平面図形における最短経路と GeoGebra の活用事例

日本大学理工学部 杉本和希， 大村侑義， 川口桃花， 室井龍二， 鷲尾勇介，
鷲尾夕紀子，谷部貴一，利根川聡，古津博俊[1]， 平田典子[2]

1 はじめに

Texture を基にした GeoGebra ソフトウェアの長所は，無料であること，汎用性が高いこと，世界中で活用されていること，幾何学的な見やすさがあることなど，様々な点が挙げられよう。加えて，iPad など手で自由に動かせるタブレット教材に向いていることが特筆すべきものと思われる。これらの長所を活かすためには，形の大きさなどに依存しないような初等幾何学の諸性質を確かめる場面が適切であろうと考え，今回の最短経路問題の考察に至った次第である。

最短経路問題にはいくつかの種類があるが，我々はまず，この論文で定める最短経路問題に関して三角形で最初に考え，その後長方形・平行四辺形・等脚台形等への拡張および GeoGebra の活用に関する考察を述べることにしたい。

2 研究成果

我々は近年 GeoGebra を用いた動的教材について考究し，数学教育セミナー「TEX による教材作成」及び日本工学教育研究講演会，International Congress on Mathematical Education(2021) 等で発表を行ってきた。ここでは，その一部として最短経路問題を題材とした教材及びその数学的な背景と，実際に授業を行った結果について報告する。

三角形 ABC において，3 つの線分 AP, BP, CP の長さの和が最も短くなる点 P はどこかという問題に対しては以下の定理が存在する。

定理 1 [4] すべての角が 120° 未満である三角形 ABC の外部に，3 つの正三角形 $\mathrm{ABC'}$,$\mathrm{BCA'}$, $\mathrm{CAB'}$ を付けると，3 つの線分 $\mathrm{AA'}, \mathrm{BB'}, \mathrm{CC'}$ は 1 点 P で交わり，この点 P において $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ は最も短くなる。このとき $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP} = \mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$ であり，AP,BP,CP のなす角はすべて 120° である。

（注）P はあとで定義する等角分岐点になっている。

この定理により，3 点の作る三角形のすべての角が 120° 未満である場合には，上の $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ が最短経路になる。どれか 1 つの角が 120° 以上の場合には，その角を挟む二つの辺を合わせたものが最短経路になる。
この定理の証明にはある三角形をある頂点の周りに 60° 回すものがあり，GeoGebra を用いた教材の題材として適している。我々はこの証明と，特定の四角形の場合の最短経路問題をセットにした教材をいくつか作成してきた。

[1]E-mail: furutsu.hirotoshi@nihon-u.ac.jp
[2]E-mail: hiratakohno.noriko@nihon-u.ac.jp

まず一般の最短経路問題に関する定義を述べておく。

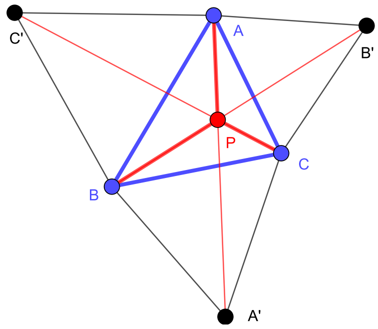


図 1: 定理 1

定義 1 $\mathbb{R}^N$ の相異なる n 個の点 $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ に対して，$\mathbb{R}^N$ の有限個の線分からなる集合 $\mathfrak{P} = \{I_1, \cdots, I_l\}$ が以下の条件を満たすとき，$\mathfrak{P}$ を $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ をつなぐ経路とよぶ:

(1) $I_1, \cdots, I_l$ の端点全体の集合を $P(\mathfrak{P})$ とする。$\mathrm{A}_, \cdots, \mathrm{A}_n$ は $P(\mathfrak{P})$ に含まれる。

(2) 各 I_k は，$\mathfrak{P}$ の他の線分と端点以外に共有点を持たない。$(k = 1, \cdots, l)$

(3) $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $S(\mathfrak{P}) = I_1 \cup \cdots \cup I_l$ が連結である。

このとき，$\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ を頂点，$P(\mathfrak{P})$ から $\mathrm{A}_1 \cdots, \mathrm{A}_n$ を除いた残りの点 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_m$ を分岐点とよび，頂点と分岐点を併せて点とよぶ。また，$I_1, \cdots, I_l$ の長さの和を $\mathfrak{P}$ の長さといい，$L(\mathfrak{P})$ で表す.

定義 2 $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ をつなぐ 2 つの経路 $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ が，$S(\mathfrak{P}) = S(\mathfrak{P}')$ を満たすとき，$\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{P}'$ は同値であるとする。同値な経路のうちで，線分が最も少ないものを代表経路とよぶ。$\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ をつなぐ代表経路のうちで，長さの最も小さいものを，$\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ をつなぐ最短経路とよぶ。

命題 1 (1) 最短経路において，ある点から 2 本の線分が出ているとき，その間の角は $120°$ 以上である。
(2) 最短経路において，分岐点からは必ず 3 本の線分が出ており，その間の角はすべて $120°$ である。

定義 3 命題 1 の (2) の条件を満たす分岐点を等角分岐点とよぶ。すべての点が命題 1 の条件を満たす代表経路を，最短経路候補とよぶ。

命題 2 (1) ループのない経路において，$l = n + m - 1$ である。
(2) 最短経路において，$m \leq n - 2$ である。

以後は平面内で考える。また，経路を構成する線分を $+$ で繋いだ形で表す。

命題 3 4 個の頂点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ をつなぐ最短経路は以下のいずれかの形である。なお，P, Q は等角分岐点であり，他の角はすべて $120°$ 以上である。
(1)$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{BD}$ (4 通り考えられる),
(2)$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD}$ (12 通り考えられる),
(3)$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP} + \mathrm{CD}$ (12 通り考えられる),
(4)$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DQ} + \mathrm{PQ}$ (3 通り考えられる)

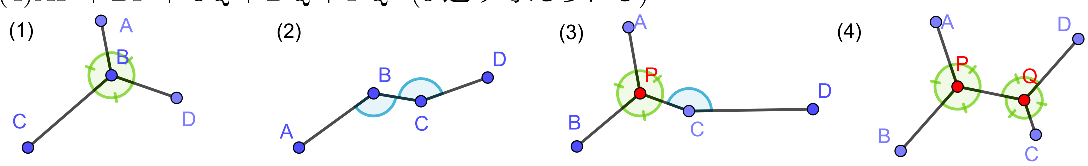


図 2: 命題 3

補題 1 4 個の頂点 $\mathrm{A, B, C, D}$ において，四角形 ABCD が凸四角形のとき，以下の型の最短経路候補は存在しない：(1) 型，(2) 型で 2 つの対角線を含む，(3) 型で対角線を含む，(4) 型の $\mathrm{AX+CX+BY+DY+XY}$。

証明 (1) 型の 4 点で四角形を作ると 1 つの内角が $240°$ になる。2 つの対角線 AC と BD は交わるため，経路にならない。$\mathrm{AP+BP+CP+BD}$ において，$\mathrm{AP+CP}$ と BD は交わるため，経路にならない。$\mathrm{AX+CX+BY+DY+XY}$ において，$\mathrm{AX+CX}$ と $\mathrm{BY+DY}$ は交わるため，経路にならない。■

補題 2 4 個の頂点 $\mathrm{A, B, C, D}$ において，(4) 型の最短経路候補 $\mathfrak{P} = \mathrm{AP{+}BP{+}CQ{+}DQ{+}PQ}$ が存在するとき，(2) 型で AB と CD をともに含む経路と，(3) 型で AB と CD のいずれか含む経路に最短経路候補は存在しない。

証明 図 3 において三角形 ABE と三角形 CDF は正三角形とする。四角形 EBCF において，角 B と角 C の和は $360°$ 未満であるから，$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{BCD} < 240°$。従ってともに $120°$ 以上にはならず，$\mathrm{AB+BC+CD}$ は命題 1(1) を満たさない。$\angle\mathrm{ACF} < 180°$ より $\angle\mathrm{ACD} < 120°$。従って $\mathrm{AB+AC+CD}$ は命題 1(1) を満たさない。$\angle\mathrm{ECF} < 180°$ より $\angle\mathrm{ECD} < 120°$。従って等角分岐点 P' に対して，$\mathrm{AP'+BP'+CP'+CD}$ は命題 1(1) を満たさない。他の場合も同様に示せる。■

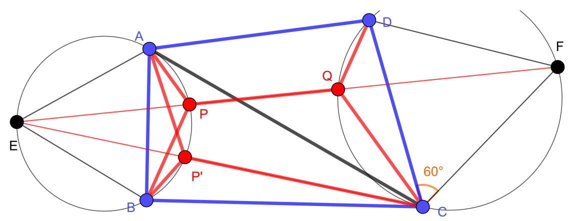


図 3: 補題 2

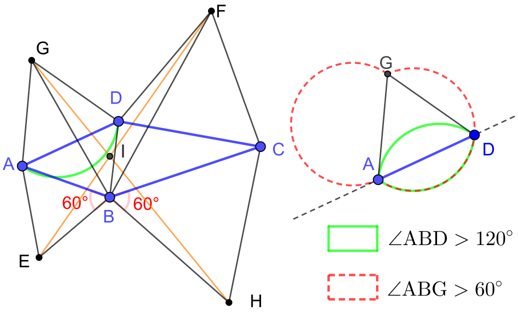


図 4: 命題 4

命題 4 4 個の頂点 $\mathrm{A, B, C, D}$ において，P,Q,R,S を等角分岐点とする 2 つの (4) 型の最短経路候補 $\mathrm{AP+BP+CQ+DQ+PQ}$ と $\mathrm{DR+AR+RS+BS+CS}$ がともに存在するとき，四角形 ABCD は凸四角形である。

証明 $\angle\mathrm{EBA} = 60°$，$\angle\mathrm{EBD} < 180°$ より，$\angle\mathrm{ABD} < 120°$。よって B が AD より下にあれば，$\angle\mathrm{ABG} < 60°$ であり，$\angle\mathrm{ABG} < \angle\mathrm{EBA}$。B が AD より上ならば $\angle\mathrm{A} \geq 180°$ より $\angle\mathrm{B} < 180°$。同様にして $\angle\mathrm{CBF} < \angle\mathrm{HBC}$。一方 $\angle\mathrm{FBG} < \angle\mathrm{FIG} = \angle\mathrm{EIH} < \angle\mathrm{EBH}$。従って，$\angle\mathrm{ABG} + \angle\mathrm{FBG} + \angle\mathrm{CBF} < \angle\mathrm{EBA} + \angle\mathrm{EBH} + \angle\mathrm{HBC}$。よって内角 B は $180°$ より小さい。他の内角も同様。■

定理 2 4 個の頂点 $\mathrm{A, B, C, D}$ において，2 つの (4) 型の最短経路候補 $\mathrm{AP+BP+CQ+DQ+PQ}$ と $\mathrm{DR+AR+RS+BS+CS}$ がともに存在するとき，そのどちらかが最短経路である。

証明 命題 4 より，四角形 ABCD は凸であり，補題 1 により 13 通りが最短経路候補から排除される。また，$\mathrm{AP+BP+CQ+DQ+PQ}$ と $\mathrm{DR+AR+RS+BS+CS}$ が存在する

から，補題 2 より，それぞれ 8 通りが排除されるため，31 通りのうち 29 通りが排除されることになり，残るのはこの 2 つだけとなる。■

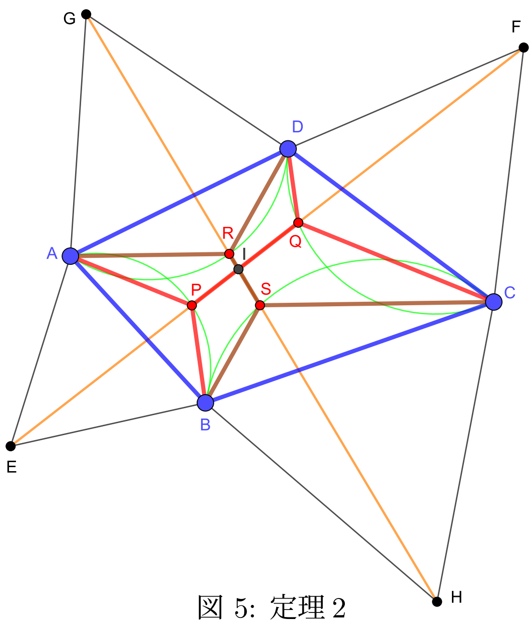


図 5: 定理 2

以下に教材に用いた具体例を紹介する。

例 1 （正方形，長方形，ひし形）[1]

正方形とひし形においては，AP + BP + CQ + DQ + PQ と DR + AR + RS + BS + CS が最短経路である。
AB < BC の長方形においては，AP + BP + CQ + DQ + PQ が最短経路である。

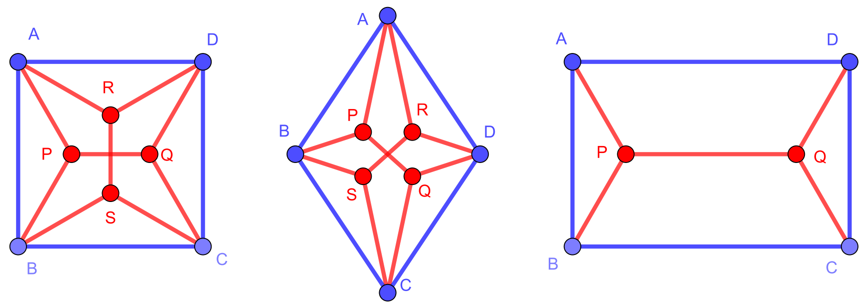


図 6: 例 1

証明の概略 正方形とひし形においては，2 つの対角線で区切った 4 つの直角三角形はその内部にフェルマー点（等角分岐点）を持ち，それらをつないだものは (4) 型の最短経路候補になる。長方形においては，凸より 13 種が排除され，(4) 型の最短経路候補 $\mathfrak{P} =$ AP + BP + CQ + DQ + PQ は必ず存在するので 8 種が排除される。4 型の最短経路候補 $\mathfrak{P}' =$ AR + DR + BS + CS + RS は存在するとは限らないが，存在すれば残りの 8 種も排除され，$L(\mathfrak{P}) < L(\mathfrak{P}')$ は簡単に示せる。存在しないときは，この 8 種がそれぞれ先に排除された 8 種の対応する経路より長いことが示せる。■

例 2 （平行四辺形）[2]

4 点 ABCD を結んだ図形が角 B が $90°$ 未満で AB<BC の平行四辺形になるときは 2 つの場合に分けられる．

(A) $\angle$BAC $< 120°$ のとき（即ち，点 D が緑の範囲にあるとき）は，最短経路は図 7(A) のとおりである．P,Q は等角分岐点になっている．

(B) $\angle$BAC $\geq 120°$ のとき（即ち，点 D が赤の範囲にあるとき）は，最短経路は図 7(B) のとおりである．

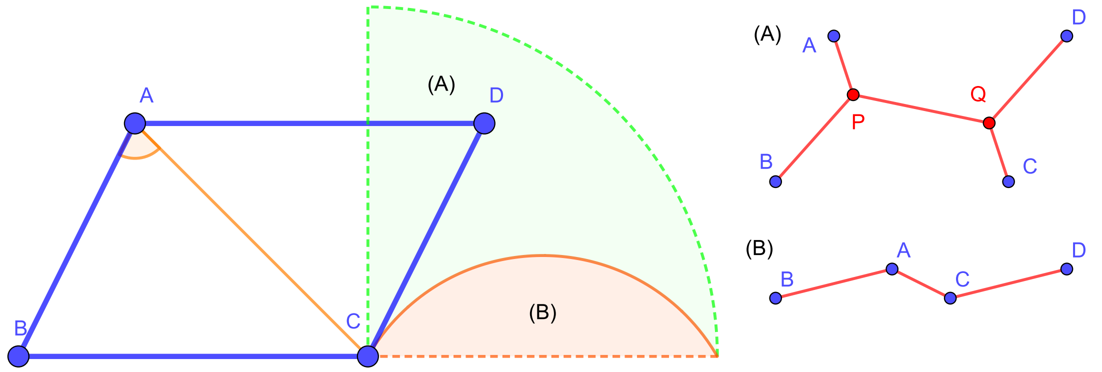


図 7: 例 2

証明の概略 凸より 13 種が排除される。(A) の場合，(4) 型の最短経路候補 $\mathfrak{P}$ = AP + BP + CQ + DQ + PQ は必ず存在するので 8 種が排除される。(4) 型の最短経路候補 $\mathfrak{P}'$ = AR + DR + BS + CS + RS は存在するとは限らないが，存在すれば残りの 8 種も排除され，$L(\mathfrak{P}) < L(\mathfrak{P}')$ も示せる ([2])。存在しないときは，この 8 種がそれぞれ先に排除された 8 種の対応する経路より長いことが示せる。(B) の場合，(3) 型と (4) 型の最短経路候補は存在せず，(2) 型の中でもっとも短いものが，BA + AC + CD である。■

例 3 （等脚台形）[3]

4 点 ABCD を結んだ図形が AD//BC で AD<BC の等脚台形になるとき，4 点の座標を，A$(-x, y)$,B$(-1, 0)$, C$(1, 0)$,D(x, y) $(y > 0)$ ととれば，$0 < x < 1$ であり，最短経路は x, y の値に応じて以下の 3 通りになる．$f(x) = \frac{1}{3}\left\{(\sqrt{3}-2)x + \sqrt{3} + 4\sqrt{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-x)x}\right\}$ とする．

(A) $x \leq 2-\sqrt{3}$ で $y \leq f(x)$ のときと，$x > 2-\sqrt{3}$ で $y \leq \sqrt{3}-\sqrt{3}x$ のとき（即ち，点 D が青の範囲にあるとき）は，最短経路は図 8(A) のとおりである．

(B) $x > 2-\sqrt{3}$ で $\sqrt{3}-\sqrt{3}x < y \leq x+1$ のとき（即ち，点 D が緑の範囲にあるとき）は，最短経路は図 8(B) のとおりである．P,Q は等角分岐点になっている．

(C) $x \leq 2-\sqrt{3}$ で $y \geq f(x)$ のときと，$x > 2-\sqrt{3}$ で $y \geq x+1$ のとき（即ち，点 D が赤の範囲にあるとき）は，最短経路は図 8(C) のとおりである．R,S は等角分岐点になっている．

略証 凸より 13 種が排除される。(2) 型の中でもっとも短いものは，BA + AD + DC か AD + DC + CB であるが，後者は最短経路候補の条件を満たさない。前者は (A) の経路で，その存在条件は $\angle$ADC$\geq 120°$ である。また，その長さは $2x + 2\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ である．

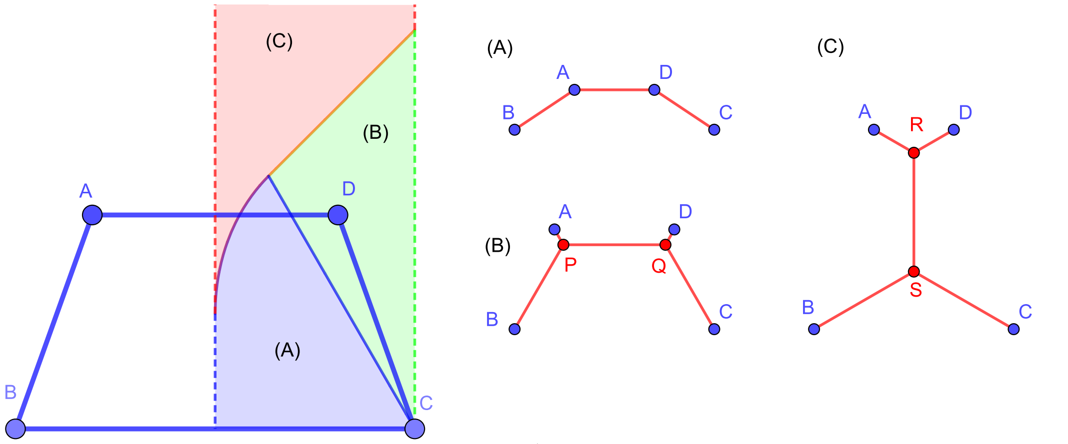
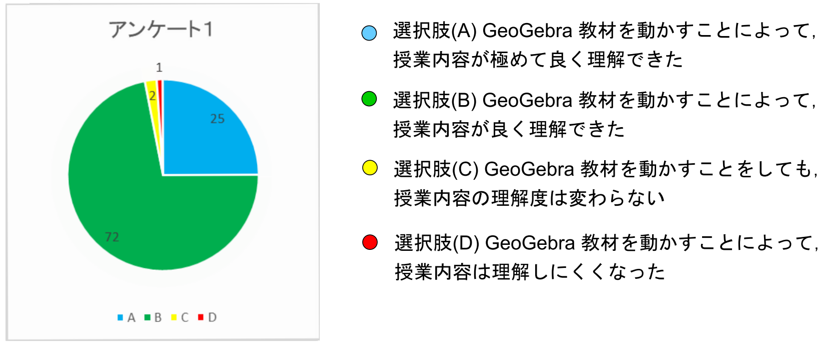


図 8: 例 3

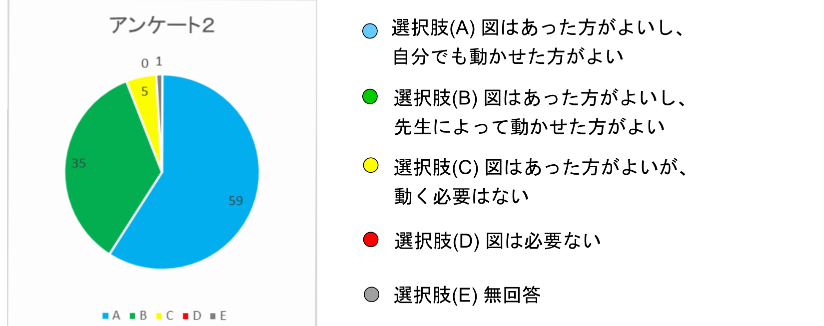
(3) 型の経路は最短経路候補の条件を満たさない。(4) 型の最短経路候補 (B) $\mathfrak{P} = \mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DQ} + \mathrm{PQ}$ の存在条件は，$\sqrt{3}(1-x) < y < \sqrt{3}(x+1)$ であり，$L(\mathfrak{P}) = x + \sqrt{3}y + 1$ である。(4) 型の最短経路候補 (C) $\mathfrak{P}' = \mathrm{AR} + \mathrm{DR} + \mathrm{BS} + \mathrm{CS} + \mathrm{RS}$ の存在条件は，$y > \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ であり，$L(\mathfrak{P}') = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}$ である。2 つの最短経路候補が存在する領域では長さを比較して小さい方が最短経路となる。■

昨年，主に例 2 の内容をもとに作成した GeoGebra 教材を用いて行った授業のアンケート結果は、以下のようになった。

アンケート１　フェルマー点に関するGeoGebra 教材について，授業の感想をお聞かせ下さい



アンケート２　フェルマー点に関するGeoGebra 教材について，授業の感想をお聞かせ下さい



「自分で動かすことのできる教材を用いての授業はよく理解できた」という学生が多数であった。GeoGebra を用いた動的教材は幾何学の分野では有効であると考えることができる。

一方、アンケート 1 及びアンケート 2 における選択肢 (C)(D) の回答者についてであるが、おそらくその場で GeoGebra 教材を動かせなかった場合ではないか、例えば静画のみ視聴した等の可能性も排除できないということもあり、次年度以降に工夫して臨みたい。加えて査察者の先生からいただいた貴重なコメント「アンケートの結果は妥当だと思えるが，もう少し細かい点まで明らかになるとさらに参考になると思う」という点、特に

(1) 最短経路の意味を理解できたのか.

(2) 平行四辺形の形について，領域 (A) と領域 (B) の違いについて，そのような違いが出ることを納得できたのか，或いは，違いを面白いと感じたのか.

(3) 最短経路の形について，図を動かしながら大よその予測が可能だったかどうか.

というご指摘に関しては、次の課題として是非とも取り上げたい。

3　まとめと今後の課題

今後の研究課題としては，さらに一般の形状をもつ四角形における最短経路問題を題材とするべく，試行錯誤を行なっている。また，特に 3 頂点が特定の三角形になるような 4 点における最短経路問題も考察したいと考えている。

参考文献

[1] 鷲尾夕紀子, 古津博俊, 平田典子, 最短経路を iPad で示す動的教材の提案 -GeoGebra 動的教材による幾何学教育実践-, 2020 年度日本工学教育研究講演会講演論文集, (2020), 256–257.

[2] 鷲尾夕紀子, 西林大樹, 古津博俊, 平田典子, 平行四辺形の最短経路を iPad で示す動的教材の提案 -GeoGebra 動的教材による幾何学教育実践-, 2021 年度日本工学教育研究講演会講演論文集, (2021), 92–93.

[3] 大村侑義, 鷲尾勇介, 鷲尾夕紀子, 古津博俊, 平田典子, 等脚台形の最短経路を iPad で示す動的教材の提案 -GeoGebra 動的教材による幾何学教育実践-, 2022 年度日本工学教育研究講演会講演論文集, (2022), accepted for publication.

[4] 山下光雄, 対話でたどる円の幾何, オーム社, (2013).