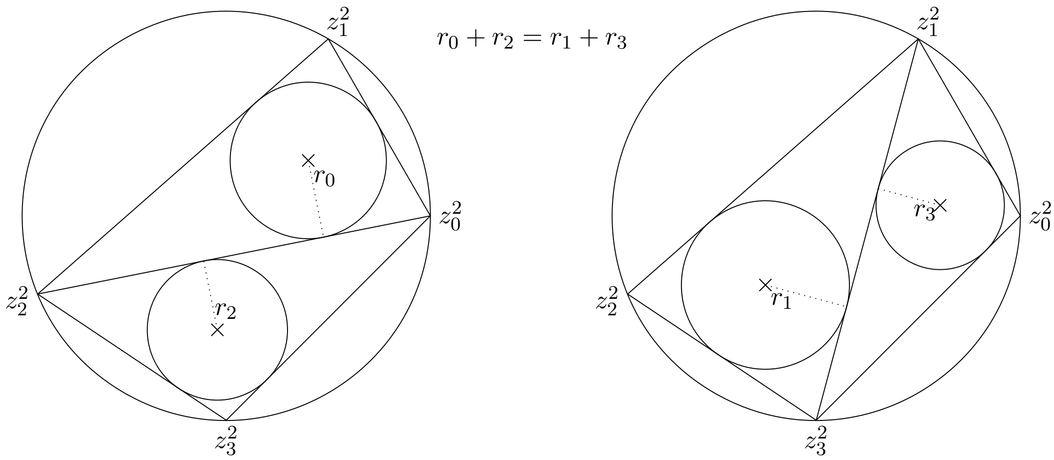
# 複素数平面での Japanese Theorem

城西大学 数理・データサイエンスセンター 大島利雄

**定理**. 円に内接する多角形を描く．頂点を結ぶ互いに交差のない対角線を用いて多角形を三角形に分割したとき，三角形の内接円の半径の和は分割の仕方によらない．

この定理は Japanese Theorem と呼ばれる．その証明は，多角形の三角形分割のフリップを使うと円に内接する四角形の場合に帰着される．円に内接する四角形の場合の Japanese Theorem は，西暦 1800 年に丸山良寛が奉納した「算額」が起源とされている．

そのいくつかの証明や関連する問題について, 教材への利用を念頭に置いて [O] で解説した．複素数を使った簡潔な証明も可能で，このノートで補足としてそれを述べる．




## 丸山良寛の定理の証明

複素数 $z$ と $w$ が，複素数平面の単位円周上にあるとき

$$|z-w|^2 = (z-w)(\tfrac{1}{z}-\tfrac{1}{w}) = \frac{-(z-w)^2}{zw},$$
$$|z-w| = \sqrt{(z-w)(\tfrac{1}{z}-\tfrac{1}{w})} = \sqrt{\frac{(z-w)^2}{-zw}},$$

$(z,w)$ を $(z^2,w^2)$ で置き換えると

$$|z^2-w^2| = \sqrt{(z^2-w^2)(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{w^2})} = \frac{z^2-w^2}{izw} \qquad (0 \le \operatorname{Arg} w < \operatorname{Arg} z \le \pi)$$

なお，$z=e^{i\theta_z}$, $w=e^{i\theta_w}$ のとき

$$\frac{z^2-w^2}{izw} = 2\sin(\theta_z-\theta_w).$$

三辺の長さが $a$, $b$, $c$ の三角形の面積 $S$ および内接円の半径 $r$ は，$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ より

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \qquad (\text{Heron の公式}),$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

$z_j^2$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ を頂点とする単位円に内接する四辺形を考える．ただし

$$0 \le \operatorname{Arg} z_0 < \operatorname{Arg} z_1 < \operatorname{Arg} z_2 < \operatorname{Arg} z_3 < \pi. \tag{1}$$

$z_0^2$, $z_1^2$, $z_2^3$ を三辺とする三角形の三辺の長さを $a$, $b$, $c$ とすると $a+b+c$ は

$$\begin{aligned}\frac{z_1^2 - z_0^2}{iz_0z_1} + \frac{z_2^2 - z_1^2}{iz_1z_2} + \frac{z_2^2 - z_0^2}{iz_2z_0} &= \frac{z_2(z_1^2 - z_0^2) + z_0(z_2^2 - z_1^2) + z_1(z_2^2 - z_0^2)}{iz_0z_1z_2} \\ &= \frac{(z_2 - z_0)(z_1 + z_0)(z_2 + z_1)}{iz_0z_1z_2}.\end{aligned}$$

一方 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ は, 上式で $\{z_0, z_1, z_2\}$ のうちの 1 つを $-1$ 倍したもの 3 つの積の $-1$ 倍となる．それの分母は $(iz_0z_1z_2)^3$ で分子は

$$\begin{aligned}&(z_2+z_0)(z_1-z_0)(z_2+z_1)\cdot(z_2-z_0)(-z_1+z_0)(z_2-z_1)\cdot(-z_2-z_0)(z_1+z_0)(-z_2+z_1) \\ &\qquad = -(z_2-z_0)(z_1+z_0)(z_2+z_1)(z_2+z_0)^2(z_1-z_0)^2(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

の $-1$ 倍となるので，この三角形の内接円の半径は

$$r(z_0, z_1, z_2) := \frac{(z_2+z_0)(z_1-z_0)(z_2-z_1)}{-2z_0z_1z_2} \tag{2}$$

である．よって

$$\begin{aligned}r(z_0, z_1, z_3) &= \frac{(z_3+z_0)(z_1-z_0)(z_3-z_1)}{-2z_0z_1z_3}, \\ r(z_0, z_1, z_3) - r(z_0, z_1, z_2) &= \frac{(z_1-z_0)(z_3-z_2)(z_0z_1+z_2z_3)}{-2z_0z_1z_2z_3}.\end{aligned} \tag{3}$$

また

$$\begin{aligned}r(z_0, z_2, z_3) &= \frac{(z_3+z_0)(z_2-z_0)(z_3-z_2)}{-2z_0z_2z_3}, \\ r(z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_3+z_1)(z_2-z_1)(z_3-z_2)}{-2z_1z_2z_3}, \\ r(z_0, z_2, z_3) - r(z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_1-z_0)(z_3-z_2)(z_0z_1+z_2z_3)}{-2z_0z_1z_2z_3}.\end{aligned} \tag{4}$$

よって，(3) と (4) より

$$r(z_0, z_1, z_2) + r(z_0, z_2, z_3) = r(z_0, z_1, z_3) + r(z_1, z_2, z_3).$$

## 参考文献

[O] 大島利雄，Japanese Theorem について，城西大学数学科数学教育紀要 **3** (2021), 69–91.