万有引力の法則の発見と解析幾何

熊本大学大学院先端科学研究部（理学部） 原岡喜重[1]

1 はじめに

熊本大学理学部では，2 年生向けに「解析幾何」という講義があります。内容は主にベクトル解析です。ベクトル解析というとベクトル値関数の微分積分学というように思われるかもしれませんが，実質的な内容は線積分・面積分・体積分の定式化と，それらの間に成り立つ Stokes の定理です。その初回の講義で，なぜ線積分・面積分・体積分といったものを学ぶのか，という動機を説明したいと考え，いろいろな題材を頭に浮かべてみました。ベクトル解析は電磁気学と密接に関わるので，たとえば曲面上に電荷が分布しているとき，そのまわりの空間の静電場を求めようと思うと曲面上の面積分が必要になる，といった例はいくつか思いつきます。つまりすでにある（物理）法則を現実の問題に適用しようというとき，曲線や曲面の上で積分する必要が生じるから，というのが一つの説明となるでしょう。一方，新しい（物理）法則を見つけ出すときにも，場合によっては曲線上の積分や曲面上の積分がその発見に寄与することがあります。線積分・面積分・体積分をよく理解していれば，思考の幅が広がり法則の発見にもつながる，というのは，学ぶ動機の説明としてなかなか面白いと思われました。そこで，ニュートンによる万有引力の法則発見の背後には積分がある，というお話をすることにしました。

本稿は，2022 年 4 月の実際の講義で行った説明に基づいて，ニュートンの法則発見の様子を定量的に解説するものです。ただし実際にニュートンがどのような思考を巡らせたか，ということを説明したものではなく，発見されるべき法則はこの形をしていなければならない，という必然性について述べたものとご了解下さい。

2 ニュートンの万有引力の法則

ニュートンの万有引力の法則は，2 つの物体はお互いに引力を及ぼし合い，その大きさはそれぞれの質量に比例し距離の 2 乗に反比例する，というものです。2 つの物体の質量を M_1, M_2，2 つの物体の間の距離を R とすると，万有引力の大きさは

$$G\frac{M_1M_2}{R^2} \tag{1}$$

で与えられる，ということです。ただし $G > 0$ は比例定数で，万有引力定数と呼ばれます。距離の 2 乗に反比例するということから，これを逆 2 乗法則と呼ぶことがあります。

この法則の主張は明解でまぎれないように思いますが，実際に使ってみようと思うとすぐに困難に出会います。たとえば太陽と地球とか，地球と月の間の万有引力を考える場合は，それらの間の距離がもの凄く大きいため，太陽・地球・月といった巨大な天体でもあたかも 1 質点のように扱うことができて，法則を明確に適用することができます。そしてや

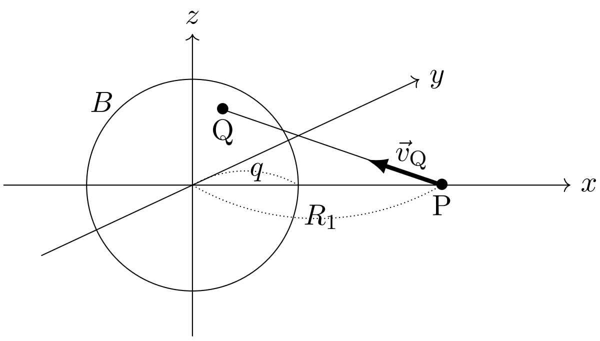
[1]E-mail: haraoka@kumamoto-u.ac.jp

はりニュートンの発見した運動法則と組み合わせることで，惑星の運行に関するケプラーの法則を導くことができます。ところがリンゴが落ちるというような自由落下の場合に適用しようとすると，リンゴと地球の間の万有引力が外力となりますが，リンゴと地球との距離 R はどう取ればよいのでしょうか。というのは，地球は巨大な広がりを持った立体なので，リンゴから遠いところにも近いところにも地球（の部分）があって，2 点間の距離という概念が使えないからです。この場合には，地球の重心に地球の全質量が集中していると想定して，地球の重心とリンゴという 2 点間の距離を取ればよろしい，というのが物理学が教えてくれる解答です。そこでこの節では，この解答の妥当性を調べてみましょう。

問題を次のように設定します。半径 q の球体 B と質点 P とがあり，B の中心と P との距離が R_1 であるとします。B の密度を k，P の質量を m とします。空間座標を，B の中心が原点，P が x 軸上に来るように取ります。すると

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq q^2\},\ \mathrm{P} = (R_1, 0, 0)$$

となります。B から P に働く万有引力は，B の各点と P との間の万有引力の総和として求められます。



それでは B の各点と P の間の万有引力を求め，その総和を求めましょう。任意に $\mathrm{Q} = (x, y, z) \in B$ を取ります。Q が P に及ぼす引力は，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向きで，その長さ（大きさ）が (1) によって決まるベクトルで与えられます。このベクトルを $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ と書きましょう。まず $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ の大きさを求めます。(1) における R は Q と P との距離だから $\sqrt{(R_1 - x)^2 + y^2 + z^2}$ で，M_2 は P の質量として m となります。M_1 は Q の質量ですが，Q は球体 B の 1 点なので，Q のところに微小（無限小）の直方体があると考え，その直方体の質量を Q の質量とすることで B の質量が実現されると考えます。微小直方体の各辺の長さを dx, dy, dz とすると，その体積は $dx\,dy\,dz$ となるので，質量は密度 k を掛けて

$$M_1 = k\,dx\,dy\,dz$$

となります。以上により

$$||\vec{v}_{\mathrm{Q}}|| = G\frac{mM_1}{R^2} = G\frac{mk\,dx\,dy\,dz}{(R_1 - x)^2 + y^2 + z^2}$$

が得られました。ところで B の点 Q に対しては，x 軸に関する対称点 Q' がやはり B 内に存在します。B と P の間の引力は $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ の総和ですが，総和を取るときに $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ と $\vec{v}_{\mathrm{Q'}}$ を組み合わせて和を取ると，x 成分以外の成分は打ち消し合って消えてしまいます。したがって

$\vec{v}_\mathrm{Q}$ の総和は，結局 $\vec{v}_\mathrm{Q}$ の x 成分だけの総和となります。$\vec{v}_\mathrm{Q}$ の x 成分は，$\vec{v}_\mathrm{Q}$ 方向の単位ベクトルが

$$\frac{1}{\sqrt{(R_1-x)^2+y^2+z^2}}(x-R_1, y, z)$$

で与えられることから

$$||\vec{v}_\mathrm{Q}|| \cdot \frac{R_1-x}{\sqrt{(R_1-x)^2+y^2+z^2}} = \frac{Gmk(x-R_1)\,dx\,dy\,dz}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

となります。

　この x 成分の総和 F は B 上の積分で求められます。

$$\begin{aligned}
F &= \iiint_B \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-q}^{q} dx \iint\limits_{y^2+z^2\le q^2-x^2} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy\,dz \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{q^2-x^2}} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+r^2)^{3/2}}\,r\,dr \qquad (r^2=t) \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{q^2-x^2} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+t)^{3/2}}\,\frac{dt}{2} \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{Gmk}{2}(x-R_1)(-2)\Big((R_1-x)^2+t\Big)^{-1/2}\right]_{t=0}^{t=q^2-x^2} \\
&= \int_{-q}^{q} dx(-2\pi Gmk)(x-R_1)\left((R_1^2-2xR_1+x^2+q^2-x^2)^{-1/2}-\frac{1}{R_1-x}\right) \\
&= -2\pi Gmk \int_{-q}^{q} \left(\frac{x-R_1}{\sqrt{R_1^2-2xR_1+q^2}}+1\right)dx \\
&= 2\pi Gmk \left\{\left[-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{R_1^2-2xR_1+q^2}-x\right]_{-q}^{q} - \int_{-q}^{q}\frac{x}{\sqrt{R_1^2-2xR_1+q^2}}\,dx\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (R_1^2-2xR_1+q^2=s) \\
&= 2\pi Gmk \left\{-\sqrt{(R_1-q)^2}-q+\sqrt{(R_1+q)^2}-q-\int_{(R_1+q)^2}^{(R_1-q)^2}\frac{R_1^2+q^2-s}{2R_1\sqrt{s}}\cdot\frac{ds}{-2R_1}\right\} \\
&= 2\pi Gmk \left\{-(R_1-q)+(R_1+q)-2q+\frac{1}{4R_1^2}\left[2(R_1^2+q^2)\sqrt{s}-\frac{2}{3}s^{3/2}\right]_{(R_1+q)^2}^{(R_1-q)^2}\right\} \\
&= 2\pi Gmk\cdot\frac{1}{4R_1^2}\left\{2(R_1^2+q^2)((R_1-q)-(R_1+q))-\frac{2}{3}((R_1-q)^3-(R_1+q)^3)\right\} \\
&= 2\pi Gmk\cdot\frac{1}{4R_1^2}\left\{-4q(R_1^2+q^2)-\frac{2}{3}(-6R_1^2q-2q^3)\right\} \\
&= 2\pi Gmk\cdot\frac{1}{4R_1^2}\left(-4q^3\cdot\frac{2}{3}\right) \\
&= -Gm\left(\frac{4\pi q^3}{3}k\right)\frac{1}{R_1^2}
\end{aligned}$$

最後の辺の $4\pi q^3/3 \cdot k$ は B の質量ですから，F は，B をその重心に質量が集中している質点と思って求める引力と一致しました。つまり，B の各点と P との間の引力の大きさが (1) の形の逆 2 乗法則で与えられるなら，B 全体と P の間の引力の大きさも，距離を B の重心と P との距離と読み替えることで，やはり (1) の形の逆 2 乗法則で与えられる，ということです。

この一致は，積分の計算の途中経過を見ても全く予想できないので，奇跡的な一致に思えます。そしてこのような一致が起こったので，万有引力を表す法則の形は (1) で正しかった，という確証が得られました。

3　検証

万有引力の大きさは距離の 2 乗に反比例する，ということの根拠が得られたわけですが，この考察をより揺るぎないものにするには，2 以外の他の指数ではだめなのかということを検証すればよいでしょう。そこで 2 を $a(\neq 1)$ に取り替えた場合に F を求めてみることにします。$\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ の x 成分は

$$\frac{Gmk(x-R_1)\,dx\,dy\,dz}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{(a+1)/2}}$$

に変わります。これを B 全体で積分してみましょう。

$$\begin{aligned}
F &= \iiint_B \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{(a+1)/2}}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-q}^{q} dx \iint_{y^2+z^2\le q^2-x^2} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+y^2+z^2)^{(a+1)/2}}\,dy\,dz \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{q^2-x^2}} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+r^2)^{(a+1)/2}}\,r\,dr \qquad (r^2=t) \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{q^2-x^2} \frac{Gmk(x-R_1)}{((R_1-x)^2+t)^{(a+1)/2}}\,\frac{dt}{2} \\
&= \int_{-q}^{q} dx \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{Gmk}{2}(x-R_1)\frac{2}{1-a}\Big((R_1-x)^2+t\Big)^{(1-a)/2}\right]_{t=0}^{t=q^2-x^2} \\
&= \int_{-q}^{q} dx\,\frac{2\pi Gmk}{1-a}(x-R_1)\Big((R_1^2-2xR_1+q^2)^{(1-a)/2}-(R_1-x)^{1-a}\Big) \\
&= \frac{2\pi Gmk}{1-a}\int_{-q}^{q}\Big((x-R_1)(R_1^2-2xR_1+q^2)^{(1-a)/2}+(R_1-x)^{2-a}\Big)\,dx \\
&= \frac{2\pi Gmk}{1-a}\left\{\left[-\frac{R_1}{-2R_1}\cdot\frac{2}{3-a}(R_1^2-2xR_1+q^2)^{\frac{3-a}{2}}-\frac{1}{3-a}(R_1-x)^{3-a}\right]_{-q}^{q}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\int_{-q}^{q} x(R_1^2-2xR_1+q^2)^{(1-a)/2}\,dx\right\} \qquad (R_1^2-2xR_1+q^2=s) \\
&= \frac{2\pi Gmk}{1-a}\left\{\frac{1}{3-a}\Big((R_1-q)^{3-a}-(R_1+q)^{3-a}\Big)-\frac{1}{3-a}\Big((R_1-q)^{3-a}-(R_1+q)^{3-a}\Big)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \int_{(R_1+q)^2}^{(R_1-q)^2} \frac{R_1^2+q^2-s}{2R_1} \cdot s^{(1-a)/2} \cdot \frac{ds}{-2R_1} \Bigg\} \\
&= -\frac{2\pi Gmk}{1-a} \cdot \frac{1}{4R_1^2} \left[\frac{2}{3-a}(R_1^2+q^2)s^{(3-a)/2} - \frac{2}{5-a}s^{(5-a)/2} \right]_{(R_1+q)^2}^{(R_1-q)^2} \\
&= -\frac{\pi Gmk}{2(1-a)R_1^2} \left\{ \frac{2}{3-a}(R_1^2+q^2)\Big((R_1-q)^{3-a} - (R_1+q)^{3-a}\Big) \right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{2}{5-a}\Big((R_1-q)^{5-a} - (R_1+q)^{5-a}\Big) \right\}
\end{aligned}
$$

となりました。結果には B の質量も現れないし，F は距離 R_1 の $-a$ 乗にも比例していません。つまり局所的に逆 a 乗法則が成り立つとき，$a=2$ 以外では大域的には逆 a 乗法則は成り立たないのです。このことから逆 2 乗法則が，局所法則と大域法則が整合する奇跡的な法則であったことがわかりました。

以上の考察は，万有引力が逆 2 乗法則に従うことの証明ではありませんが，法則がどのような形をしているだろうか，と考えるときの大きな材料となります。数学的美しさ（整合性）から物理法則を見つけるというのは，アインシュタインが一般相対性理論の発見の際に用いた手法ですが，ニュートンの万有引力の法則においても同じような見方ができるのでした。

注意 1 点と球体の間の万有引力について考えてきましたが，この話は 2 つの球体についても成り立ちます。2 つの球体 B_1, B_2 があったとすると，その間の万有引力は B_1 の各点 P_1 と B_2 の各点 P_2 の間の万有引力の総和になります。B_2 の 1 点 P_2 を固定すると，P_2 と B_1 の各点 P_1 の間の万有引力の総和は，上の議論によって P_2 と B_1 の重心の間の万有引力に等しくなります。そして P_2 が B_2 全体を動いたときのその総和は，今度は B_1 の重心という 1 点と B_2 の間の万有引力としてやはり上の議論で求められ，最終的な答として B_1 の重心と B_2 の重心の間の 2 点間の万有引力に等しくなります。

参考文献

[1] 原岡喜重, 多変数の微分積分, 日本評論社, 2008.