教室内の学生の人数を制限した上で一部の科目で対面授業が再開したが, 大学院科目は担当教員の裁量で授業形態が選べ, 筆者はスライド教材を修正してオンライン授業を継続した. 授業アンケートは前期の応用解析学の科目のみであるが理解できる, やや理解できる, あまり理解できないが各 2 人ずつであった. 資料は効果的に使われたかについては, そう思うが 4 人, ややそう思うが 1 人, あまりそう思わないが 1 人であった. スライド視聴後に小テストの問題を解かせているが, スライドを振り返りながら解答を提出すると理解が深まり肯定的な評価になると推察される.

コロナ感染が収束してもオンライン授業は存続すると言われている. 演習や輪講のような授業は対面形式に戻るが, 筆者の担当するような科目は担当教員の指導方針に関係なくオンライン化の方向に進んでしまうかもしれない. 筆者も一人でスライドを作成する状態が続く限り PowerPoint に $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ をコンパイルした PDF ファイルなどをスクリーンショットで貼り付ける方法で作成していく. $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{I}\text{n}\text{d}\text{y}$ や CAS で数学の抽象的概念を顕在化すると学生時代に学習した内容でも新たな発見があり, オンライン教材などで学生と共有することもできる. 既習の教員と未習の学生の立場の違いを考慮しながら, 挿入する図のデザインやタイミングなどの検証を続けていかなければならない.

近年は 3D プリンターが開発され, 例えば $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{I}\text{n}\text{d}\text{y}$ では方程式を入力すれば思い通り

に立体模型が作成できるようになってきた ([2]). 立体模型を直接手に触れさすことがオンライン授業ではできず, 筆者は教材となる模型を作ったことがないが, 今は動画でさまざまな角度からの画像を見せることまでしかできないと思う. しかし, 筆者が学生であった30年以上前は授業プリントを謄写版で作成したのが現在はPDFファイルをインターネットで配布して学生はプリンターで印刷するようになったことを顧みると, 近い将来には立体模型のファイルを配布すれば学生は3Dプリンターで模型を廉価で作成できるようになり, オンライン授業にも活用できるはずである. PCやプリンターのような教育道具として活用できる機器の発明や開発は今後も進んでいくが, 基礎教育だけでなく数学者でない科学者・技術者に対する高度な数学のリテラシー教育に利用する方法の探求も重要な今後の課題である.

6 謝辞

査察報告書にてレフェリーより有益なご提案・コメントを頂きました. この場を借りて感謝の意を表します.

参考文献

- [1] S. J. Farlow, 偏微分方程式 (新版), 朝倉書店, (1996).
- [2] 濱口直樹・高遠節夫, $\text{K}\mathbb{F}\text{T}\text{Cindy}$ による 3D モデル教材の作成, 数理解析研究所講究録, **2022**, (2017), pp.112-117.
- [3] 長谷川研二, $\text{K}\mathbb{F}\text{Tpic}$ によるベクトル解析の教材の作成, 数理解析研究所講究録, **2022**, (2017), pp.65-71.
- [4] 長谷川研二 他, 理工系のための微分積分, 培風館, (2016).
- [5] 長谷川研二, $\text{K}\mathbb{F}\text{Tpic}$ による数学教材の作成, 数理解析研究所講究録, **1978**, (2015), pp.140-149.
- [6] 長谷川研二, コンピュータグラフィックによる数学系科目の授業方法, 工学院大学教職課程学芸員課程年報, **16**, (2014), pp.12-17.
- [7] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I~IV, Springer, (1983, 1985).
- [8] 金子晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会, (1998).
- [9] 加藤雄介・求幸年, フーリエ・ラプラス解析, 丸善出版, (2017).
- [10] 牧野潔夫・長谷川研二 他, 理工系のための微分方程式, 培風館, (2020).
- [11] 大島利雄・小松彦三郎, 1 階偏微分方程式, 岩波書店, (1977).
- [12] 佐野理, 偏微分方程式, 丸善出版, (2015).

- [13] 山田道夫・萬代武史・芦野隆一, 応用のためのウェーブレット, 共立出版, (2016).
- [14] 山本修一, 応用数学を理解するための数学ソフトウェアの役割－工学専攻の授業を通しての考察－, 数理解析研究所講究録, **1978**, (2015), pp.63–71.
- [15] 山下哲, K_ETCindy による図入り PDF 教材の作成, 数理解析研究所講究録, **2022**, (2017), pp.59–64.