円錐曲線と反射光線に関する連動型 GeoGebra 教材とその効果

日本大学大学院 理工学研究科　室井龍二，　川口桃花，　鷲尾勇介，
日本大学理工学部　鷲尾夕紀子，　谷部貴一，鈴木潔光，利根川聡，古津博俊，　平田典子[1]

1　はじめに

本稿においては，放物線という曲線が他の 2 次曲線にはない特色を持つことに注目し，放物線を題材として円錐曲線と反射光線に関する諸性質の確認を目的とした動的幾何教材及び，授業実践に関して報告する．よく知られた題材ではあるが，数式による正確な証明のみならず，無料ソフトウェアである GeoGebra で作成した教材も活用した授業方法に関して考察する．

受講者が自分の手で動的幾何教材をスマートフォン等で動かすことによって，授業に参加する主体性を促すことを目指した試みと受講者の反応，そして今後に改善すべき点について述べたい．

2　授業デザイン

今回に実践した授業内容について述べる．受講者は都内にある私立大学理系学部の学生であり，以下の二種類の授業を実施した．

(A) 数学の活用について述べるキャリアデザイン授業

(B) 教職課程設置の数学科教育法の授業

上記いずれの授業にも，高等学校の数学 I の履修のみにて大学に入学した学部 3 年生と，高等学校で数学 III まで全てを履修して入学した学部 3 年生が混在している．さらに学部生であっても，数学を専門としない学科の学生も含まれていた．そして受講者の 2 次曲線の既習状況は揃っていなかった．そのために，授業 (A)，授業 (B) それぞれに対し以下のようにデザインした．

(A) 2 次曲線に関しては初習の学生を対象者として想定した授業とする．以下に示すように離心率の定義を用いて 2 次曲線を導入し，反射光線に関する 2 次元の動的幾何教材（GeoGebra により作成）を用いて，放物線の式の意味を理解してもらうようにした．まず反射光線に関するクイズを問いかけ，その後に動的幾何教材を見せて受講者に自分の手で動かすことをさせた後，再度同じクイズを問うた．放物面に関し，Mathematica による 3 次元教材も用いて簡単に説明したが，ソフトウェアの都合で Mathematica 教材を受講者の手元で動かす機会は作れなかった．数式による定義や厳密な証明は，命題 1 として配布し紹介した．

授業 (A) は 2022 年 6 月，キャリアデザイン授業（受講者数 94 名，90 分間）として実施した．

[1]E-mail: hiratakohno.noriko@nihon-u.ac.jp

(B) 2 次曲線及び円錐曲線の定義に関し，既習者を対象として想定した授業とする．

授業 (B) は，2023 年 1 月に数学科教育法の授業（1 回目の受講者数 28 名・2 回目の受講者数 29 名，各 90 分間）で計 2 回実施した．1 回目の受講者と 2 回目の受講者との共通部分はなく，受講者数の合計は 57 名であり，1 回目の受講者は数学科の学生，2 回目の受講者は，数学科以外の学生向けである．授業 (B) の受講者の中には，半年前の授業 (A) も受講していた者が 6 割程度含まれたため，まず 2 次曲線に関する定義及び，放物線と反射光線の性質の復習という第 1 の目的，次いで円錐切断により 3 種類の 2 次曲線が現れることを確認させて，2 次曲線と円錐曲線との関連を意識させるという第 2 の目的のもとに，2 種類の幾何学的対象を連動させた 3 次元の動的幾何教材（GeoGebra により作成）を用いて授業を行った．授業効果に関するアンケートも実施した．

3 次元の場合，放物線を回転させた放物面の形のパラボラアンテナについては，軸に平行に入射した電波を 1 点に集められる効率の良さが知られている．しかしこの事実についての授業での数式による証明は，残念ながら時間的にも内容的にも難しかった．半年前の授業 (A) の 3 次元 Mathematica 教材は教員しか動かせなかったことを反省して，授業 (B) では受講者に 3 次元 GeoGebra 教材を自ら動作させ，考えさせることに時間を費やした．そのため 3 次元では GeoGebra による体験授業を優先し，命題 1 の 3 次元版については，直感的な動的幾何教材による解説のみにとどめることになった．

この 3 次元版に関する数学的証明は，査読者の先生からのご指摘のとおり，本来ならば時間をかけて数学的に厳密に授業したい内容であった．今後に機会があれば是非とも実施したい．

また，ファイル配布方法に関する QR コード活用についても考察を実施した．

3　授業 (A)：2 次曲線について

まず準備として，離心率 e を用いて以下のように 2 次曲線を定義した [2][3].

定義 1 $a > 0$ とする．直線 $y = -a$（準線）からの距離と定点 $(0, a)$（焦点）からの距離の比が $1 : e$ である点 (x, y) の軌跡を考える．その軌跡の方程式は

$$x^2 + (1 - e^2)y^2 - 2a(1 + e^2)y + a^2(1 - e^2) = 0 \tag{1}$$

と表される．本稿では 2 次曲線を方程式 (1) で定まる曲線で定義する．

授業 (A) では，離心率 e により 2 次曲線は以下のように分類されることを説明した．
① $0 < e < 1$ のとき：楕円　② $e = 1$ のとき：放物線　③ $e > 1$ のとき：双曲線

2 次曲線の準線に垂直で焦点を通る直線を 2 次曲線の軸と名付けると，放物線ではこの直線がいわゆる放物線の軸である．授業 (A) では，この軸に平行に入射した光が 2 次曲線で反射するとき，反射光の直線がどのような集まり方をするかという，問題を考察することにした．次の命題 1 は放物線に限り，反射光が 1 点に集まることを示す．

命題 1 放物線の軸に平行に入射した光が放物線で反射すると，反射光線は放物線の焦点と呼ばれる 1 点に集まる．一方，楕円もしくは双曲線においては，軸に平行に入射した光が楕円や双曲線で反射しても，反射光線が 1 点には集まらない．

証明

2 次曲線 (1) 上の点を $A(x_0, y_0)$ とする．入射角 α，反射角 β を図 1 のように，2 次曲線の接線と入射する光の直線とのなす角，反射した後の光の直線とのなす角としてそれぞれ定義する．点 A の x 座標が $x_0 = 0$ であるときは入射する光の直線の方程式は $x = 0$ であり，入射角は $90°$ である．従って反射角も $90°$ であり，反射した後の光を表す直線の方程式は $x = 0$ である．これより 2 次曲線上の点で反射した後の光の直線の全てが 1 点で交わるならば，それは必ず y 軸上においてである．このことから $x_0 \neq 0$ の場合，反射後の光を表す直線の方程式は x_0, y_0 の値に依らず，y 軸上の 1 点を通る．すなわち，反射後の光が 1 点で交わるのは，反射後の光を表す直線の方程式の y 切片が定数になる場合に限ることが分かる．$x_0 \neq 0$ の場合に 2 次曲線の点 $A(x_0, y_0)$ で反射した後の光の直線の方程式を，点 $A(x_0, y_0)$ での接線の方程式の傾きを用いて表そう．

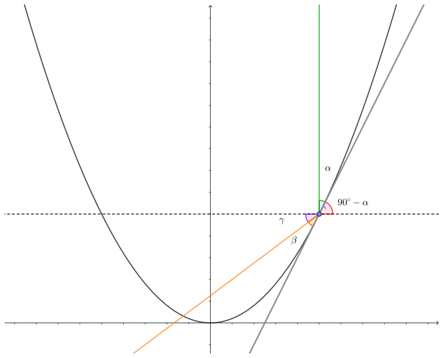

図 1: 命題 1

2 次曲線の対称性から $x_0 > 0$ としても一般性を失わない．2 次曲線 (1) の点 A での接線の方程式の傾きを m_1，点 A で反射後の光の直線の方程式の傾きを m_2 とすると，図 1 より

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)} = \frac{1}{m_1}. \tag{2}$$

また $\beta = (90° - \alpha) + (-\gamma)$ より，加法定理から

$$\tan\beta = \frac{\tan(90° - \alpha) + \tan(-\gamma)}{1 - \tan(90° - \alpha)\tan(-\gamma)} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

が従う．反射の法則から $\alpha = \beta$ となるため，

$$\tan\alpha = \tan\beta \iff \frac{1}{m_1} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.\ \text{これより}\ m_2 = \frac{m_1^2 - 1}{2m_1}. \tag{3}$$

ここで 2 次曲線 (1) の $A(x_0, y_0)$ での接線の傾きを考える．(1) の両辺を x で微分して

$$m_1 = \frac{x_0}{a(e^2 + 1) + (e^2 - 1)y_0} \tag{4}$$

を得る．これより，反射した後の光の直線の方程式は

$$y = \frac{m_1^2 - 1}{2m_1}(x - x_0) + y_0\,.$$

$$\therefore y = \frac{x_0^2 - \{(e^2-1)y_0 + a(e^2+1)\}^2}{2x_0\{(e^2-1)y_0 + a(e^2+1)\}}x + \frac{e^2(e^2-1)y_0^2 + 2a(e^4-1)y_0 + a^2(e^4+e^2+2)}{2\{(e^2-1)y_0 + a(e^2+1)\}}. \tag{5}$$

ここで，$e = 1$，つまり放物線の場合を考える．反射した後の光の直線の方程式は

$$y = \frac{x_0^2 - 4a^2}{4x_0}x + a \tag{6}$$

の形となり，$A(x_0, y_0)$ の座標に依らず，定点 $(0, a)$ を通るため，放物線で反射した光はただ 1 点つまり焦点で集まる．

$e \neq 1$ のとき，つまり楕円や双曲線の場合について考える．反射した後の光の直線の方程式 (5) の y 切片

$$\frac{e^2(e^2-1)y_0^2 + 2a(e^4-1)y_0 + a^2(e^4+e^2+2)}{2\{(e^2-1)y_0 + a(e^2+1)\}} \tag{7}$$

に着目すると，y_0 を変数として見たときに，(7) が定数になるための必要条件は分子の y_0^2 の係数が 0，つまり $e^2(e^2-1) = 0$ となることである．しかし $0 < e \neq 1$ より不成立．従って，楕円や双曲線のときは反射した後の光の直線は 1 点に集まらない． □

以上で命題 1 の証明は完了し，離心率 $e = 1$ である放物線に限り，反射した後の光の直線が 1 点に集まることが示せた．しかしながら命題 1 の証明の数式変形は直感的には理解されにくいと推察された．

そのためこの現象を平易に理解できるような 2 次元の動的幾何教材を考察し，授業 (A) では以下の節で示すものを受講者に見せ，最初にクイズ形式で問い，次に，数学的な証明を与えることにした．

4　授業 (A)：動的幾何教材

授業 (A) では，最初に以下のクイズ 1 を受講者に発問した．次いで動的幾何教材を各自で動かしてもらった後に，改めて同じクイズに答えてもらった．2 次曲線の定義や性質に関する命題 1 の紹介後に，アンケートも実施した．ここではまずクイズ 1 に対し動的幾何教材の活用前後の正答率の変化について述べる．

命題 1 の反射光線の性質を確認させる教材としては，図にある GeoGebra 教材を用いて，放物線の場合に反射光線が 1 点に集まることを確認させ，楕円，双曲線については，反射光線が 1 点に集まらないことも体験してもらった．言うまでもなく円も楕円の一種ではあるが，誤答として誘導しやすいと考え，クイズの選択肢として導入した．

まず，最初に以下のクイズ 1 を受講者に問うた．

【クイズ１】
曲線に対して，真上から垂直に光を入射させる．そのとき，曲線で反射した光が１点に集まるものがある．それはどの曲線かを答えなさい．
① 放物線　② 双曲線　③ 円　④ 楕円

また数学的な証明は時間の都合で省いてしまったが，パラボラアンテナの紹介のため，2 次元の放物線を軸で回転させてできる 3 次元の放物面についてクイズ２を問うた．

【クイズ２】
放物面に対して，反射した光が同じように１点に集まるかどうかについて，答えなさい．
① 放物面では１点に集まらない
② 放物面では場所によっては集まる
③ 放物面でも１点に集まる
④ 知られていない

クイズ１は「①放物線」，クイズ２では「③放物面でも１点に集まる」が正解となる．これらのクイズについては，まず動的幾何教材なしに受講者に答えてもらい，その後に動的幾何教材を提示して受講者に動かしてもらった後，クイズに再度，答えてもらった．その動的幾何教材の図を紹介する．

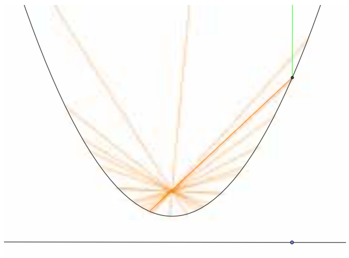

図 2: 反射光線 (放物線)

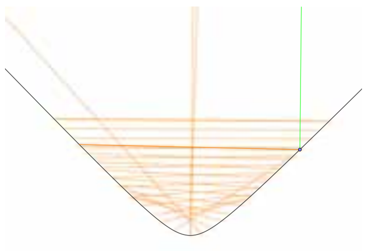

図 3: 反射光線 (双曲線)

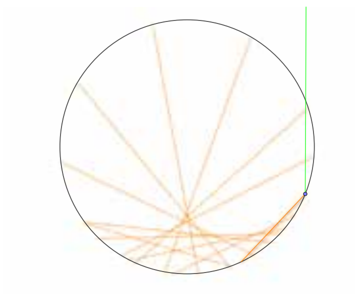

図 4: 反射光線 (円)

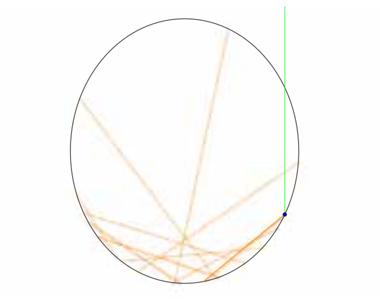

図 5: 反射光線 (楕円)

上記の図はクイズ１に関し，２次曲線での光の反射の様子を表した動的幾何教材である．クイズ１の選択肢順と同じく，図２から図５がそれぞれ放物線，双曲線，円，楕円であり，いずれも GeoGebra で作成したものである．クイズ後に命題１により，放物線で反射光線が１点に集まり，双曲線や楕円では反射光線は１点に集まらない数式証明も与えている．

図 6 の円グラフは，GeoGebra 教材の活用前後における正答率の変化を表す．動的幾何教材の使用後では，クイズ 1 の正答率が使用前の 23 %から 91 %へ向上した．視覚的に現象を捉えられ，ある程度は理解が進んだと考えている．

図 6: クイズ 1 の動的幾何教材 活用前後の正答率

クイズ 2 のための放物面に関する 3 次元動的幾何教材としては，Mathematica で作成した次の図 7 のものを用いた．Mathematica は有料であり，今回は教員が動かして見せるだけに限定されてしまったが，高度な数式を入力できるという長所がある．

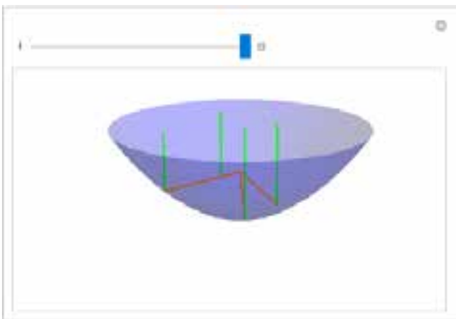

図 7: 放物面に関する動的幾何教材

図 7 の動的幾何教材の活用前後におけるクイズ 2 の正答率は，図 8 の円グラフで示されるように，正答率は 70 %から 87 %へと，少しだけ向上した．

図 8: クイズ 2 の動的幾何教材 活用前後の正答率

5　授業 (B)：円錐曲線と連動する GeoGebra 教材

よく知られているように，2 次曲線は円錐を平面で切断したときの切り口に表れるため，円錐曲線とも言われる．円錐の母線と円錐を切り取る平面とのなす角により，切り口に現れる 2 次曲線は図 9 から図 12 のように変化する．切り取る平面が母線と平行の場合に現れる 2 次曲線が放物線である．そうでない場合の切り口の曲線の形状はそれぞれ円，楕円，双曲線と変化する．

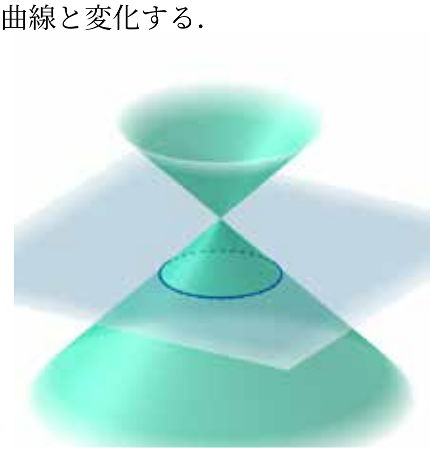

図 9: 円錐曲線（円）

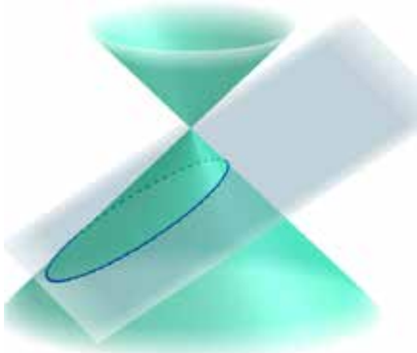

図 10: 円錐曲線（楕円）

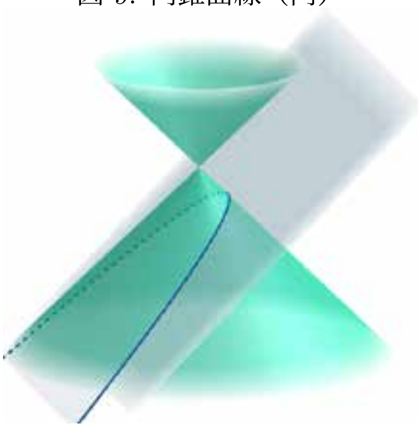

図 11: 円錐曲線（放物線）

図 12: 円錐曲線（双曲線）

授業 (B) では第 2 節に述べた通り，円錐切断により 3 種類の 2 次曲線が現れる円錐曲線の学習及び，第 4 節に述べた 2 次曲線の反射問題の復習という 2 つの目的のもと，2 種類の幾何学的対象を連動させた 3 次元の GeoGebra 教材による授業を実施し，円錐曲線について受講者に自ら手を動かしてもらって確認させた．

第 2 節に前述の通り，授業 (B) の受講者の 6 割が授業 (A) を既に受講しており，2 次曲線の定義と 2 次元の反射光線問題に関する知識があったため，我々は空間図形と平面図形をリンクさせ，反射光線問題及び円錐曲線問題の双方を連動させて動かせるような図 13 から図 15 の動的幾何教材を作成したのである（[1] ではこの部分の考察は実施していない）．

残念なことに，数式を用いて円錐曲線の定義と解説を与えるためには，査読者の先生のご指摘のとおり，かなりハイレベルの数式変形を必要としてしまい，この授業内では時間的にも内容的にも困難であると思われた．そのために GeoGebra 教材にのみ依存する授業内容になってしまった．この点は次回以降の授業で改善したい．

この教材の使い方を説明しよう．最初に図 13 上のスライダーを動かし，画面右側の円錐（緑色）を，回転軸として x 軸を選んで回転させる．円錐を切り取る平面を x-y 平面と設定し，円錐と x-y 平面との交線を切り口の曲線とみなす．

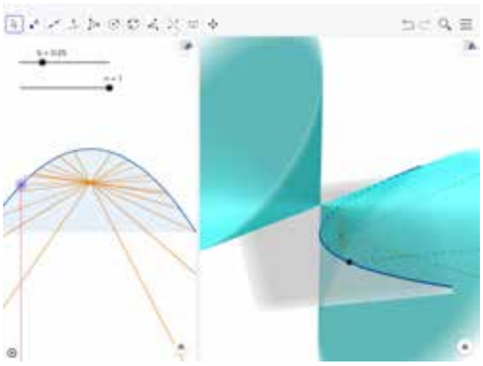

図 13: 二画面が連動する教材（放物線）

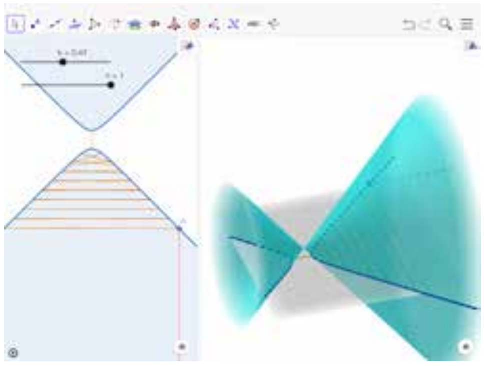

図 14: 二画面が連動する教材（双曲線）

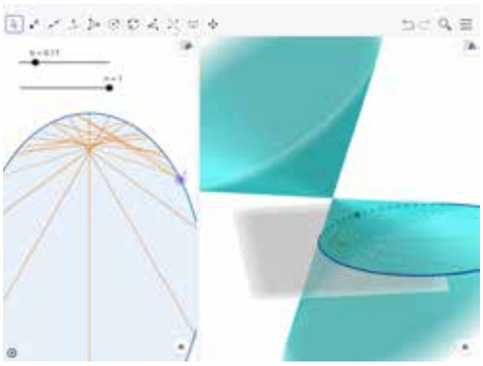

図 15: 二画面が連動する教材（楕円）

ここで円錐のほうを動かし，x-y 平面を切り取る平面として固定することで，画面左側の平面図形を表すグラフィックビューの画面において，見やすい 2 次曲線の図を出現させられることが，この教材の特色である．円錐の母線と x-y 平面が平行になっているため，切り口には放物線（青色）が現れている．これは画面左側にも画面右側にも同時に現れる．切り口に 2 次曲線が現れた後は，上のスライダーには触れない．次に下のスライダーを 0 から 1 にすると，2 次曲線に入射する光の直線（赤色）と，反射した後の光の直線（橙色）が出現する．

画面左側のグラフィックビュー画面の 2 次曲線上の点を動かすことで，反射した後の光の直線が複数現れ，その集まり方を観察することができる．図 13 では 2 次曲線としての放物線が現れており，反射後の光の直線が 1 点に集まっている命題 1 の主張を実際に見て取ることができる．円錐が x-y 平面で切り取られたときの切り口の曲線が双曲線や楕円になる場合についても，同様の操作を行うことで，1 点には決して集まらない様子を観察することができる（図 14，図 15）．

受講者は曲線上の点を自分の手でスライドして，反射した後の光の直線（橙色）がどのように交わっているかを確認することができる．命題 1 で示した通り，放物線のみにおいて光が 1 点に集まり，双曲線，円，楕円では 1 点に集まらない様子を受講者が発見できた様子で，2 次曲線の反射問題に対する命題 1 の定着にも役立ったと考えている．
さらに，次のアンケート 1 を受講者に対して実施した．その結果は図 16 の通りである．ある程度は教育効果があったのではないかと考えている．

特に授業 (B) では，受講者が楽しそうに GeoGebra 教材を動かしていた様子が印象的であった．

【アンケート 1】
GeoGebra による動的幾何教材を導入することで，問題の答えが分かりやすくなりましたか．
① 分かりやすい　② やや分かりやすい　③ あまり分からない　④ 全く分からない

図 16: アンケート 1 の結果

6　QR コードの活用について

いわゆる Z 世代の声を聞いた上で，我々は QR コード活用についての試みを追加した．QR コード経由の GeoGebra 教材ファイル配布には，あらかじめ自分の作成した教材ファイルを GeoGebra 教材サイトに upload しておき，その HTML サイトの URL を QR コードに変換したものを作る作業だけを要する．
いまや現実的な QR コード配布手段は画像を LINE で送る等であり，スマートフォンやタブレットをかざしてアクセスする世の中になった．電車の中でも可能である．

スマートフォンに GeoGebra がインストールされていない場合でも，GeoGebra 教材サイトに QR コード経由でアクセスすれば，インターネット上のやり取りだけで GeoGebra 教材を十分に動かせるのである．その QR コードを並べた図 17 を，教室のスクリーンで各授業の受講者に見せ，スマートフォンで読み取ってもらった．

QR コードは PC やワークステーション端末のない教室や，通学途中でも読み取れる．『授業は教室で行うもの』という考え方以外での新しい使い方が広まる可能性も考えたいという動機に基づいた試行である．難しい数学の説明を要しない場合に，このような授業形態が機能する可能性もあるかもしれない．これらの理由により，GeoGebra 教材の配布方法に関し，受講者に教材をインターネット経由でファイル送付により配布すること，及び，QR コードを経由して配布することの二通りの配布方法を各授業で試行し，比較した．

図 17: QR コードによる教材の提示

まずファイル配布と QR コードによる配布について，受講者側のメリットとデメリットを考え，列記した．その上で，GeoGebra 教材を授業で用いる際の GeoGebra 教材ファイルの配布方法に関して，次のアンケート 2 を実施した．

	メリット	デメリット
ファイル送付による配布	▶ ファイルを直接保存可能 ▶ ファイルの編集ができる	▶ インターネット環境のみならず，前もって GeoGebra を PC にインストールすることが必要 ▶ 重いファイルの受信になる
QR コード配布	▶ 教材が一瞬で開ける ▶GeoGebra 投稿サイトの URL を QR コードにするだけで配布が楽	▶PC では読み取りにくい ▶ その場での保存や編集が簡単にはできない

【アンケート 2】

GeoGebra ファイルの配布方法について，次のどちらが自分の意見に近いですか．

① GeoGebra ソフトウェアをインストールする手間を省いた，スマートフォンでも可能な QR コード読み取りによる配布が良い．

② PC 及び GeoGebra ソフトウェアを用意してもらってから，ファイル送付による配布をした方が良い．

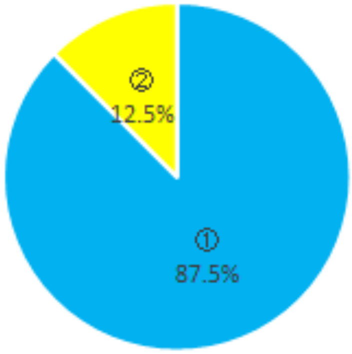

図 18: アンケート 2 の結果

アンケート 2 の結果では図 18 のように，①の QR コード読み取りによる配布を希望する受講者が 87 %を超え，②のファイル送付による配布を希望する割合を大幅に上回った．今回はその場で GeoGebra 教材を操作するだけであったため，スマートフォンやタブレットで簡単に読み取ることができ，操作を始めるまでの時間がかからないことを受講者が重視したのかもしれない．

7 まとめと今後の展望

今回の授業実践においては，日常生活と結び付いた内容の GeoGebra 教材を取り入れた．アンケート 1 の結果より，受講者全員が，やや分かりやすい，または，分かりやすいと回答していることから数式や文章を眺めるだけでは理解しにくい問題であっても，動的幾何教材の導入により，問題の理解にある程度，効果があったかもしれないと思われる．

加えてスマートフォンやタブレットが日常になっている，いわゆる Z 世代の受講者が対象であったせいか，アンケート 2 のように事前インストールの不要な教材 QR コードによる配布が，一定の割合で好まれることも見えてきた．

数式で厳密な証明を与えたあとに動的幾何教材により理解を深める，或いは最初に動的幾何教材を用いたのちに数学的な内容の説明を実施する，などの順番についても，査読者の先生から重要なご指摘をいただいた．今後の授業実践に関して活かさせていただきたいと考えている．

8 高遠節夫先生の動的幾何教材

今回も高遠節夫先生から，極めて高度で素晴らしい動的幾何教材で HTML 上で動かせるものを多数，ご教示いただいた．

この場で是非ともご紹介させていただきたい．数学的に深い示唆に富み，スマートフォンやタブレットにおいて指で動かすことができるものである．ソフトウェアの事前インストールも不要であり，QR コードによっても簡単にアクセスできるため，今後の授業構成，及び教材作成の指針にしたいと考えている．

[i] 離心率 e の値をスライダで変化させたときの曲線の変化を見る動的幾何教材：
https://s-takato.github.io/ketcindysample/misc/offline/parabolaejsoffL.html

[ii] 放物線で軸に平行な光線が焦点に集まる 2 次元動的幾何教材：
https://s-takato.github.io/ketcindysample/s06animation/offline/s0610parabolafocusjsoffL

[iii] 楕円で焦点から出る光線が他の焦点に集まる 2 次元動的幾何教材：
https://s-takato.github.io/ketcindysample/s06animation/offline/s0608ellipsefocusjsoffL

[iv] 双曲線で焦点から出る光線が他の焦点から出たように反射する 2 次元動的幾何教材：
https://s-takato.github.io/ketcindysample/s06animation/offline/s0609hyperfocusjsoffL

今後は今回に構築した教材の他にも，日常生活との結びつきのある数学の題材を探索して，受講者が主体的・能動的に考えられるような教材の考察のみならず，受講者にもGeoGebra 教材作成そのものの面白さを伝えることを，併せて試みたい.

9 謝辞

本研究は，大島利雄先生（城西大学），濱口直樹先生（長野高専），北本卓也先生（山口大学），碓氷 久先生（群馬高専），山下 哲先生（木更津高専），西浦孝治先生（福島高専）主催の第 5 回数学教育セミナー「オンラインを利用した数学教育の現状とこれから」での講演内容をもとにしております．主催者の先生方に，厚くお礼申し上げます.

査読者の先生には貴重な御意見を賜りました．謹んで厚くお礼申し上げます.

また高遠節夫先生の動的幾何教材につきましては，重要な数学的内容を含み，かつ興味深いものでした．この場をお借りして本稿への掲載のご許諾に深謝いたします.

参考文献

[1] 室井龍二, 鷲尾勇介, 久保田直樹, 利根川聡, 鈴木潔光, 平田典子: 数学教育の視点から考察した 2 次曲線の活用, 第 70 回 工学教育研究講演会論文集, (2022), 358–359.

[2] 佐武一郎: 線形代数学, 裳華房, 数学選書 I, 第 1 版 1958, 第 2 版 2020.

[3] 中岡 稔, 服部晶夫: 線形代数学, 紀伊國屋書店, 1986.