量子情報理論と不確定性関係 (Quantum Information Theory and Uncertainty Relation)

柳　研二郎

1　はじめに

2016 年 3 月に山口大学を定年退職し, 4 月から城西大学理学部数学科に客員教授としてお世話になることになり, 2024 年 3 月で退職となります. その間の 8 年間理学部数学科の教育に携わってきました. 国立大学と私立大学の違いに当初はとまどうことが多々ありましたが徐々に慣れてきて教育研究を行うことができました. しかし 2020 年度からは新型コロナウィルス感染予防のためリモート授業やリモート会議になりまして, それに対応するためにたいへん苦労した記憶があります. また 23 号館が新しく建設され数学科の環境もずいぶんよくなり, 将来に向けて発展していくことを切に祈っています. 2023 年 1 月に数学科内で講演会を開催していただきました. 量子情報科学の宣伝も兼ねて講演した内容をまとめてみたいと思います. さらに量子力学特有の現象である不確定性関係について最近までの結果を紹介します. 最後に平均に関する様々な不等式についての最近の結果を述べます.

2　量子情報理論

一般に物理系の量子状態を表す密度作用素 ρ は trace 1 の正作用素である. 特に ρ が純粋状態を表す場合には $\rho^2 = \rho$ を満たす射影作用素である. 混合状態

$$\rho = \sum_j \pi_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

における状態 $\{|\phi_j\rangle\}$ の混合の度合いは

$$S(\rho) = -Tr[\rho \log \rho]$$

で定義され von Neumann entropy と呼ばれている．特に ρ のスペクトル分解を

$$\rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad 0 \le \lambda_j \le 1, \quad \sum_j \lambda_j = 1$$

とすると

$$S(\rho) = -\sum_j \lambda_j \log \lambda_j$$

で表され，これは古典情報において Shannon entropy と同じ式を与えることがわかる．次に 2 つの非可換な密度作用素 ρ, σ の相対エントロピーは Umegaki [33] によって次のように定義された．

$$S(\rho\|\sigma) = Tr[\rho(\log\rho - \log\sigma)]$$

von Neumann entropy や relative entropy の主な性質は次のようにまとめられる．

Proposition 2.1 次の (1) ～ (6) が成り立つ．

(1) $S(\rho) \ge 0,$ 　また $S(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho :$ pure state

(2) $\dim\mathcal{H} = d$ のとき $S(\rho) \le \log d.$ また $S(\rho) = \log d \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{d}I$

(3) ρ が合成系 AB 上の pure state のとき $S(\rho^A) = S(\rho^B)$,
ただし $\rho^A = Tr_B[\rho]$ (partial trace), $\rho^B = Tr_A[\rho]$

(4) $S(\rho\|\sigma) \ge 0$, また $S(\rho\|\sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma$

(5) $p = \{p_j\}$ を確率とすると

$$\sum_j p_j S(\rho_j) \le S(\sum_j p_j \rho_j) \le \sum_j p_j S(\rho_j) + H(p),$$

ただし $H(p)$ は Shannon entropy を表す．

(6) $0 \le \lambda \le 1$ に対して

$$S(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 \| \lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2) \le \lambda S(\rho_1\|\sigma_1) + (1-\lambda)S(\rho_2\|\sigma_2)$$

量子情報の場合にも古典情報と同様に, 条件付きエントロピー，相互情報量等が定義される．合成物理系 AB 上の密度作用素を ρ^{AB} とおくと物理系 A 上の密度作用素 ρ^A および物理系 B 上の密度作用素 ρ^B は次のように与えられる．

$$\rho^A = Tr_B[\rho^{AB}], \quad \rho^B = Tr_A[\rho^{AB}]$$

$\rho^{AB}, \rho^{A}, \rho^{B}$ の entropy をそれぞれ $S(A,B), S(A), S(B)$ とおく．このとき条件付きエントロピーは

$$S(A|B) = S(A,B) - S(B)$$

で定義される．また相互情報量は

$$S(A:B) = S(A) + S(B) - S(A,B) = S(A) - A(A|B) = S(B) - S(B|A)$$

で定義される．古典情報の場合には条件付きエントロピーは非負であるが，量子情報の場合には必ずしも非負であるとは限らない．例えば ρ^{AB} が pure state でかつ entangled state のときには $S(A|B) < 0$ であるからである．

3 量子通信路の容量

量子通信路にはいくつかのモデルがある．ここでは利用されるモデルとして入力列に依存して出力列の分布が変化する量子情報源として量子通信路を記述する．$\mathcal{H}$ を情報伝達の物理系を表す Hilbert 空間とする．簡単のため $\dim \mathcal{H} < \infty$ と仮定する．ここでは扱われる量子通信路は写像

$$\mathcal{X} \ni i \to \rho_i$$

である．ただし $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, a\}$ は入力アルファベットの集合であり ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, a)$ は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素である．通信路の n 次拡大に関する符号-復号系は次のように表現される．各メッセージ$k \in \{1, 2, \ldots, M_n\}$ は codebook

$$\mathcal{C}^{(n)} = \{u^1, u^2, \ldots, u^{M_n}\} \subset \mathcal{X}^n$$

における符号語 (codeword) $u^k = i_1^k i_2^k \cdots i_n^k$ に符号化され，$\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の密度作用素である

$$\rho_{u^k} = \rho_{i_1^k} \otimes \rho_{i_2^k} \otimes \cdots \otimes \rho_{i_n^k}$$

に写される．復号過程は $\{0, 1, \ldots, M_n\}$ の中に値を取る $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の量子観測量である．ここでは 0 はダミーの index であり，量子観測量は $\sum_{k=0}^{M_n} X_k = I$ を満たす $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の非負作用素の集合

$$X^{(n)} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{M_n}\}$$

によって表される．符号化と復号化過程の対 $(\mathcal{C}^{(n)}, X^{(n)})$ が伝送レート

$$R_n = \log \frac{M_n}{n}$$

をもった符号と呼ばれる．以降混乱することがない限り添え字 n は省略する．．メッセージ ℓ が送られたとき復号器が k を検出する確率は

$$P(k|\ell) = Tr[\rho_{u^\ell} X_k]$$

で与えられる．すべてのメッセージが等確率で生起すると仮定すれば，符号 $(\mathcal{C}, X)$ の平均誤り確率は

$$Pe(\mathcal{C}, X) = 1 - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} Tr[\rho_{u^k} X_k]$$

で与えられている．平均誤り確率の最小値を次のように書く．

$$Pe(M_n, n) = \min_{\mathcal{C}} \min_{X} Pe(\mathcal{C}, X).$$

そのとき通信路の容量は

$$0 \le R < C \text{ なる任意の } R \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} Pe(e^{nR}, n) = 0$$

$$R > C \text{ なる任意の } R \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} Pe(e^{nR}, n) \neq 0$$

を満足する数 C として定義される． $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_a\}$ を $\mathcal{X}$ 上の確率分布とし量子相互情報量を

$$I(\pi) = S(\bar{\rho}_\pi) - \sum_{i=1}^{a} \pi_i S(\rho_i)$$

で定義する．ただし $\bar{\rho}_\pi = \sum_{i=1}^{a} \pi_i \rho_i$ であり，また $S(\rho) = -Tr[\rho \log \rho]$ (von Neumann entropy) である．このとき量子通信路容量 C は次のように定式化される．．

Theorem 3.1 (Holevo [17], Schumacher and Westmoreland [32])

$$C = \max_{\pi} I(\pi).$$

さらに次のような strong converse theorem が得られている．

Theorem 3.2 (Ogawa and Nagaoka [27], Winter [36]) $R > C$ ならばどんな符号を用いても，符号長 n を大きくしたとき，復号誤り確率 $Pe(e^{nR}, n)$ は 1 に漸近する．

この定理の証明に関連して量子信頼性函数の性質に興味がある．古典の場合には Arimoto [1] によりたいへん技巧的な証明がされているが，量子の場合には部分的にしか得られていない．

Theorem 3.3 (Fujii-Nakamoto-Yanagi [4])

$$\mu(\pi, s) = -\log Tr\left[\left(\sum_{i=1}^{a} \pi_i \rho_i^{\frac{1}{1+s}}\right)^{1+s}\right]$$

は $0 \leq s \leq 1$ で凹函数である．

最近次の結果が Theorem 3.3 とは別の方法で得られている．

Theorem 3.4 (Cheng-Hsieh [3]) $s \geq 0$ で $\mu(\pi, s)$ は凹函数である．．

したがって次の conjecture が残されている．

Conjecture 3.1 $-1 < s < 0$ で $\mu(\pi, s)$ は凹函数である．

また量子ガウス型通信路とその容量についても Holevo, Sohma and Hirota [19] 等で扱われている．さらに量子テレポーテーションなどのように量子状態を量子通信路を通して送る場合を想定した quantum -quantum channel については Ohya [28] によって量子の場合に相互エントロピー (相互情報量と同じ) を導入して議論を展開している．

4 不確定性関係

4.1 Heisenberg 不確定性関係と Schrödinger 不確定性関係

量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 A を観測したときの期待値は $Tr[\rho A]$ で表される．また分散は次で定義される．

$$V_\rho(A) = Tr[\rho(A - Tr[\rho A]I)^2] = Tr[\rho A^2] - Tr[\rho A]^2 = Tr[\rho A_0^2],$$

ただし $A_0 = A - Tr[\rho A]I$. ここで量子状態 ρ と 2 つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている．

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2, \tag{4.1}$$

ただし $[A, B] = AB - BA$ は commutator を表す．さらにより強い結果として Schrödinger によって次のように与えられた．．

$$V_\rho(A)V_\rho(B) - |\mathrm{Re}\{\mathrm{Tr}[\rho \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0]\}|^2 \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}[\rho[\mathrm{A}, \mathrm{B}]]|^2.$$

4.2 Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information は [35] で次のように定義された．.

$$I_\rho(A) = \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2}, A\right]\right)^2\right] = Tr[\rho A^2] - Tr[\rho^{1/2}A\rho^{1/2}A]$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 A の間の非可換性を表すある種の degree として提案されている．またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている．

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha}(A) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, A])(i[\rho^{1-\alpha}, A])] \\ &= Tr[\rho A^2] - Tr[\rho^\alpha A\rho^{1-\alpha}A],\ \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性を表す次のような量 $U_\rho(A)$ を導入した．

$$U_\rho(A) = \sqrt{V_\rho(A)^2 - (V_\rho(A) - I_\rho(A))^2},$$

このとき S.Luo は [24] において $U_\rho(A)$ に関する次のような uncertainty relation を得た．

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{4.2}$$

ここで次の関係に注意する．

$$0 \leq I_\rho(A) \leq U_\rho(A) \leq V_\rho(A). \tag{4.3}$$

不等式 (4.2) は (4.3) の意味で不等式 (4.1) の精密化である．次のように不等式 (4.2) に対する one-parameter 拡張が与えられている．

Definition 4.1 $0 \leq \alpha \leq 1$ と量子状態 ρ と物理量 A に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する．

$$I_{\rho,\alpha}(A) = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, A_0])(i[\rho^{1-\alpha}, A_0])] = Tr[\rho A_0^2] - Tr[\rho^\alpha A_0\rho^{1-\alpha}A_0]$$

また関連して次の量も定義する．

$$J_{\rho,\alpha}(A) = \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, A_0\}\{\rho^{1-\alpha}, A_0\}] = Tr[\rho A_0^2] + Tr[\rho^\alpha A_0\rho^{1-\alpha}A_0],$$

ただし $\{A,B\} = AB + BA$ は *anti-commutator* を表す．

また次を定義する．

$$U_{\rho,\alpha}(A) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(A) J_{\rho,\alpha}(A)}.$$

このとき不等式 (4.2) の直接の一般化が与えられている．

Theorem 4.1 (Yanagi [39]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ．

$$U_{\rho,\alpha}(A) U_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha) |Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

4.3 Metric adjusted skew information and correlation measure

$M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ complex matrices 全体，$M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ self-adjoint matrices 全体とする．Hilbert-Schmidt 内積を $\langle A, B \rangle = Tr[A^* B]$ とする．$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ の positive definite matrices 全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を密度行列全体とする．すなわち

$$M_{n,+,1}(\mathbb{C}) \equiv \{\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C}) | Tr\rho = 1, \rho > 0\} \subset M_{n,+}(\mathbb{C}).$$

函数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ が作用素単調であるとは

$$A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C}), \quad 0 \leq A \leq B \Longrightarrow 0 \leq f(A) \leq f(B)$$

を満たすときである．作用素単調函数 $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ は $f(x) = x f(x^{-1})$ を満たすとき symmetric，$f(1) = 1$ を満たすとき normalized と定義される．$\mathcal{F}_{op}$ を symmetric normalized operator monotone functions 全体とする．このとき $\mathcal{F}_{op}$ の典型的な例は次の通りである．

Example 4.1

$$f_{RLD}(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad f_{SLD}(x) = \frac{x+1}{2},$$

$$f_{BKM}(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad f_{WY}(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,$$

$$f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha) \frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \ \alpha \in (0,1).$$

Remark 4.1 (Gibilisco-Isola [12], Kubo-Ando [23], Petz [29]) 任意の $f \in \mathcal{F}_{op}$ に対して次の関係が成り立つ.

$$\frac{2x}{x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2}, \quad x > 0.$$

すなわち $f \in \mathcal{F}_{op}$ は *harmonic mean* と *arithmetic mean* の間にある.

$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対して $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ とおく. このとき regular functions と non-regular functions を次のように定義する.

$$\mathcal{F}_{op}^{r} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\}, \qquad \mathcal{F}_{op}^{n} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}.$$

Definition 4.2 (Gibilisco-Imparato-Isola [11], Gibilisco-Isola [12]) $f \in \mathcal{F}_{op}^{r}$ に対して $\tilde{f}$ を次のように定義する.

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left\{(x+1) - (x-1)^2 \frac{f(0)}{f(x)}\right\}, \quad x > 0.$$

Example 4.2

$$\tilde{f}_{WY}(x) = \sqrt{x}, \quad \tilde{f}_{WYD}(x) = \frac{x^{\alpha} + x^{1-\alpha}}{2}, \quad \tilde{f}_{SLD}(x) = \frac{2x}{x+1},$$

次の結果が成り立つ.

Theorem 4.2 (G-I-I [11], Gibilisco-Hansen-Isola [10], Petz-Szabo [30]) $f \to \tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^{r}$ と $\mathcal{F}_{op}^{n}$ の間の 1 対 1 対応である.

ここで Kubo-Ando [23] によって導入された matrix mean m_f は次のように operator monotone function $f \in \mathcal{F}_{op}$ と対応させることができる.

$$m_f(A, B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}, \quad A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$$

matrix mean の概念から次のようにして monotone metrics の集合を定義する.

$$\langle A, B \rangle_{\rho,f} = Tr[A m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1}(B)],$$

ただし $L_\rho(A) = \rho A,\ R_\rho(A) = A\rho$ である.

Definition 4.3 (Hansen [13], Gibilisco-Imparato-Isola [11]) $A,B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の量を定義する．

$$Corr_\rho^f(A,B) \equiv \frac{f(0)}{2}\langle i[\rho,A], i[\rho,B]\rangle_{\rho,f},\ I_\rho^f(A) \equiv Corr_\rho^f(A,A),$$

$$C_\rho^f(A,B) \equiv Tr[Am_f(L_\rho,R_\rho)B],\ C_\rho^f(A) \equiv C_\rho^f(A,A),$$

$$U_\rho^f(A) \equiv \sqrt{V_\rho(A)^2 - (V_\rho(A) - I_\rho^f(A))^2}.$$

$I_\rho^f(A)$ は *metric adjusted skew information*, $Corr_\rho^f(A,B)$ は *metric adjusted correlation measure* と呼ばれている．

Proposition 4.1 (Gibilisco-Imparato-Isola [11], Gibilisco-Isola [12]) $A,B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の関係式を得る．

(1) $I_\rho^f(A) = Tr[\rho A_0^2] - Tr[A_0 m_{\tilde{f}}(L_\rho,R_\rho)A_0] = V_\rho(A) - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0)$.

(2) $J_\rho^f(A) = Tr[\rho A_0^2] + Tr[A_0 m_{\tilde{f}}(L_\rho,R_\rho)A_0] = V_\rho(A) + C_\rho^{\tilde{f}}(A_0)$.

(3) $0 \le I_\rho^f(A) \le U_\rho^f(A) \le V_\rho(A)$.

(4) $U_\rho^f(A) = \sqrt{I_\rho^f(A) J_\rho^f(A)}$.

(5) $Corr_\rho^f(A,B)$

$$= \tfrac{1}{2}Tr[\rho A_0 B_0] + \tfrac{1}{2}Tr[\rho B_0 A_0] - Tr[A_0 m_{\tilde{f}}(L_\rho,R_\rho)B_0]$$
$$= \tfrac{1}{2}Tr[\rho A_0 B_0] + \tfrac{1}{2}Tr[\rho B_0 A_0] - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0,B_0).$$

Theorem 4.3 (Yanagi [41], Furuichi-Yanagi [8]) $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ が

$$\frac{x+1}{2} + \tilde{f}(x) \ge 2f(x),$$

を満たせば次の 2 つの不確定性関係が成り立つ．

$$U_\rho^f(A)U_\rho^f(B) \ge f(0)|Tr[\rho[A,B]]|^2,$$

$$U_\rho^f(A)U_\rho^f(B) \ge 4f(0)|Corr_\rho^f(A,B)|^2$$

ただし $A,B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$,　$\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ とする．

ここで

$$f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \quad \alpha \in (0,1),$$

のときには次の不確定性関係が得られる．

Corollary 4.1 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}),\quad \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$U_\rho^{f_{WYD}}(A) U_\rho^{f_{WYD}}(B) \geq \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2,$$

$$U_\rho^{f_{WYD}}(A) U_\rho^{f_{WYD}}(B) \geq 4\alpha(1-\alpha)|Corr_{\rho,\alpha,\frac{1}{2}}(A,B)|^2,$$

ただし

$$\begin{aligned} & Corr_{\rho,\alpha,\frac{1}{2}}(A,B) \\ = \ & \frac{1}{2}Tr[\rho AB] + \frac{1}{2}Tr[\rho BA] - \frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha A \rho^{1-\alpha} B] - \frac{1}{2}Tr[\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha B]. \end{aligned}$$

4.4 Generalized metric adjusted skew information

前節の拡張となる不確定性関係が得られる.
$f \in \mathcal{F}_{op}^r$ が次の条件 (A) を満たすとする.

$$g(x) \geq k\frac{(x-1)^2}{f(x)}, \text{ for some } k > 0.$$

このとき

$$\Delta_g^f(x) = g(x) - k\frac{(x-1)^2}{f(x)} \in \mathcal{F}_{op}$$

とおく.

Definition 4.4 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の量を定義する.

$$\begin{aligned} Corr_\rho^{(g,f)}(A,B) &= k\langle i[\rho, A_0], i[\rho, B_0]\rangle_f \\ &= Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho) B_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho) B_0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\rho^{(g,f)}(A) &= Corr_\rho^{(g,f)}(A,A) = Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho) A_0] \\ & \quad -Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho) A_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho) A_0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\rho^{(g,f)}(A) &= Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho) A_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho) A_0] \\ & \quad +Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho) A_0]. \end{aligned}$$

$$U_\rho^{(g,f)}(A) = \sqrt{I_\rho^{(g,f)}(A) \cdot J_\rho^{(g,f)}(A)}.$$

Theorem 4.4 (Yanagi-Furuichi-Kuriyama [43]) 条件 (A) の下で次が成り立つ.

(1) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して

$$I_\rho^{(g,f)}(A) \cdot I_\rho^{(g,f)}(B) \geq |Corr_\rho^{(g,f)}(A,B)|^2.$$

(2) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の条件 (B) を満たすとする.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

このとき

$$U_\rho^{(g,f)}(A) \cdot U_\rho^{(g,f)}(B) \geq k\ell |Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

4.5 Generalized quasi-metric adjusted skew information

必ずしもエルミートではない $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対する一般化された不確定性関係を考える.

Definition 4.5 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の量を定義する.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) &= k\langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y\rangle_f \\
&= kTr[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\
&= Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] - Tr[X^* m_{\Delta_b^f}(L_A, R_B)Y],
\end{aligned}$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$\Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) = Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] + Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],$$

$$J_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X) = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot J_{A,B}^{(g,f)}(X)}.$$

Theorem 4.5 (Yanagi [46, 49]) 条件 (A) の下で次が成り立つ.

(1) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned}
I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) &\geq |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2 \\
&\geq \frac{1}{16}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2.
\end{aligned}$$

(2) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の条件 (B) を満たすとする.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

このとき

(a) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq k\ell |Tr[X^*|L_A - R_B|Y]|^2.$

(b) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \dfrac{f(0)^2\ell}{k} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2.$

ここで

$$g(x) = f_{SLD}(x) = \frac{x+1}{2},$$

$$f(x) = f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \quad \alpha \in (0,1),$$

$$k = \frac{f(0)}{2}, \ell = 2$$

のときには Theorem 4.5 の (2)(a) より fidelity と trace distance との関の新しい関係式が得られる.

Corollary 4.2 $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}Tr[A + B - |L_A - R_B|I] \\
\leq \ & \inf_{0\leq\alpha\leq1} Tr[A^{1-\alpha}B^\alpha] \leq Tr[A^{1/2}B^{1/2}] \\
\leq \ & \frac{1}{2}Tr[A^\alpha B^{1-\alpha} + A^{1-\alpha}B^\alpha] \\
\leq \ & \sqrt{\left(\frac{1}{2}Tr[A+B]\right)^2 - \alpha(1-\alpha)(Tr[|L_A - R_B|I])^2}.
\end{aligned}$$

Remark 4.2 次の (1), (2) に注意する.

(1) Corollary 4.2 は Powers-Stϕrmer [31] と Audenaert et al [2] によって得られた次の結果の別の表現である.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}Tr[A + B - |A - B|] \\
\leq \ & \inf_{0\leq\alpha\leq1} Tr[A^{1-\alpha}B^\alpha] \leq Tr[A^{1/2}B^{1/2}] \\
\leq \ & \sqrt{\left(\frac{1}{2}Tr[A+B]\right)^2 - \frac{1}{4}(Tr[|A - B|])^2}.
\end{aligned}$$

(2) $Tr[|L_A - R_B|I]$ と $Tr[|A-B|]$ の間の関係はない．なぜなら

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

のときは

$$Tr[|L_A - R_B|I] = 3, \quad Tr[|A-B|] = \sqrt{10}.$$

一方

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

のときは

$$Tr[|L_A - R_B|I] = 8, \quad Tr[|A-B|] = \sqrt{58}.$$

4.6 和型不確定性関係

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \mu_j |b_j\rangle\langle b_j|.$$

を $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ のスペクトル分解とする．任意の $|\phi\rangle$ に対して, 2 つの確率分布を

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n), \quad Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n),$$

とおく．ただし

$$p_i = |\langle a_i|\phi\rangle|^2, \quad q_j = |\langle b_j|\phi\rangle|^2.$$

$$H(P) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \quad H(Q) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \log q_j$$

をそれぞれ P, Q の Shannon entropy とする．

Theorem 4.6 (Maassen-Uffink [25])

$$H(P) + H(Q) \geq -2 \log c,$$

ただし $c = \max_{i,j} |\langle a_i|b_j\rangle|$.

Theorem 4.7 (Yanagi [48]) 任意の $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ と任意の $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ．

(1) $I_{A,B}^{(g,f)}(X) + I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \dfrac{1}{2}\max\{I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y), I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y)\}.$

(2) $\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)} + \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(Y)}$
$$\geq \max\{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y)}, \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y)}\}.$$

5　平均に関する不等式

	調和平均	幾何平均	対数平均	算術平均
$m(x,y)$	$\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{2}\right)^{-1}$	$\sqrt{xy}$	$\frac{x-y}{\log x - \log y}$	$\frac{x+y}{2}$
$f(t)$	$\left(\frac{t^{-1}+1}{2}\right)^{-1}$	$t^{1/2}$	$\frac{t-1}{\log t}$	$\frac{t+1}{2}$
$m(A,B)$	$A!B$	$A\#B$	$A\ell B$	$A \bigtriangledown B$

$m(x,y) = xf(\frac{y}{x}) = yf(\frac{x}{y})$,

$A!B = \left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}$, $\quad A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$,

$A\ell B = \int_0^1 A\#_x B dx = \int_0^1 A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^x A^{1/2} dx$,

$A \bigtriangledown B = \frac{A+B}{2}$.

n 変数の場合

	調和平均	幾何平均	対数平均	算術平均
$m(x_1,\ldots,x_n)$	$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-1}}{n}\right)^{-1}$	$(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n}$	I	$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$
$m(A_i,\ldots,A_n)$	$\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i^{-1}}{n}\right)^{-1}$	III	II	$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{n}$

$I = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \frac{x_i - x_j}{\log x_i - \log x_j}$,

$II = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} A_i \ell A_j$,

$III = \exp\{\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \log A_i \# A_j\}$.

6　終わりに

von Neumann entropy の一般化が与えられている．　1 つの例が quantum Tsallis entropy である．

$$S_q(\rho) = \frac{Tr[\rho^q] - 1}{1-q}, \quad 0 < q < 1$$

また　quantum relative entropy の一般化も与えられている．1 つの例が quantum Tsallis relative entropy である．

$$S_q(\rho|\sigma) = \frac{1 - Tr[\rho^q \sigma^{1-q}]}{1-q}, \quad 0 < q < 1$$

これらの性質については Furuichi-Yanagi-Kuriyama [6], [7] 等で得られている． また現在いろいろなところで用いられている RSA 暗号は素数の判別に時間がかかることを利用して作られているが，量子コンピュータが実用化されれば素数判別が比較的短い時間で得られるようになり，その結果 RSA 暗号は破たんしてしますおそれがある．したがって根本的に異なる暗号形式の構築が求められている．量子情報分野ではその解決法として鍵配送を量子力学の原理を用いることで実現しようとする，いわゆる量子暗号理論が最近脚光を浴びるようになった． さらに符号理論を量子情報に取り入れた量子符号理論の研究も盛んに行われている． このように今までの古典情報から量子情報に研究の軸足が移ってきている．古典情報では数学，コンピュータが中心の分野であったが，これからはさらに量子力学を含んだ分野に広がってきている．

References

[1] S.Arimoto, On the converse to the coding theorem for discrete memoryless channels, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-19, pp 357-359, 1973.

[2] K.M.R.Audenaert, J.Calsamiglia, L.I.Masancs, R.Munnoz-Tapia, A.Acin, E.Bagan and F.Verstraete, The quantum Chernoff bound, Rev. Lett., vol 98, pp 160501-1-4, 2007.

[3] H.C.Cheng and M.H.Hsieh, Concavity of the auxiliary function for classical-quantum channels, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-62, no 10, pp 5960-5965, 2016.

[4] J-I.Fujii, R.Nakamoto and K.Yanagi, Concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliability function, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 7, pp 3310-3313, 2006.

[5] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, A sufficient condition on concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliability function, Information, vol 6, no 1, pp 71-76, 2003.

[6] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, J. Math. Phys, vol 45, no 12, pp 4868-4877, 2004.

[7] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, A note on operator inequalities of Tsallis relative entropy, Linear Algebra and Application, vol 407, pp 19-31, 2005.

[8] S.Furuichi and K.Yanagi, Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew information and metric adjusted correlation measure, J. Math. Anal. Appl., vol 388, no 2, pp 1147-1156, 2012.

[9] R.G.Gallager, Information Theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[10] P.Gibilisco, F.Hansen and T.Isola, On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions, Linear Alg. Appl., vol.430(2009), pp.2225-2232.

[11] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, Uncertainty principle and quantum Fisher information, II, J. Math. Phys., vol.48(2007), 072109.

[12] P.Gibilisco and T.Isola, On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information, J. Math. Anal. Appl., vol.375(2011), pp.270-275.

[13] F.Hansen, Metric adjusted skew information, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol.105(2008), pp.9909-9916.

[14] 林　正人，量子情報理論入門，サイエンス社，2004.

[15] M.Hayashi, Quantum information theory: An Introduction, Springer, 2006.

[16] 日合文雄，柳研二郎，ヒルベルト空間と線型作用素，牧野書店，1995.

[17] A.S.Holevo, The capacity of the quantum channel with general signal states, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-44, no 1, pp 269-273, 1998.

[18] A.S.Holevo, Reliable function of general classical-quantum channel, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 6, 2256-2261, 2000.

[19] A.S.Holevo, M.Sohma and O.Hirota, Capacity of quantum Gaussian channels, Physical Review A, vol 59, no 3, 1820-1828, 1999.

[20] S. Ihara, Information theory for continuous systems, World Scientific, 1993.

[21] 石川　智，小川朋宏，河内亮周，木村　元，林　正人，量子情報科学入門，共立出版，2012.

[22] 国澤清典，梅垣壽春，情報理論の進歩，岩波書店，1965.

[23] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., vol.246(1980), pp.205-224.

[24] S.Luo, Heisenberg uncertainty relation for mixed states, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[25] H.Maassen and J.B.M.Uffink, Generalized entropic uncertainty relations, Phys. Rev. Lett., vol.60, no.12, 1103-1106, 1988.

[26] M.A.Nielsen and I.L.Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, 2000.

[27] T.Ogawa and H.Nagaoka, Strong converse to the quantum channel coding theorem, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 7, 2486-2489, 1999.

[28] M.Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-29, pp 770-774, 1983.

[29] D. Petz, Quantum information theory and quantum statistics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[30] D. Petz and V.E.S. Szabó, From quasi-entropy to skew information, Int. J. Math. vol.20(2009), pp.1421-1430.

[31] R.T.Powers and E.Stϕrmer, Free states of the canonical anticommunication relations, Commun. Math. Phys., vol 16, pp 1-33, 1970.

[32] B.Schumacher and M.Westmoreland, Sending classical information via noisy quantum channel, Rhys. Rev. A, vol 56, no 1, pp 131-138, 1997.

[33] H.Umegaki, Conditional expectations in an operator algebra IV (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep., vol 14, pp 59-85, 1962.

[34] 梅垣壽春，情報数理の基礎，サイエンス社，1993.

[35] E.P.Wigner and M.M.Yanase, Information content of distribution, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[36] A.Winter, Coding theorem and strong converse for quantum channels, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 7, pp 2481-2485, 1999.

[37] K.Yanagi, Covariance operators and von Neumann's theory of measurements, Kodai Math. J., vol 5, no 3, pp 435-445, 1982.

[38] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relations, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-51, no 12, pp 4401-4404, 2005.

[39] K.Yanagi, Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information, J. Math. Anal. Appl., vol 365, pp 12-18, 2010.

[40] K.Yanagi, Uncertainty relation on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information, Linear Alg. Appl., vol433, pp 1524-1532, 2010.

[41] K.Yanagi, Metric adjusted skew information and uncertainty relation, J. Math. Anal. Appl., vol 380, no 2, pp 888-892, 2011.

[42] K.Yanagi and S.Kajihara, Generalized uncertainty relation associated with a monotone or anti-monotone pair skew information, Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences, vol 1, no 1, pp 1-18, 2012.

[43] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, Uncertainty relations for generalized metric adjusted skew information and generalized metric adjusted correlation measure, J. Uncertainty Analysis and Applications, vol 1, no 12, pp 1-14, 2013.

[44] K.Yanagi and K.Sekikawa, Non-hermitian extensions of Heisenberg type and Schrödinger type uncertainty relations, J. Inequalities and Applications, no 381, pp 1-9, 2015.

[45] K.Yanagi, Non-hermitian extension of uncertainty relation, J. Nonlinear and Convex Analysis, vol 17, no 1, pp 17-26, 2016.

[46] K.Yanagi, Generalized trace inequalities related to fidelity and trace distance, Linear and Nonlinear Analysis, vol 2, no 2, pp 263-270. 2016.

[47] K.Yanagi, Some generalizations of non-hermitian uncertainty relation described by the generalizedquasi-metric adjusted skew information, Linear and Nonlinear Analysis, vol 3, no 3, pp 343-348, 2017.

[48] K.Yanagi, Sum types of uncertainty relations for generalized quasi-metric adjusted skew informations, International Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 4, no 4, pp 85-94, 2018.

[49] K.Yanagi, On the trace inequalities related to left-right multiplication operators and their applications, Linear and Nonlinear Analysis, vol 4, no 3, pp 361-370, 2018.

[50] K.Yanagi, Refined Hermite-Hadamard inequality and weighted logarithmic mean, Linear and Nonlinear Analysis, vol 6, no 2, pp.167-177, 2020.

[51] K.Yanagi, Refined Hermite-Hadamard inequality and its application, Linear and Nonlinear Analysis, vol 7, no 2, pp.173-183, 2021.

[52] K.Yanagi, Refinements of bounds for entropy and relative entropy, Linear and Nonlinear Analysis, vol 8, no 2, pp.197-215, 2022.

[53] K.Yanagi, Refined Hermite-Hadamard inequalities and some norm inequalities, Symmetry, vol 14, no 12, pp.2522-1-9, 2022.

[54] K.Yanagi, N variable logarithmic mean, Linear and Nonlinear Analysis, vol.8, no.3, pp.249-253, 2022.

[55] K.Yanagi, n variable logarithmic mean and n variable identric mean, Linear and Nonlinear Analysis, vol.9, no.1, pp.25-32, 2023.