

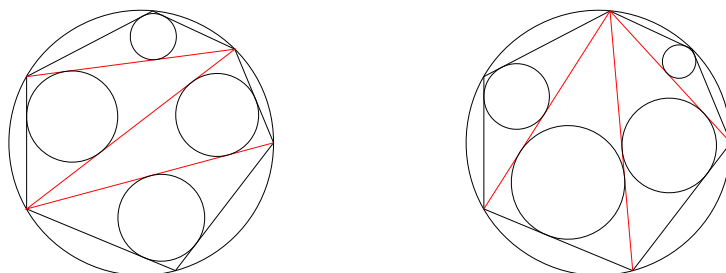
Japanese Theorem について

城西大学 数理・データサイエンスセンター 大島利雄

1 Japanese Theorem とは

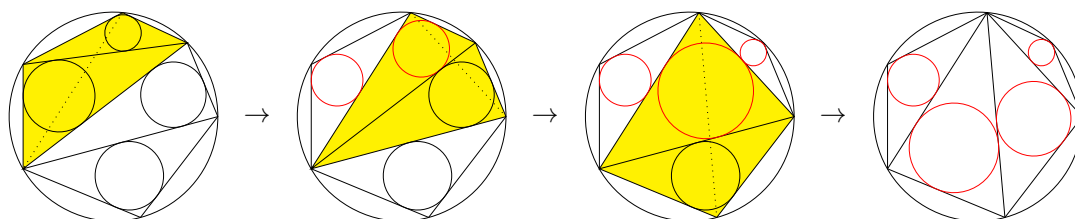
定理. 円に内接する多角形を描く．頂点を結ぶ互いに交差のない対角線を用いて多角形を三角形に分割したとき，三角形の内接円の半径の和は分割の仕方によらない．

この美しい定理は Japanese theorem と呼ばれています．例えば，円に内接する六角形は，対角線を用いて4つの三角形に分割されますが，その4つの三角形の内接円の半径の総和は，分割の仕方に依存しません．



Japanese theorem は，平面幾何の様々な結果と関連する多くの証明が知られています．このノートは，そのいくつかの証明を紹介すると共に関連する数学的话题を取り上げ，数学教育における教材に使うことも念頭に置いて書いたものです（特に §10 に沢山の発展的な問を載せました）．

Japanese theorem は，円に内接する四角形の場合が基本で，円に内接する一般の多角形の場合は，四角形の場合から分かります．上の例では，四角形の場合の結果を順に適用していけば分かります（詳しくは後述）．



和算家藤田貞資の門弟丸山良元の門人であった丸山良寛という人が，寛政12年（西暦1800年）に東北地方の鶴岡山王社という神社に奉納した「算額」には，円に内接する四角形の場合に，上の問題が書かれていて，それが起源とされています（cf. [1, 5]）．円に内接する四角形において対角線で2つに分けられた三角形の2つの内接円の半径が2と3で，

もう1つの対角線で分けられた三角形の内接円の一方の半径が1なら他方はいくつ？ というような問題です。内接円の半径の和が分割に依存しないことが用いられています。

江戸時代には和算が庶民にまで普及し、神社仏閣の絵馬堂に奉納される絵馬には、和算の問題やそれを解いたものを算額（数学の絵馬）として奉納したものがありました。書物よりはるかに手軽な発表の形態で、広く庶民の目にとまる公開の手段だったのでしょう。

完全な形で現存する最古の算額は、1686年に京都の北野天満宮に奉納されたもので、絵馬（1754年に描かれた）の絵具がはがれて下から算額が現れ、1957年に発見されました。失われた算額は日本中に沢山あったことと想像されます。京都の御香宮に掲げられたある算額の問題は、その解が元禄4年（1691年）に八坂神社に算額として奉納されました。道後温泉の伊佐爾波神社には、1803年から1937年までの22面もの算額が残されています。埼玉県内でも現存する算額が100面ほど確認されているようです。東京には、天明9年（1788年）に奉納された墓石に掘られた珍しい算額もあります。算額では、円や直線を使った分かりやすい幾何の問題（易しいという意味ではありません）が多く、人の目を引くように、色づけされた綺麗なものが沢山あります。

和算や算額については、書物やインターネットから多くの情報を得ることができます。また、Japanese theorem は、何通りかの証明の紹介と共に歴史的観点からも詳しく [5] に書かれており、その著者も加わった英文の [8] も複数の証明が分かりやすく書かれています。一方、このノートは、Japanese theorem を取り上げて、現代の数学教育に役立つことがあるかもしれない、という教育的な観点を入れて [5, 6, 7, 8] などをもとに書きました（他にも面白い算額の問題が沢山あります。cf. [3, 10, 11, 15, 16]）。この節の残りでは、多角形についての Japanese theorem が、四角形の場合から分かることを示しましょう。

円に内接する多角形を $P_0P_1 \cdots P_{n-1}$ とします (n 角形)。対角線が三角形の辺となっていたとき、その対角線を共有する2つの三角形を合わせた四角形に注目して、その四角形のもう一つの対角線に取り替えた三角形分割に移す操作を **フリップ** と呼ぶことしましょう。フリップは、分割に現れる対角線を1つ指定すると定まり、そのフリップで出現した新たな対角線を指定したフリップで元に戻ります。その両方で内接円の半径の総和が等しいことは、四角形の場合から分かります。したがって、

命題. 円に内接する多角形の対角線による三角形分割は、フリップを続けることで互いに移りあう。

ということから、Japanese theorem が正しいことは、四角形の場合に証明することができます。

命題の証明. 円に内接する n 角形の任意の三角形分割は、適当なフリップを続けて、 P_0 を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割に移せることを示せばよい。

P_0 を端点とする分割に現れる三角形の辺を $P_0P_{j_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, m$) とおく。ただし

$$j_0 = 0 < j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_{m-1} < \cdots < j_{m-1} < j_m = n - 1.$$

$m = n - 1$ ならば目的の三角形分割に他ならない。 $j_{m+1} = 0$ とおく。 $m < n - 1$ ならば $j_{i+1} > j_i + 1$ となっている i がある。このとき、 P_0P_i を端点とする三角形の頂点 $P_{i'}$ で $i' > j_i$ となるものは、 $i' = j_{i+1}$ で与えられることが分かる ($P_{j_i}P_{i'}$ と $P_0P_{i'}$ と $P_0P_{j_{i+1}}$ が

分割三角形の辺となっていることから). 対角線 $P_{j_i}P_{j_{i+1}}$ によるフリップを行うと P_0 を端点とする対角線で分割三角形の辺となるものの個数を1つ増やすことができる. この手順を繰り返せばよい.

最初の六角形の例は, この手順の例となっています.

逆をたどれば, 任意の三角形分割は, P_0 を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割からフリップを使って移すことができます.

注意. 1) 異なった三角形分割は, 高々 $2(n-3)-1$ 回のフリップでつなぐことができる. 実際, 一方の分割に現れる対角線の頂点となっているものを P_0 として, 一方に上の命題の証明の手順を使い, その後, 他方にその手順の逆を使えばよい (cf. §10 問4).

2) 円に内接する $(n+2)$ 角形 (凸 $(n+2)$ 角形でよい) において, 対角線による三角形分割のやり方の数は, カタラン数 $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ で与えられる (cf. [13]).

2 いくつかの初等幾何

頂角 A を直角とする直角三角形 $\triangle ABC$ を考える.

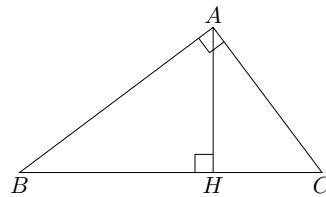
頂点 A から底辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると, $\triangle HBA \sim \triangle ABC \sim \triangle HAC$ (互いに相似) であるから

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC,$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC,$$

$$AB^2 + AC^2 = (BH + CH)BC = BC^2$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$



さて, 円周上に点 B, C を, 弦 BC で区切った同じ側の円周上に点 A, D をとる.

円の中心を O とし, 円周上の点 A' を線分 AA' が円 O の直径となるようにとる. このとき

$$\begin{aligned} \angle BOC &= \angle A'OB + \angle A'OC \\ &= \angle OAB + \angle OBA + \angle OAC + \angle OCA \\ &= 2\angle OAB + 2\angle OAC = 2\angle BAC. \end{aligned}$$

よって弦 BC の円周角 $\angle BAC$ は, 弦 BC の中心角 $\angle BOC$ の半分に等しい (この中心角は, A を含まない側の弧 BC に対する中心角). 特に

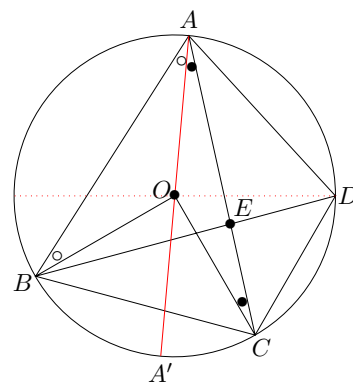
弦 BC の円周角は互いに等しい.

すなわち

$$\angle BAC = \angle BDC.$$

円に内接する四角形 $ABCD$ を考える. 直線 AD と BC の交点を E とおくと

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow AE \cdot CE = BE \cdot DE \quad (\text{方ベキの定理})$$



四角形の内角 $\angle BAD$ と内角 $\angle BCD$ に対する中心角は、弦 BD の A を含まない側の中心角と C を含まない側の中心角に対応し、それらは互いに補角（和が 360° ）になっている。よって

円に内接する四角形の対角の位置にある 2 頂点の内角の和は 180°

となります。

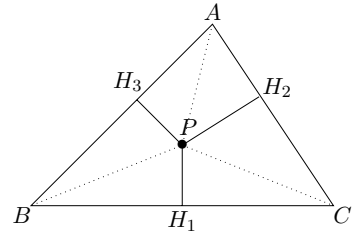
三角形 ABC の内部の点 P から BC, CA, AB に下ろした垂線の足を H_1, H_2, H_3 とすると、三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(BC \cdot PH_1 + CA \cdot PH_2 + AB \cdot PH_3)$$

となる。

特に P を三角形の内心とし、内心円の半径を r とおくと

$$S = \frac{r}{2}(BC + CA + AB).$$



3 丸山良寛の定理の証明 その 1 (対角線上の接点間は等距離)

四角形の場合の Japanese theorem の証明を考えることにします。

最初は、和算家の吉田為幸 (1819–1892) が書いた証明です (cf. [5]).

まず、記号の準備です。

$P_0P_1P_2P_3$: 中心 O の円に内接する四角形

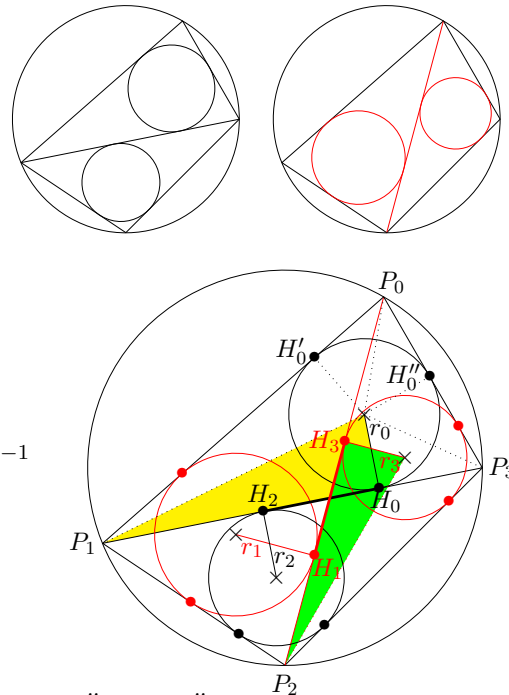
$\bar{i} \in \{0, 1, 2, 3\}$ ($i - \bar{i} \in 4\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$)

$P_i := P_{\bar{i}}$ ($i \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} は整数の集合)

O_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の中心

r_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の半径

H_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円が辺 $P_{i+1}P_{i-1}$ と接する点



定理 (Japanese theorem).

$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3.$$

証明 (右図参照): $P_0H'_0 = P_0H''_0$ など \Rightarrow

$$\begin{aligned} P_0P_1 - P_3P_0 &= P_0H'_0 + P_1H'_0 - (P_0H''_0 + P_3H''_0) \\ &= P_1H'_0 - P_3H''_0 = P_1H_0 - P_3H_0 \text{ など } \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0P_1 + P_2P_3 - P_1P_2 - P_3P_0 &= P_1H_0 - P_3H_0 + P_3H_2 - P_1H_2 = 2(P_1H_0 - P_1H_2) \\ &= P_0H_1 - P_2H_1 + P_2H_3 - P_0H_3 = 2(P_0H_1 - P_0H_3), \end{aligned}$$

$$\therefore P_1H_0 - P_1H_2 = P_3H_2 - P_3H_0 = P_0H_1 - P_0H_3 = P_2H_3 - P_2H_1.$$

$$\angle O_0P_1H_0 = \frac{1}{2}\angle P_0P_1P_3 = \frac{1}{2}\angle P_0P_2P_3 = \angle O_3P_2H_3 \text{ など } \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{P_1H_0} &= \frac{r_3}{P_2H_3}, \quad r_0P_2H_3 = r_3P_1H_0 \quad (\Leftarrow \triangle O_0P_1H_0 \sim \triangle O_3P_2H_3), \\ \frac{r_0}{P_3H_0} &= \frac{r_1}{P_2H_1}, \quad r_0P_2H_1 = r_1P_3H_0 \quad (\Leftarrow \triangle O_0P_3H_0 \sim \triangle O_1P_2H_1), \\ \frac{r_2}{P_1H_2} &= \frac{r_3}{P_0H_3}, \quad r_2P_0H_3 = r_3P_1H_2 \quad (\Leftarrow \triangle O_2P_1H_2 \sim \triangle O_3P_0H_3), \\ \frac{r_2}{P_3H_2} &= \frac{r_1}{P_0H_1}, \quad r_2P_0H_1 = r_1P_3H_2 \quad (\Leftarrow \triangle O_2P_3H_2 \sim \triangle O_1P_0H_1), \\ \therefore r_0(P_2H_3 - P_2H_1) + r_2(P_0H_1 - P_0H_3) &= r_1(P_3H_2 - P_3H_0) + r_3(P_1H_0 - P_1H_2), \\ (r_0 + r_2)(P_0H_1 - P_0H_3) &= (r_1 + r_3)(P_1H_0 - P_1H_2), \\ \therefore r_0 + r_2 &= r_1 + r_3. \end{aligned}$$

注意. 1) $H_0H_2 = H_1H_3$ (円に内接することは使っていない)

2) $H_0 = H_2$ となるときは, P_0 を外接円周上少しずらして極限を考えればよい (r_i は連続的に変化する. cf. §10 問 11).

4 証明その2 (面積, カルノーの定理, 多角形の場合の和の値)

s_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の面積

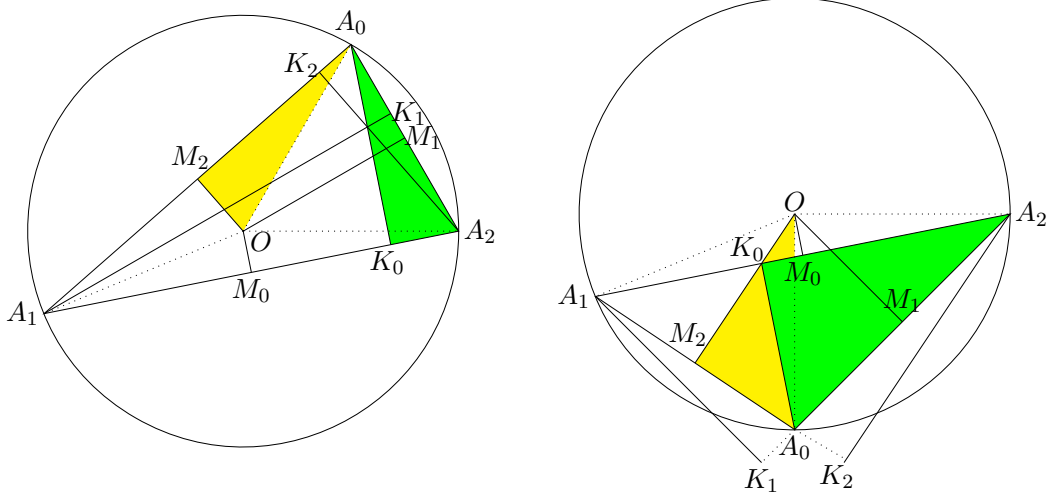
H_{ij} : O から P_iP_j に下ろした垂線の足

$$2s_0 = r_0(P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0) = 2\triangle OP_0P_1 + 2\triangle OP_1P_3 + 2\triangle OP_3P_0$$

$$A_0 = A_3 := P_0, \quad A_1 := P_1, \quad A_2 = A_{-1} := P_2$$

K_i : A_i から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足

M_i : O から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足



外心が三角形の内部にあるとき (内接円の半径を r_0 とする)

$$\begin{aligned} \angle A_0OM_2 &= \frac{1}{2}\angle A_0OA_1 = \angle A_0A_2K_0 = \angle A_1A_2K_1 \quad \text{など}, \\ \frac{OM_2}{R} &= \frac{A_2K_0}{A_2A_0} = \frac{A_2K_1}{A_1A_2} = \frac{A_2K_0 + A_2K_1}{A_2A_0 + A_1A_2} \end{aligned}$$

$$\therefore R(A_2K_0 + A_2K_1) = OM_2(A_2A_0 + A_1A_2),$$

$$R(A_1K_2 + A_1K_0) = OM_1(A_1A_2 + A_1A_0),$$

$$R(A_0K_1 + A_0K_2) = OM_0(A_0A_1 + A_2A_0),$$

$$\text{ここで } r_0(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) = 2s_0 = OM_0 \cdot A_1A_2 + OM_1 \cdot A_2A_0 + OM_2 \cdot A_0A_1,$$

$$\begin{aligned} \therefore (R + r_0)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= (OM_0 + OM_1 + OM_2) \\ &\quad \cdot (A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0), \end{aligned}$$

$$R + r_0 = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

外心が三角形の外で、頂角 A_0 内にあるとき（内接円の半径を r_2 とする）は、

$$R(A_2K_0 + A_2K_1) = OM_2(A_2A_0 + A_1A_2),$$

$$R(A_1K_2 + A_1K_0) = OM_1(A_1A_2 + A_1A_0),$$

$$-R(A_0K_1 + A_0K_2) = -OM_0(A_0A_1 + A_2A_0),$$

$$r_2(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) = 2s_2 = OM_2 \cdot A_0A_1 + OM_1 \cdot A_2A_0 - OM_0 \cdot A_1A_2,$$

$$\begin{aligned} R(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= OM_2(A_2A_0 + A_1A_2) + OM_1(A_1A_2 + A_1A_0) \\ &\quad - OM_0(A_0A_1 + A_2A_0), \end{aligned}$$

$$(R + r_2)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) = (OM_1 + OM_2 - OM_0)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0),$$

$$R + r_2 = OM_1 + OM_2 - OM_0.$$

以上から、一般に以下のことが成り立つ。

命題 (カルノーの定理). 三角形 $A_0A_1A_2$ において、その外接円と内接円の半径を、それぞれ R, r とし、内心を O_0 とおく。外心 O から頂点 A_i の底辺に下ろした垂線の長さを h_i とする。このとき

$$R + r = \begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 & (O \text{ が三角形の内部または辺上にあるとき}) \\ h_0 + h_1 + h_2 - 2h_i & (\text{線分 } O_0O \text{ が辺 } A_{i-1}A_{i+1} \text{ と交わるとき}) \end{cases}$$

さて、 O を中心とする円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ について考える（最初の記号に戻る）。

O から線分 P_iP_j に下ろした垂線の足を M_{ij} とおく。

O が四角形 $P_0P_1P_2P_3$ の内部にあるとき：

$$R + r_0 = OM_{01} + OM_{30} \pm OM_{13} \quad (+ \text{ は } O \text{ が三角形 } P_0P_1P_3 \text{ の内部にあるとき})$$

$$R + r_2 = OM_{12} + OM_{23} \mp OM_{13},$$

$$2R + r_0 + r_2 = OM_{01} + OM_{12} + OM_{23} + OM_{30}.$$

O が線分 P_2P_3 で外接円を二分したときの四角形を含まない側にあるとき：

$$R + r_0 = OM_{01} + OM_{30} - OM_{13},$$

$$R + r_2 = OM_{13} + OM_{12} - OM_{23},$$

$$2R + r_0 + r_2 = OM_{01} + OM_{12} - OM_{23} + OM_{30}.$$

まとめると

$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3 = \sum_{i=0}^4 (-1)^{\epsilon_{i,i+1}} OM_{i,i+1} - 2R,$$

$$\epsilon_{i,i+1} := \begin{cases} -1 & (O \text{ は弧 } P_i P_{i+1} \text{ と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にある}) \\ 1 & (\text{上以外}) \end{cases}$$

注意. 1) 上の等式は、四角形を円に内接する n 角形の場合に拡張される。ただし、左辺は、頂点を適当に結んで n 角形を $(n-2)$ 個の三角形に分割したときの三角形の内接円の半径の和。右辺の和は $i = n$ までとし、 -2 を $-(n-2)$ と変える (cf. §10 問 12)。

2) O が内接 n 角形の内部にあるときの等式から、内部にないときの公式は次のように容易に導ける。すなわち、 O は弧 $P_i P_{i+1}$ と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にあるならば、弧 $P_i P_{i+1}$ 上に点 P'_i を、三角形 $P_i P'_i P_{i+1}$ 内に O を含むように選んで、この三角形の場合と頂点 P'_i を加えた $(n+1)$ 角形の場合との等式の差を考えればよい。

5 証明その 3 (4つの内接円の中心は長方形の頂点)

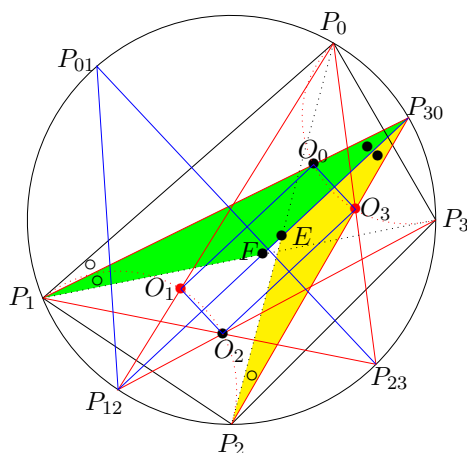
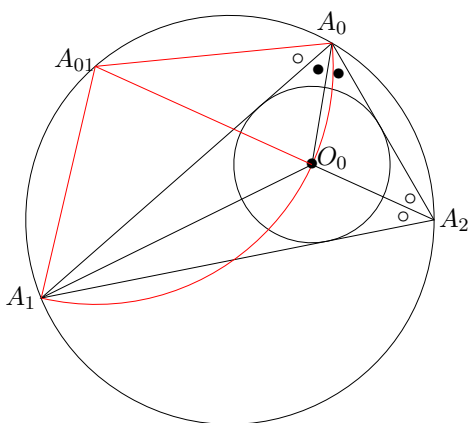
A_{01} : 直線 $A_2 O_0$ の延長線が外接円と交わる点

$\angle A_{01} A_2 A_0 = \angle A_{01} A_2 A_1$ であるから、 A_{01} は三角形の外接円の A_2 を含まない側の円弧 $A_0 A_1$ の中点となる。

$\angle A_{01} O_o A_0 = \angle O_0 A_0 A_2 + \angle O_0 A_2 A_0 = \angle O_o A_0 A_1 + \angle A_{01} A_2 A_1 = \angle O_o A_0 A_1 + \angle A_{01} A_0 A_1 = \angle A_{01} A_0 O_0$. よって

$$A_{01} O_o = A_{01} A_0 = A_{01} A_1. \quad (\star)$$

すなわち、三角形 $A_0 A_1 A_2$ の外接円の円弧 $A_0 A_1$ の中点を中心とし、 A_0, A_1 を通る円上に内接円の中心がある。



P_{ii+1} : 弧 $P_i P_{i+1}$ の中点. 線分 $P_i P_{i+1}$ と線分 $P_{ii+1} P_{i-1}$ とが交わるように定める ($P_{34} := P_{30}$).

このとき

$$\begin{aligned}\angle P_{01}P_{12}P_{30} &= \angle P_0P_{12}P_{01} + \angle P_0P_{12}P_{30} = \frac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_1 + \frac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_3 \\ &= \frac{1}{4}\angle P_0OP_1 + \frac{1}{4}\angle P_3OP_0, \\ \angle P_{23}P_{01}P_{12} &= \angle P_{23}P_{30}P_{12} = \frac{1}{4}\angle P_2OP_3 + \frac{1}{4}\angle P_1OP_2, \\ \therefore \angle P_{01}P_{12}P_{30} + \angle P_{23}P_{01}P_{12} &= \frac{1}{4}(\angle P_0OP_1 + \angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_0) = 90^\circ.\end{aligned}$$

よって

直線 $P_{01}P_{23}$ と直線 $P_{23}P_{30}$ は直交する.

一方, $P_{12}P_1 = P_{12}P_2 = P_{12}O_1 = P_{12}O_2$ であって, $\angle P_0P_{12}P_{30} = \angle P_3P_{12}P_{30}$ であるから, 直線 O_1O_2 は直線 $P_{12}P_{30}$ に直交する. 同様に直線 O_3O_0 も直線 $P_{12}P_{30}$ に直交し, 直線 O_0O_1 と直線 O_2O_3 は直線 $P_{01}P_{23}$ に直交する. 従って,

四角形 $O_0O_1O_2O_3$ は長方形となる.

直線 P_0P_2 と $P_{12}P_{30}$ の交点を E , 直線 P_1P_3 と $P_{12}P_{30}$ の交点を F とおく.

$$\angle EP_3P_2 = \frac{1}{2}\angle P_1P_3P_2 = \angle FP_3P_1, \quad \angle EP_2P_3 = \angle P_0P_1P_3 = \angle FP_1P_3.$$

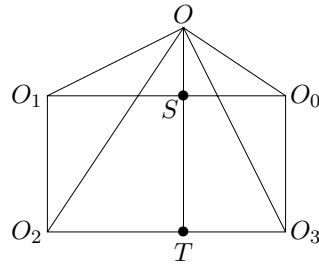
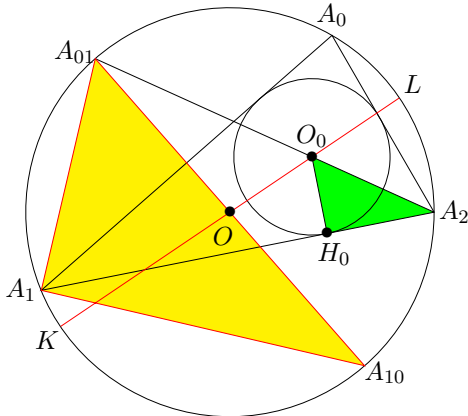
よって, $\angle P_{12}FP_3 = \angle P_{12}EP_3$. すなわち, 直線 $P_{12}P_{30}$ は, 直線 P_0P_2 および直線 P_1P_3 と同じ角度で, 逆向きに交わる. そこで, P_0P_2 と直交する直線 l_{02} および P_1P_3 と直交する直線 l_{13} を考えると, 直線 O_0O_1 は, それらと同じ角度で, 逆向きに交わる.

一方, 直線 O_0O_1 は, 直線 O_0O_2 および O_1O_3 と同じ角度で, 逆向きに交わる. したがって, l_{13} と直線 O_0O_2 のなす角は, l_{02} と直線 O_1O_3 のなす角に等しい. 線分 O_0O_2 の l_{13} への射影の長さが $r_0 + r_2$ で, 線分 O_1O_3 の l_{02} への射影の長さが $r_1 + r_3$ であり, $O_0O_2 = O_1O_3$ であるから, $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ が分かる.

6 証明その4 (証明その3のバリエーション)

外接円上に2点 K, L を, 線分 KL が点 O と O_0 を通るようにとる.

$\angle A_1A_{10}A_{01} = \angle H_0A_2O_0$ より $\triangle A_1A_{10}A_{01} \sim \triangle H_0A_2O_0$ で, $\frac{O_0A_2}{A_{01}A_{10}} = \frac{O_0H_0}{A_{01}A_1}$ となる.



よって

$$\begin{aligned} 2Rr_0 &= A_{01}A_{10} \cdot O_0H_0 = A_{01}A_1 \cdot O_0A_2 \\ &= A_{01}O_0 \cdot O_0A_2 = KO_o \cdot O_0L \quad (\Leftarrow (\star), \text{方ベキの定理}) \\ &= (R - OO_o)(R + OO_o) = R^2 - OO_o^2, \end{aligned}$$

$$\therefore OO_0^2 = R^2 - 2Rr_0 \quad (\text{チャップルの定理}) \Rightarrow OO_i^2 = R^2 - 2Rr_i \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

O を通って O_1O_2 に平行な直線が O_0O_1 , O_2O_3 と交わる点を S , T とおく. 四角形 $O_0O_3O_2O_1$ は長方形であるから, $OO_0^2 - OO_1^2 = O_0S^2 - O_1S^2 = O_3T^2 - O_2T^2 = OO_3^2 - OO_2^2$ より, $OO_0^2 + OO_2^2 = OO_1^2 + OO_3^2$. よって $0 = OO_0^2 + OO_2^2 - (OO_1^2 + OO_3^2) = 2R(r_1 + r_3 - r_0 - r_2)$ となるので, $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$.

7 証明その5 (内接円の半径の差)

O_0, O_3 から線分 P_0P_3 に下した垂線の足を H_0, H_3 とおき, O_1, O_2 から線分 P_1P_2 に下した垂線の足を H_1, H_2 とおく. O_3 から直線 O_0H_0 に下した垂線の足を E_0 , O_2 から直線 O_1H_1 に下した垂線の足を E_1 とおく.

O_1, O_2, P_1, P_2 は同一円周上にあるので ($\Leftarrow (\star)$)

$$\begin{aligned} (180^\circ - \angle P_1P_2O_2) + (180^\circ - \angle P_2O_2O_1) \\ &= (180^\circ - \angle P_1P_2O_2) + \angle P_2P_1O_1 \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle P_1P_2P_3 + \frac{1}{2}\angle P_0P_1P_2. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (180^\circ - \angle P_0P_3O_3) + (180^\circ - \angle P_3O_3O_0) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle P_2P_3P_0 + \frac{1}{2}\angle P_3P_0P_1. \end{aligned}$$

一方

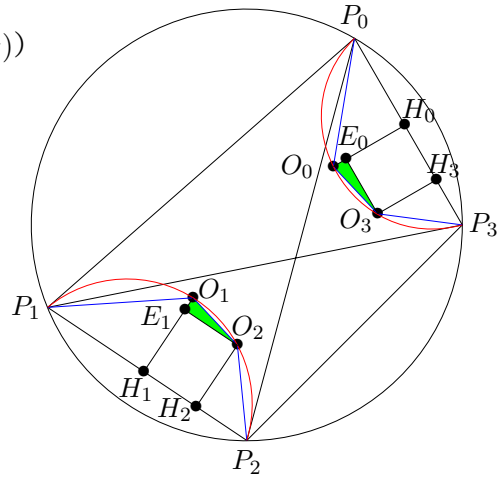
$$\begin{aligned} \angle P_0P_1P_2 - \angle P_1P_2P_3 &= (180^\circ - \angle P_2P_3P_0) - (180^\circ - \angle P_3P_0P_1) \\ &= \angle P_3P_0P_1 - \angle P_2P_3P_0. \end{aligned}$$

よって $\angle P_0P_1P_2 \leq \angle P_1P_2P_3$ のとき $\epsilon = 1$, そうでないとき $\epsilon = -1$ とおくと

$$\begin{aligned} \angle E_1O_2O_1 = \angle E_0O_3O_0 &= \frac{\epsilon}{2}(\angle P_1P_2P_3 - \angle P_0P_1P_2), \\ r_1 - r_2 &= \epsilon O_0E_0, \\ r_0 - r_3 &= \epsilon O_1E_1. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} 2H_1H_2 &= (P_1H_2 - P_1H_1) + (P_2H_1 - P_2H_2) = (P_1H_2 - P_2H_2) - (P_1H_1 - P_2H_1) \\ &= (P_1P_3 - P_2P_3) - (P_1P_0 - P_2P_0) \\ &= (P_3P_1 - P_0P_1) - (P_3P_2 - P_0P_2) = 2H_3H_0, \\ \therefore E_1O_2 &= H_1H_2 = H_3H_0 = E_0O_3. \end{aligned}$$



よって三角形 $E_1O_2O_1$ と $E_0O_3O_0$ は合同で, $O_1E_1 = O_0E_0$ となる. よって $r_0+r_3 = r_1+r_2$.

注意. 円周上に 4 点 A, B, C, D をとって, 線分 AB, BC, CD, DA で頂点を結ぶ, 凸多角形とならずに BC と DA が交わる場合がある. 前者において, 対角線 AC を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の和が, 対角線 BD を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の和に等しい, というのが Japanese theorem であった.

後者の場合, すなわち上の図において $A = P_0, B = P_1, C = P_3, D = P_2$ というような場合に同じことを考えてみよう. そうすると, 対角線 $BD = P_1P_2$ を加えてできる 2 つの三角形とは, $\triangle P_0P_1P_2$ と $\triangle P_3P_1P_2$ のことで, その場合は内接円の半径の差が, 別の対角線 $AC = P_0P_3$ を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の差に等しい, という結果になる. というのがこの節で示したこととなる.

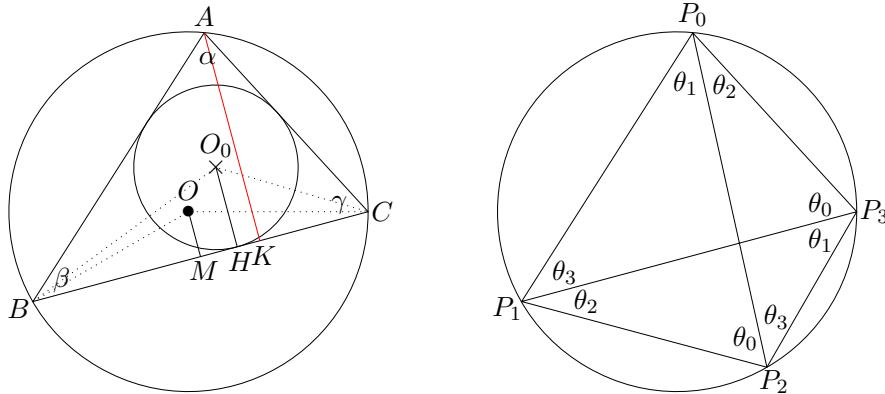
8 証明その 6 (三角関数を用いる. 傍接円への拡張)

三上義夫 (和算研究家 1875–1950) に基づく証明の紹介です (若干変えています).

まずは, 三角形の内接円の半径を求めましょう.

半径 R の円に内接する三角形 ABC に対し, A, B, C の内角を α, β, γ とおく.

三角形 ABC の外心を O , 内心を O_0 とおき, O, O_0, A から底辺 BC に下ろした垂線の足を M, H, K とおく. また, 内接円, 外接円の半径を r, R とおく.



$$BC = BH + CH = r \cot \frac{\beta}{2} + r \cot \frac{\gamma}{2} = r \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$= r \frac{\sin(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2})}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = r \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}},$$

$$BC = 2BM = 2R \sin \alpha = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\because \angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOC = \alpha),$$

$$\therefore r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ の話に戻ろう.

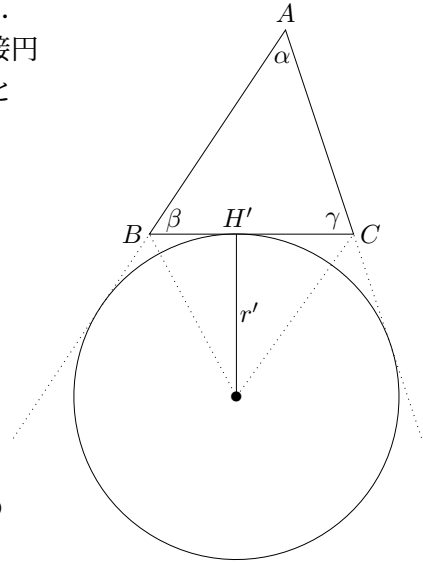
$\theta_i : P_i P_{i+1}$ の中心角 ($P_0 P_1 P_2 P_3$ は、円に内接する四角形)

$$\begin{aligned} r_0 + r_2 &= 4R(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta_3}{2}) \\ &= 4R(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} \\ &\quad + \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} + \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}). \end{aligned}$$

$r_0 + r_2$ は θ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) に対称な式であるから, $r_1 + r_3$ も同じ式となって $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$.

$\triangle ABC$ の辺 BC に接する傍接円の半径 r' を求めよう.
 A, B, C の内角を α, β, γ とし, 外接円の半径を R , 傍接円の中心 O' から辺 BC に下ろした垂線の足を H' とおくと

$$\begin{aligned} BC &= r' \cot \frac{180^\circ - \beta}{2} + r' \cot \frac{180^\circ - \gamma}{2} \\ &= r'(\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2}) \\ &= r' \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = r' \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \\ BC &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \\ r' &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$



定理. 円に内接する四角形において, 対角線で四角形を三角形に分けたとき, 対角線に接する三角形の傍接円の半径の和は, 対角線の選び方に依らない.

半径 R の円に内接する四角形 $P_0 P_1 P_2 P_3$ を考える.
 辺 $P_1 P_3$ と接する $\triangle P_0 P_1 P_3$ と $\triangle P_1 P_2 P_3$ の傍接円の半径を r'_0, r'_2 とおく.

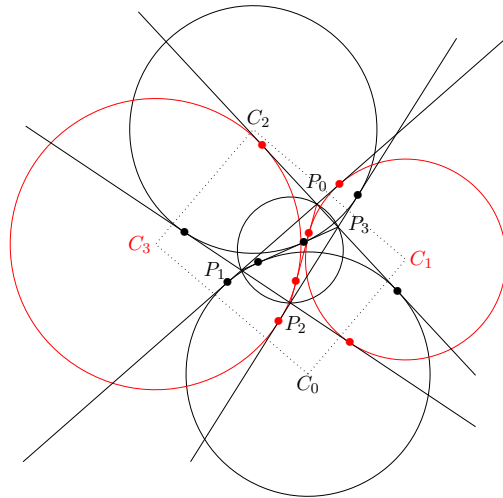
$$\begin{aligned} r'_0 + r'_2 &= 4R(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta_3}{2}) \\ &= 4R(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} + \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \\ &\quad + \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}) \end{aligned}$$

となるので, もう 1 つの対角線を選んでも同じ値となること分かる.

$P_0 P_1 P_2 P_3$: 円に内接する四角形
 $P_{-1} = P_3, P_4 = P_0$
 C'_i : $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ の傍接円 ($\angle P_i$ 内)
 r'_i : C'_i の半径

$$r'_0 + r'_2 = r'_1 + r'_3.$$

注意. 1) 筆者は傍接円の場合に拡張できることに気づいたが, 知られていることかもしれない.



2) 三角形 ABC の面積 S は $\frac{1}{2}BC \cdot AK$ に等しく, $AK = AB \sin \beta = 2R \sin \beta \sin \gamma$ であるから

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

また

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

で, $S = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$ より

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma). \end{aligned}$$

3) $\angle A$ 内の傍接円の半径を r' とすると

$$\begin{aligned} r' &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ S &= \frac{1}{2}r'(AB + AC - BC), \\ AB + AC - BC &= 8R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ &= 2R(\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha). \end{aligned}$$

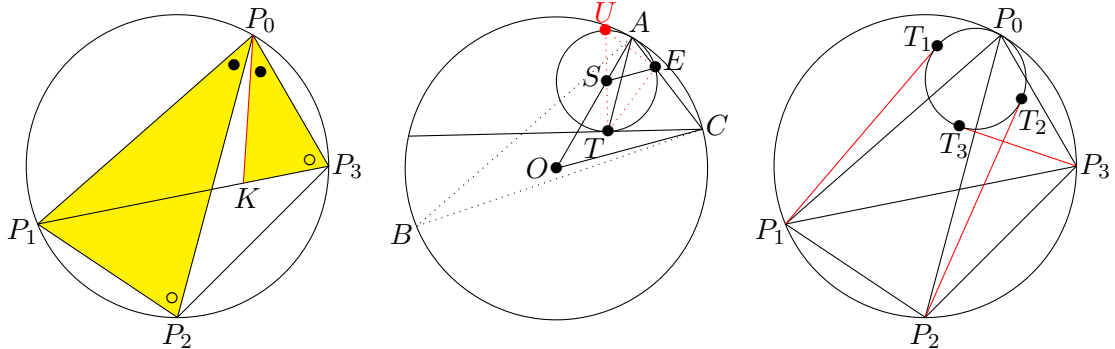
9 証明その 7 (拡張版トレミーの定理, Thébault の定理)

半径 R の円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ を考える.
線分 P_1P_3 上に $\angle P_1P_0P_2 = \angle KP_0P_3$ となる点 K を取る.

$$\begin{aligned} \angle P_0P_2P_1 &= \angle P_0P_3K \Rightarrow \triangle P_0P_2P_1 \sim \triangle P_0P_3K \\ \Rightarrow \frac{P_0P_3}{P_0P_2} &= \frac{P_3K}{P_2P_1} \Rightarrow P_1P_2 \cdot P_3P_0 = P_0P_2 \cdot P_3K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様に } \angle P_0P_2P_3 &= \angle P_0P_1K \Rightarrow \triangle P_0P_2P_3 \sim \triangle P_0P_1K \\ \Rightarrow \frac{P_0P_1}{P_0P_2} &= \frac{P_1K}{P_2P_3} \Rightarrow P_0P_1 \cdot P_2P_3 = P_0P_2 \cdot P_1K, \end{aligned}$$

$P_1P_3 = P_1K + P_3K$ なので $P_0P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3P_0 = P_0P_2 \cdot P_1P_3$ (トレミーの定理)



三角形 ABC に対し、その外接円の半径を R 、中心を O とおく。外接円に点 A で内接する円を 1 つ選び、その半径を r 、中心を S 、円 S と AC の交点を E とおく。 C から円 S へ接線を 1 つ引き、その接点を T と置く。 UT が円 S の直径となるように U を取る。

$$\angle ETC = 90^\circ - \angle UTE = \angle TUE = \angle TAE.$$

$$\text{よって } \triangle CTE \sim \triangle CAT \Rightarrow \frac{CT}{CA} = \frac{CE}{CT}, \quad CT^2 = CA \cdot CE \quad (\text{方ベキの定理}),$$

$$\text{一方 } \angle SEA = \angle SAE = \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow \triangle ASE \sim \triangle AOC,$$

$$\therefore \frac{EA}{CA} = \frac{AS}{AO} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CA - EA}{CA} = 1 - \frac{r}{R},$$

$$\therefore CT = \sqrt{CA \cdot CE} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}} CA.$$

拡張版トレミー (プトレマイオス) の定理. 円に内接する四辺形 $P_0P_1P_2P_3$ に対し、四辺形の外接円に含まれて P_0 で内接する円 O_0 を考える。 P_i から P_0 に接線を引き、接点を T_i とおく ($i = 1, 2, 3$)。 P_0P_i を $T_iP = i$ ($i = 1, 2, 3$) に置き換えてもトレミー定理が成り立つ。すなわち

$$T_1P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3T_3 = T_2P_2 \cdot P_1P_3,$$

証明. 大円と小円の半径をそれぞれ R, r とおくと、 $\frac{T_iP_i}{P_0P_i} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}$ ($i = 1, 2, 3$) より、トレミーの定理に帰する。

注意. 1) 拡張版トレミーの定理において、内接円の半径を 0 とすると、通常のトレミーの定理になる。

2) 拡張版トレミーの定理において、 P_0 で外接する円に変更しても同様な定理が成り立つ。

3) 拡張版トレミーの定理において、 P_0 のみでなく、各 P_i で内接円または外接円 O_i を考え、辺の長さを O_i と O_j の共通接線の長さに置き換えた、拡張版トレミーの定理 (ケイジーの定理 [2, 4]) が成立する。

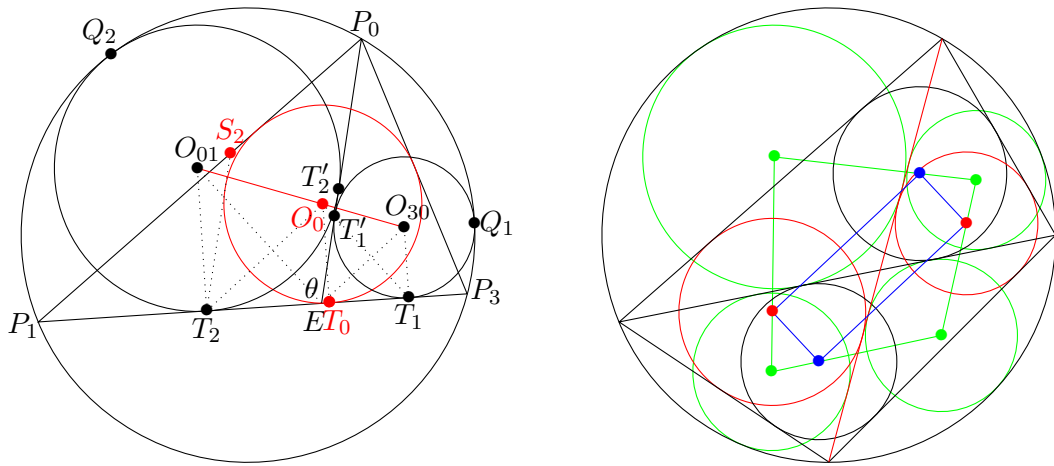
円 O に内接する三角形 $P_0P_1P_3$ と三角形の底辺 P_1P_3 上の点 E を考える。線分 P_0E 、線分 P_1E と円 O に接する円の中心を O_{01} 、その半径を r_{01} とし、線分 P_0E 、線分 P_3E と円 O に接する円の中心を O_{30} 、その半径を r_{30} とおく。円 O_{01} と線分 P_1E 、 P_0E との接点を T_2, T'_2 とおき、円 O_{30} と線分 P_3E 、 P_0E との接点を T_1, T'_1 とおく。また、三角形 $P_0P_1P_3$ の内接円の半径を r_0 とする。

$x = T_2E = T'_2E$, $y = T_1E = T'_1E$ とおく。半径 R の円に内接する四辺形 $Q_2P_1P_3P_0$ と円 O_{01} に対して拡張版トレミーの定理を使うと

$$P_1T_2 \cdot P_0P_3 + P_1P_3 \cdot P_0T'_2 = P_3T_2 \cdot P_0P_1,$$

$$(P_1E - x) \cdot P_0P_3 + P_1P_3 \cdot (P_0E - x) = (P_3E + x) \cdot P_0P_1,$$

$$(P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)x = P_1E \cdot P_0P_3 + P_0E \cdot P_1P_3 - P_3E \cdot P_0P_1.$$



同様に四辺形 $Q_1P_0P_1P_3$ と円 O_{30} に対して拡張版トレミーの定理を使うと

$$\begin{aligned} P_0T'_1 \cdot P_1P_3 + P_0P_1 \cdot P_3T_1 &= P_1T_1 \cdot P_0P_3, \\ (P_0E - y) \cdot P_1P_3 + P_0P_1 \cdot (P_3E - y) &= (P_1E + y) \cdot P_0P_3. \\ (P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)y &= P_0E \cdot P_1P_3 + P_3E \cdot P_0P_1 - P_1E \cdot P_0P_3. \end{aligned}$$

よって, $\angle P_0EP_1 = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} (P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)(x + y) &= 2P_0E \cdot P_1P_3, \\ (P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)(r_{01} \cot \frac{\theta}{2} + r_{30} \cot \frac{180^\circ - \theta}{2}) &= 2P_0E \cdot P_1P_3. \end{aligned}$$

両辺に $\frac{1}{2} \sin \theta = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ をかけると

$$\begin{aligned} (P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)(r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2}) &= P_0E \cdot P_1P_3 \sin \theta \\ &= 2\Delta P_0P_1P_2 = (P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0)r_0, \\ r_0 &= r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{Thébaault の定理}). \end{aligned}$$

円 O に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ において, 対角線 P_0P_2 と P_1P_3 の交点を E とおく. 円 O に内接し, 線分 P_iE , $P_{i+1}E$ に接する円を O_{i+1} とし, その半径を $r_{i,i+1}$ とおく, また三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ の内接円を O_i , その半径を r_i とおく (ここで $P_{-1} = P_3$, $P_4 = P_0$, $O_{34} = O_{30}$ とおく).

Thébaault の定理より

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{12} \sin^2 \frac{\theta}{2} + r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ r_2 &= r_{23} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{12} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ r_3 &= r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2} + r_{23} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

よって以下のように丸山良寛の定理が示される.

$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3 = (r_{01} + r_{23}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (r_{12} + r_{30}) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

四辺形 $Q_2P_1P_3P_0$ と円 O_{01} に対しての拡張版トレミーの定理は

$$\begin{aligned} (P_1P_3 - P_1T_2) \cdot P_0P_1 &= P_1T_2 \cdot P_0P_3 + P_1P_3 \cdot (P_0E - (P_1E - P_1T_2)), \\ (P_0P_1 + P_1E - P_0E) \cdot P_1P_3 &= (P_0P_3 + P_1P_3 + P_0P_1) \cdot P_1T_2, \\ P_0P_1 + P_1E - P_0E &= 2 \frac{\Delta P_0P_1P_3}{r_0} \cdot \frac{P_1T_2}{P_1P_3} = 2 \frac{\Delta P_0P_1E}{r_0} \cdot \frac{P_1T_2}{P_1E}, \\ \therefore r_0 &= \frac{2\Delta P_0P_1E}{P_0P_1 + P_1E - P_0E} \cdot \frac{P_1T_2}{P_1E}. \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{2\Delta P_0P_1E}{P_0P_1 + P_1E - P_0E}$ は三角形 P_0P_1E の辺 P_0E に接する傍接円の半径であることに注意しよう。このことから、 T_2 を通って P_0E に平行な直線と P_0P_1 の交点を S_2 とおくと、三角形 $S_2P_1T_2$ の辺 S_2T_2 に接する傍接円の半径が r_0 となることが分かる。すなわち、三角形 $P_0P_1P_3$ の内接円は三角形 $S_2P_1T_2$ の傍接円となる。

内接円の中心 O_0 から底辺 P_1P_3 に下した垂線の足を T_0 とおく。 $\angle O_0T_2T_0 = \frac{1}{2}\angle S_2T_2E = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ であるから $T_0T_2 = \cot(90^\circ - \frac{1}{2}\theta)r_0 = r_0 \tan \frac{\theta}{2}$ 。同様に $T_0T_1 = r_0 \cot \frac{\theta}{2}$ 。よって $\frac{T_0T_2}{T_0T_1} = \tan^2 \frac{\theta}{2}$ 。

一方、 $r_{01} \neq r_{30}$ のとき

$$\frac{r_{01} - r_0}{r_0 - r_{30}} = \frac{r_{01} - (\cos^2 \frac{\theta}{2} r_{01} + \sin^2 \frac{\theta}{2} r_{30})}{(\cos^2 \frac{\theta}{2} r_{01} + \sin^2 \frac{\theta}{2} r_{30}) - r_{30}} = \frac{(r_{01} - r_{30}) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{(r_{01} - r_{30}) \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{T_0T_2}{T_0T_1}.$$

よって、3つの円 O_{01} , O_{30} , O_0 の中心は同一直線上にある ($r_{01} = r_{30}$ のときは E を少し動かして極限を考えればよい)。以上の議論から次の定理が示された。

Thébault の定理. 三角形 ABC とその底辺 BC 上の点 E を考える。三角形の外接円を O とし、三角形の内接円の中心を O_0 , 半径を r_0 とおく。外接円 O に内接し線分 AE と BE に接する円を O_1 , その半径を r_1 とおき、外接円 O に内接し線分 AE と CE に接する円を O_2 , その半径を r_2 とおく。また $\theta = \angle AEB$ とおく。このとき

1) 点 O_0 は線分 O_1O_2 を $\sin^2 \frac{\theta}{2} : \cos^2 \frac{\theta}{2}$ に内分する点となる。よって

$$r_0 = r_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

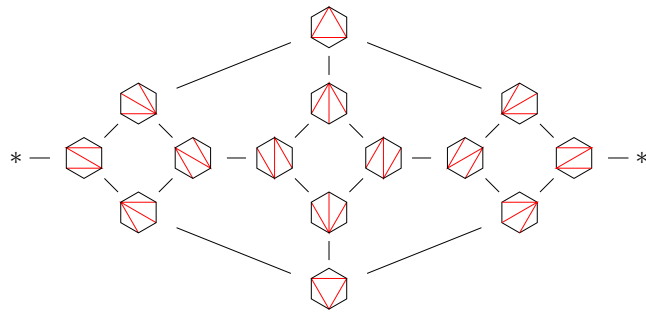
2) 円 O_1 (または円 O_2) が底辺 BC と接する点を通り AE に平行な直線は内接円 O_0 に接する。

10 発展

Japanese theorem についての前節までの議論に関連する考察と数学的な理解を深める問題を考えます。

1. 正六角形の三角形分割に対して、各三角形の内接円の半径を求めよ。
2. 凸五角形, 凸六角形, 凸八角形の (頂点を結ぶ互いに交わらない線分で結んでの) 三角形分割の場合の数を求めよ。

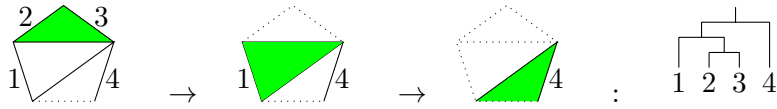
3. 円に内接する六角形の三角形分割において、一方から他方へ移るフリップの回数が最も多く必要な場合を決定せよ.



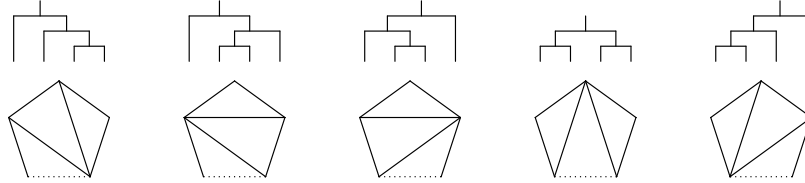
4. n を 13 以上の整数とする.
 $4(n-3) > 3n$ となることを用いて、凸 n 角形の対角線による三角形分割は、高々 $2(n-5)$ 回のフリップで互いに移りあうことを示せ ($(n-3)$ 本の対角線の端点は $2(n-3)$ 個あることに注意).
5. 正 n 角形の対角線による三角形分割を考える. ここでは回転や裏返して移るものは同じ分割と考えることにする. 三角形分割の種類を n が小さいときに具体的に分類せよ ($n=4, 5$ は 1 種類, $n=6$ は 3 種類). いろいろな考え方があるが、たとえば
- (a) 互いにフリップで移るので、1 つの例から異なるものを構成していき、最後は、どの対角線でフリップを行っても既に構成したものに含まれることを示す.
 - (b) 次の 6 より、 n 角形の三角形分割は、 $(n-1)$ 角形の三角形分割のいずれかの辺の外側に頂点を付け加えて出来ることを使って、より n が小さいものの分類から得る.
 - (c) いろいろな不変量を使って分類する. たとえば、使われた対角線の形状. 凸多角形の隣り合った辺を含む三角形の数など. それで厳密に示してもよいし、適当に全リストと思われるものが得られたら、フリップによって出来るものはリストに含まれることを示す. 分類には、区別できる不変量があれば、それを示しておく分かりやすい.
 - (d) 全てと思われる三角形分割のリストを作り、それぞれについて回転や裏返して移るものを同一視しない場合に何通りあるか調べ、その総計が期待する数になる (全てである) ことを示す (cf. 8).
6. 対角線による凸多角形の三角形分割には、凸多角形の隣り合った辺を含む三角形が 2 つ以上含まれることを示せ.
7. 円に内接する $(n+1)$ 角形 $P_0P_1 \dots P_n$ の三角形分割に対し、辺 P_nP_0 を除いた図形と辺 $L_i = P_{i-1}P_i$ ($i = 1, \dots, n$) を考える. n チームが試合をすること考える. 隣りあった 2 辺が分割三角形となっているチーム同士の試合を全て行い (前問より必ず存在), 勝ったチームが三角形のもう一辺に移るとして、元の隣り合った 2 辺は除く. これを全て行うことが第 1 段階の試合である. 残ったチームで同様なことを行って第 2 段階の試合を行う. 最後に辺 P_nP_0 を加えたときに出来る三角形が残るが、これが優勝決定戦に対応する.

このようにして、 n チームのトーナメント戦の図を考えることと円に内接する $(n+1)$ 角形の三角形分割を考えることが対応する.

たとえば



4チームの場合の全てを書くと



8. 凸 $(n+2)$ 角形 $P_0P_1 \cdots P_{n+1}$ の三角形分割の数を C_n ($n \geq 1$) とおく. $n \geq 2$ のとき, P_0P_j が分割の区切りとなっている最初の正整数を k とする ($2 \leq k \leq n$). 凸多角形を $P_0P_1 \cdots P_k$ と $P_0P_k \cdots P_{n+1}$ に分けることにより, 以下の関係式を示せ.

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 \quad (C_0 = 1).$$

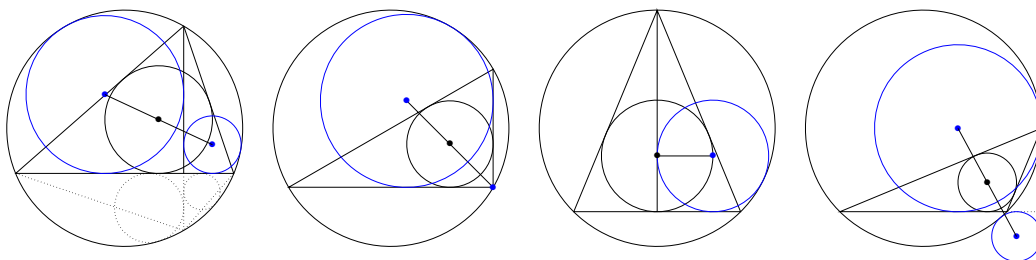
9. (a) 内接円の中心と外接円の中心が一致する三角形は正三角形に限ることを示せ.
 (b) 円周上に三頂点を持つ2つの異なる三角形の内接円の一方が他方に含まれるなら, その内接円は一致する.
 (c) 2つの円があって, 一方の円を外接円とし, 他方の円を内接円とする三角形が存在するなら, 大きな円周上の任意に与えられた点を頂点とし, 2つの円を外接円と内接円とする三角形が存在する (cf. §6 チャップルの定理).
10. xy 平面で三角形の頂点の座標成分がすべて有理数になっているとする.
 (a) 三角形の重心, 外心, 内心, 垂心, 傍心について, その座標成分が必ず有理数になるかどうか答えよ.
 (b) 辺の長さの平方, 内接円や外接円や傍接円の半径の平方, 面積などが必ず有理数になるかどうか答えよ.
11. §3 における定理の証明で, 線分 H_0H_2 の長さを用いて $P_1H_0 - P_1H_2$ などを書き直すと分かりやすくなる. このとき, この差は ϵH_0H_2 と書け, ϵ は線分 P_1P_3 上で H_2 が H_1 より P_1 に近いとき 1, そうでないとき -1 と定める. ここでは, $H_0H_2 = H_1H_3$ というだけでなく, H_2 が線分 P_1H_1 上にあるなら, H_3 が線分 P_0H_1 上にあることが示されている.
 H_0 と H_2 が一致した場合, §3 の証明の後半がうまくいかなくなる. その場合, 注意 2) の連続性による議論を使わない証明を考えよ.
 平面幾何の問題は, いろいろな場合を考え, 図を正確に書かないと間違った推論をしてしまうことがあるので注意しよう (cf. [14, §4]).
12. §4 の注意 1), 2) について考察し, より詳しく説明せよ.
13. §6 のチャップルの定理を傍接円の場合に拡張せよ.

14. §8 の注意 2), 3) の最後 に現れた三角関数の次の恒等式を示せ ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ -\sin \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

15. 半径 R の円に内接する五角形に対し, 三角形分割における内接円の半径の和を辺の円周角で表せ.
16. 点 O を中心とする半径 R の円に内接する三角形 $A_0A_1A_2$ において, 頂点 A_i の内角を α_i とする. O から辺 A_1A_2, A_2A_0, A_0A_1 , または, その延長線上に下した垂線の足を M_0, M_1, M_2 とおく. OM_0, OM_1, OM_2 を R と α_i を用いて表せ. さらに, §4 で求めた内接円の半径と, §8 の結果を比較し, 成り立つべき三角関数の恒等式を証明せよ.
17. 円周上に P_0, P_1, \dots, P_{n-1} が反時計回りとは限らずにバラバラに並んでいる場合を考える. この場合の三角形分割の三角形とは, 点が反時計回りに順に並んでいたときの n 角形の三角形分割に現れる三頂点で決まる三角形とする. 三頂点の回転の向きが点が反時計回りに並んでいたときと逆になるときは, 半径を, -1 倍して符号付きで考える. こうすると, Japanese theorem が符号付きで成り立つことが分かる (cf. §8 注意). 幾何的証明の他, §8 の証明についても検討せよ (番号付けに応じて円周角を符号付きで考える).
18. §9 に述べた拡張版のトレミーの定理を, 大きな 1 つの円に 4 つの円が内接または外接する場合に拡張せよ ((ケイジの定理, cf. [2, 4, 7]).
19. §9 に述べた Thébaud の定理を, 三角形の傍接円の場合に拡張せよ (cf. [7]).
20. 円に内接する四角形の対角線側に傍接円を描いたとき, 丸山良寛の定理と同じ結果が成り立つ. その証明を, §3~§9 の方法で考えよ.
21. 円に内接する四角形において, その対角線が直交しているとする. 2 つの対角線に接し, 円に内接する 4 つの円を考える. 1 つの対角線の片側にある 2 つの円の半径の平均値は, 四角形をその対角線で分割したときの同じ側の三角形の内接円の半径に等しい (明治 34 年 (1901) 福島県田村大元神社へ奉納の算額, 2 枚目 9 問中の 5 問目. cf. [15, 17]).

底辺の内角が等しい場合, 一方が直角の場合 (大船渡市根城八幡宮 1941 年奉納), 鈍角の場合も考察してみよう. 対角線が直交するとは限らない一般の場合は Thébaud の定理 (cf. §9, [6, 7]).

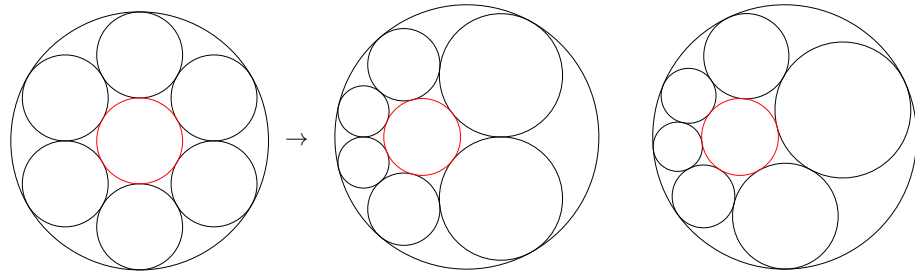


22. 直径 1 の円に内接する四角形を考える.
- 四角形が長方形の場合, トレミーの定理はピタゴラスの定理に対応することを示せ.
 - 四角形の対角線の一方が円の直径とすると, トレミーの定理 (cf. §9) は三角関数の和公式に対応することを示せ.
 - 円に内接する四角形の各辺の円周角を考えることにより, 正弦定理と三角関数の和公式からトレミーの定理を導け.
 - 四角形のある対辺が平行の場合, トレミーの定理は余弦定理に対応することを示せ.
23. 平面を複素数平面とみて考えてみるのも面白い. 平行移動, 回転, 裏返しなどの変換の他, z を $\frac{1}{\bar{z}}$ に対応させる **反転** と呼ばれる興味深い変換がある ($\frac{1}{z}$ に対応させることもある). 反転を 2 回行うと元に戻る. 原点は反転により無限円点に, 無限円点は原点に移ると考えると分かりやすい. 反転は以下の性質をもつ.
- 円や直線は, 円や直線に移る.
円や直線の方程式は $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ ($a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$) で与えられる.
 - 原点を通る円や直線は直線に移る (上で $c = 0$ にあたる).
 - 円や直線がその交点でなす角 (交点での接線のなす角) は, 変換によって変わらない. 特に接していれば変換後も同様である.
 - 平行な直線は, 原点で接する円や直線に移る.
 - 二点間の距離や円の中心は変換では保たれない.
 - 円周上の 3 点で円が定まる (直線も半径無限大の円と見なす). 4 点が同一円周上にある, ということは変換で不変.
 - 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 の非調和比 $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ は反転で不変 (この値が実数 \Leftrightarrow 4 点が同一円周上にある). 絶対値を考えれば, 二点間の距離の関係式が得られる.
- 3 本の直線に接する円は, それで作られる三角形の内接円や傍接円であり, 外接円は 2 本の直線の交点の 3 点を通る円である. 一般の点や三角形の頂点, 辺上の点. あるいは接点を原点として反転を行うと, 元の直線や円はどのような図形となるか, 図示してみよう.
内心は, 三角形の頂角の二等分線の交点であるが, それを反転で移して考えてみよう.
 - 三角形内の点を原点に取って反転すると, 三角形の内角の和が 180° であることは, どのような事実に変換されるか.
 - 円とそれに内接する四角形を考えることは, 四角形の対角線を考えることにより, 円と円内に交点を持つ二直線を考えることとしてもよい. この場合, 一般の点 (どの線上にもない点) を原点に取って反転すると, 平面内の 3 つの円で, 3 つの円に共通部分がある一般的な図形に移される. 逆にこのような図形があったとき, 2 つの円の交わりの一点を原点として反転すると, 元の形に戻る.

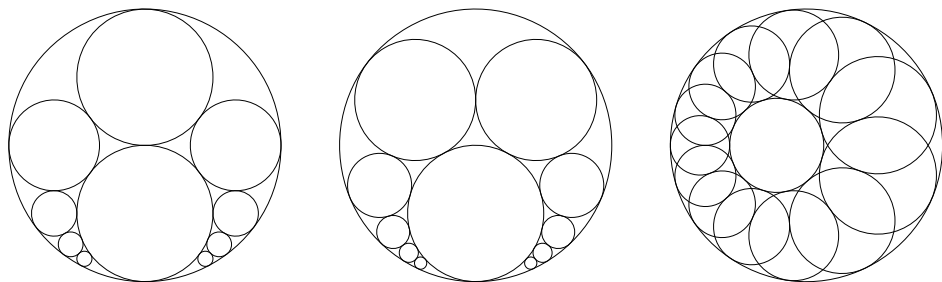
- 平面内の3つの円で、3つの円に共通部分がある一般的な図形において、3つの円のいずれにも接する円はいくつあるか？
- 平面内の3つの異なる円の配置によって、3つの円のいずれにも接する円の個数はいくつなるか。
3つの円がすべてある一点を通る場合はどうなるか？ その点で反転した図形では何を意味しているか？ 2つの円がその点で接している場合も含めて考えてみよう。

(d) 反転後の原点を無限遠点と呼ぶことにしよう。直線や線分や長さが関係することは、無限円点を通る円として言い換えることが出来る。二点を結ぶ直線は、反転後の二点と無限円点とを通る円となる。再度反転すれば元に戻るので、反転で移して得られた二点 z, w のもとの平面における距離は $|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}|$ となる。

- 中心が z_0 で半径が r の円を反転すると、円の中心と半径はどう変わるか？ (z_0 が実軸上にあるときをまず考えると分かりやすい)。
円の中心の座標成分と半径が有理数ならば、反転した結果も同様か？
- 原点から1離れた点を中心として半径 $\frac{3}{8}$ の円と半径 $\frac{1}{8}$ の円を描く。この2つの円の間円環部分には、半径 $\frac{1}{8}$ の円が丁度6個並べて入る。その円の接点は、大きな円の周上の任意の点にできる。これを反転させた図形ではどのようなことが分かるか (シュタイナーの定理, cf. 池田貞一が東都牛島長命寺に1826年奉納の算額 [12], 3次元におけるソティエの六球連鎖の定理 [3])。円の中心を結ぶ直線と円周との4つの交点の非調和比が重要。

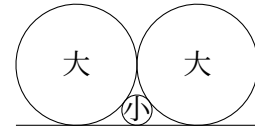


- 上の例で、円周上の点 $(\frac{5}{8}, 0)$ が原点となるように平行移動してから反転すると、どのようなことが分かるか。
- 半径 R の円の中心から L 離れたところに中心を持つ半径 r の円を考える ($r + L < R$)。2つの円の間円環部分に丁度6個の円が接しながら入るための条件を求めよ。



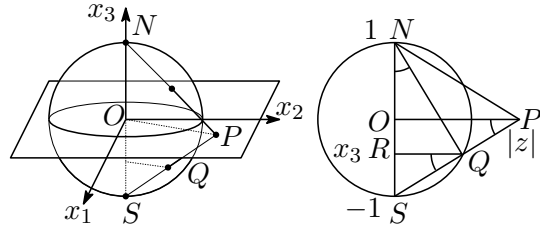
- 右は、円4個が円環領域に入る場合の反転の例（説明せよ）

- 平行線間に互いに接して無限個の円を並べます。
その反転は？（長野市西楽寺 1848 年奉納の算額）



- 前頁末の図は、どういう原理で描いたのでしょう？

24. 3次元空間の直交座標軸を x_1 軸, x_2 軸, x_3 軸とする. x_1-x_2 平面を $z = x_1 + ix_2$ とおいて複素平面と考える. 複素平面上の点 P に対し, 原点を中心とする半径 1 の球面の南極 $(0, 0, -1)$ と P とを結んだ直線とこの球面とのもう一つの交点 Q を対応させると (この対応を**立体射影**という), 複素平面上の点がこの球面の南極以外の点と対応する (このように複素数を対応させた球面を**リーマン球面**といい. 南極を**無限遠点**という).



- 立体射影で, 原点は北極 $(0, 0, 1)$ に, 原点を中心とする半径 1 の円は赤道に対応する.
- 立体射影で, 複素平面上の円や直線はリーマン球面上の円に対応する.
- 2つの曲線は, その交点でなす角 (接線のなす角) が立体射影で変わらない (**等角写像**という)
- 複素平面における反転は, 立体射影ではリーマン球面の x_2 軸の周りでの 180° 回転になる.

25. トレミーの定理についてさらに考察してみよう.

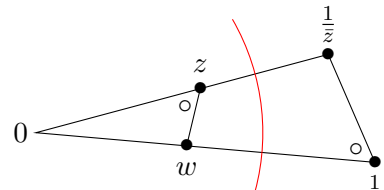
- (a) 4点 P_0, P_1, P_2, P_3 がこの順に一直線上にあるとき, トレミーの定理と同じ以下の関係式が成り立つことを示せ.

$$P_0P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3P_0 = P_0P_2 \cdot P_1P_3.$$

- (b) A, B を原点 O とは異なる複素平面上の点とし, それらが $z \mapsto \frac{1}{z}$ という反転で移った点を A', B' とする. このとき, $\triangle AOB \sim \triangle B'OA'$ となること, A, B, B', A' は同一円周上にあること, また以下の等式を示せ.

$$A'B' = \frac{AB}{OA \cdot OB}.$$

右図で $\frac{|w|}{|z|} = \frac{|\frac{1}{z}|}{|\frac{1}{w}|}$ より $\triangle z0w \sim \triangle \frac{1}{w}0\frac{1}{z}$.



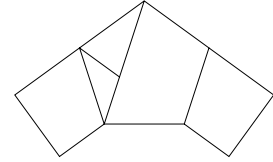
- (c) 円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ に対し, P_0, P_1 を両端とする円弧上の点を原点 O にとって前問の反転を考え, 4点 P_0, P_1, P_2, P_3 が移る点をそれぞれ P'_0, P'_1, P'_2, P'_3 とおく. この4点が同一直線上にあることに注意し, 前2問の結果を用いてトレミーの定理を証明せよ.

- (d) 前問を複素平面上で考え、4点 P_0, P_1, P_2, P_3 に対応する複素数をそれぞれ z_0, z_1, z_2, z_3 とおく. 非調和比 $\frac{(z_0-z_3)(z_1-z_2)}{(z_0-z_2)(z_1-z_3)}$ と $\frac{(z_0-z_1)(z_3-z_2)}{(z_0-z_2)(z_3-z_1)}$ の和を考えることによりトレミーの定理を導け (これらの非調和比は正の実数になる).

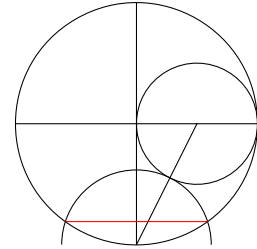
26. 長方形の横長の紙を右のようにおみくじ状に折る.

正五角形の結び目の一辺は、紙の幅の何倍か?

(会田安明「算法天生法指南」1810年)



27. 右下図は円に内接する正五角形の一辺の作図法を与えていることを説明せよ. (平野喜房「浅致算法」1863年)



28. 平面幾何の命題を示すにはいくつかの手法がある.

- (a) 合同, 相似などを用いる初等幾何のみ
- (b) 面積に関わる命題を用いる (三角形の面積など)
- (c) 座標や三角関数を用いる解析幾何的手法
- (d) 複素平面と見なして, 複素数の演算を用いる
- (e) 反転を用いる

このノートに現れた様々な命題について, どのような手法で示されたか, また別の証明がないかを考えてみよう.

29. 丸山良寛の定理の逆は成り立つか? すなわち凸四角形の対角線による三角形分割において, 内線円の半径に $r_0 + r_1 = r_2 + r_3$ の関係があるなら, 四角形は円に内接するか?

30. ケイジーの定理は逆が成り立つか?

11 あとがき

2020年~2021年は, コロナ禍のため対面での自由な交流が減り, 筆者はリモートでの講義や講演がほとんどで, 自宅にいることが増え, 散歩は都心から離れた方面が多くなった. 2021年6月にさいたま市円阿弥の日枝神社で, たまたま算額に出会って興味を持った. その後, Japanese theoremを知り, その美しさに感動すると共に, 江戸時代の庶民が和算に関心を持っていたことに驚いた. インターネットや以下の参考文献で, 算額を仲介として広く庶民の間に普及した和算のレベルの高さを垣間見ることが出来た. 筆者が算額に興味を持ち始めてから一ヶ月ほどだが, 初等幾何学に関わる問題が多く, 視覚的にも分かりやすいので教育に役立つのではないかと考えてこのノートを書いた. それと同時に, 正確な円や直線の図を容易に描けるようにするため, TeX用のプログラムをRisa/Asir上で開発した (cf. [18]).

以下の参考文献からは学ぶことが多く, その著者やインターネットで情報を公開されている方々に敬意を払うとともに, 深く感謝いたします.

参考文献

- [1] 藤田嘉言, 続神壁算法, 1807.
- [2] 白石長忠闕-池田貞一編, 写本数理無尽蔵, 1830.
- [3] 深川英俊, 例題で知る 日本の数学と算額, 付: 全国算額一覧, 森北出版社, 1998.
- [4] 田村三郎, John Cassey について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1130**(2000), 8-10.
- [5] 上垣涉, Japanese Theorem の起源と歴史, 三重大学教育学部研究紀要 **52**(2001), 23-45.
- [6] W. Reyes, An application of Thébault's theorem, Forum Geometricorum **2**(2002), 183-185.
- [7] S. Gueron, Two applications of generalized Ptolemy theorem, Amer. Math. Monthly **109**(2002), 362-370.
- [8] A. Ahuja, W. Uegaki and K. Matsushita, Japanese Theorem : A little known theorem with many proofs, PART I, II, Missouri Journal of Mathematical Sciences **16**(2004), 72-80, 149-158.
- [9] 小寺裕, だから楽しい 江戸の算額, 研成社, 2007.
- [10] 五輪教一, 黄金比の眠るほこら, 算額探訪から広がる数学の風景, 日本評論社, 2015.
- [11] J. M. Unger, A Collection of 30 Sangaku Problems, Department of East Asian Languages & Literatures, The Ohio State University, 2016.
- [12] 平田浩一, 四宮雅士, 池田の定理の拡張について, 愛媛大学教育学部紀要 **65**(2018), 137-141.
- [13] 大島利雄, 個数を数える, 数学書房, 2019.
- [14] 大島利雄, 中高生向けの講義の工夫, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **2142**(2020), 1-10.
- [15] 小寺裕, 和算の館 — 福島県田村大元神社, <http://www.wasan.jp>.
- [16] 山口正義, やまぶき — 和算と歴史随想, <https://yamabukiwasan.sakura.ne.jp>.
- [17] 三春の算額, 動画で見るニッポンみちしる, NHK アーカイブス.
- [18] 大島利雄, os_muldif.rr, 数式処理言語 Risa/Asir のライブラリ, 2008-2021.
- [19] 高遠節夫, Japanese Theorem(flip), Sample of KeTCindy, 2021.
<https://s-takato.github.io/ketcindysample/misc/offline/jpntheoremv3jssoffL.html>