私の10年史 数学科

神島芳宣

1　初めに

紀尾井町キャンパスができてから10年の歴史がたったので, 区切りにこの間の思い出とこれからの数学科について簡単に触れたい.

1.1　2022年3月に1号館の役目は終わる.

城西大学設立から数学科は始まった. 50年の歴史を携えて数学科は23号館に移動した. 当時は大学の図書館はなく, 数学科の1教室をつぶしてそこを図書室にかえてスタートした. 数学の冊子を置くために各大学にジャーナル・紀要を寄贈という形で協力をお願いし, 何とか対面を保とうとした. 当時は各分野の教員がその研究費（あるいは数学の予算）で専門研究図書を購入する形をとっていたため, 書籍の所在場所は各教員の研究室になり, あまり数学図書室としての機能が発揮されなかった. やがて, 全学の図書館（水田記念図書館）が建てられ, 数学の図書室は数学に係わるもののみを残して分室としてそのまま1号館に残った. 23号館に移動する際に数学図書室の多くの古い書物が処分（除籍）されたような気がする. カルタンの名著など, 昔の教員が大切にしていたものが引っ越しの時に消えたのは残念だった. 水田記念図書館は私立大学の図書館として古典的な名著を多く所蔵していることは, 図書館設立に苦労した教員・事務員の努力の結果である. その先達からの遺産として, 少しでも学生が図書館を活用し, オンラインジャーナルもさることながら, 数学の書籍（和書・洋書）を読んで勉強・研究に役立ててほしい.

1.2　大学院修士課程の教育体制の見直し

大学院重点化に伴う従来の学部教育研究組織を大学院に移行という目的のために2016年9月数学科（理学部）の大学院を見直し大学院博士課程の設置を検討し, 12月末までに報告する旨依頼があった. (大学院委員会において当時（今もだが), 経済学部と理学部が博士課程を持たないことによる.

その頃自分は赴任したばかりだったので, 現状の学生の基礎教育レベルを知らず, 学力の底上げが必須ですぐには無理であることが分かった. 今では多くの学生は, 高い学費の支払いのため, さらに2年間, 3年間教育を受けることは経済的に難しいこと, また博士論文を書くにあたって, 経験の乏しい教員側にその指導力が必ずしも担保されているわけではないので, 非常に難しい問題である. しかし, その時大学院委員会から要請された数学科博士課程構想案 (2016年12月作成) をこの機会に記録しておきたい.

数学専攻の大学院博士課程設置案について

名称: 大学院 サイエンス アカデミー多元領域基盤コース[1)]

目的: 数学は自然科学の様々な分野に実験データの分析とその予想の正当性に答える理論的側面から証明方法を提供してきた. また, データから得られる結果を一般化し, 統一的な理論を構築するのも数学として貢献してきた. このような観点から, 数学専攻が提案する大学院は「広く様々な専攻分野（実験系理論系）を包括したサイエンス　アカデミーである. その中で数学専攻は各専攻分野と横断的に交流し, 与えられた喫緊の課題の解決に協力するとともに定常的に他分野の院生も含めて, 学位論文の作成指導を行いたい. 数学専攻は多元領域基盤コースとして, サイエンス アカデミーに所属し, 基礎力と応用力をシナジーさせた研究テーマを提供し, 同時に即戦力を担った豊かなキャリアパスを持つ学術博士の育成に努める.

A. 博士課程（博士課程後期）を設置し, 大学院教育の充実のために, 前向きに検討する.

B-(1) 分野は修士課程の後続（継承）として, 4 分野　代数・解析・幾何および数理科学を考え, それぞれ核となる教員を最低 2 名配置する（それに伴う人事計画は現状の教員でまかなうが, 分野の偏りなどで不都合が生じる場合は, 第一に新規の教員の採用を希望する.（また退職する教員の補充は博士課程の設置を見据えて選考する.）

B-(2)　数学科は坂戸・紀尾井町両キャンパスがあるため, 大学院設置にそれが効果的に活用されるという独自の存在の特色を示さないといけない.

多元領域基盤コース[1)] = 大学院数学専攻博士課程はそれ自身アイデンティティを保ちつつ, 社会が直面する課題を解決するために, 多様な研究分野からなる他分野・他専攻とその基盤的側面から横断的に交流する.

問題点

(1) 一般的に修士課程だけの大学はあまり存在せず, 大体博士課程 前期・後期となっている. そのため, 現状の修士課程（城西大の院生）とどうリンクさせるか. 定員増につながるか. 専攻+副専攻によるダブル Degree は可能か.

(2) 博士課程希望者はすでに修士号を取っているので, 博士号を取るメリットは何かということ（キャリアパス, 企業でのリーダー育成）と (余裕のある) 教員が対応できるか.（学位が出せるか.）

(3) 修士課程も含めて定員は減らす方向でいく. (この部分は山口教授の尽力により達成されている.)

(4) 全学の意向に沿う形で博士課程設置に協力はするものの, 当専攻としては紀尾井町キャンパスが今年度中に文科省監視期間を経て実質的に次年度より動き出し, それに伴い修士課程（博士課程前期）の整備等が数学専攻の当面の課題として存在しており, まだ博士課程構想は時期尚早と考えている.

基本姿勢（大学院の将来性と活性化）　大学院数学専攻をより魅力的なものに深化させ, 今後も基盤研究・教育の成果の発信に努めたい. また, 2017 年 4 月から紀尾井町キャンパスにおいても大学

院が開講されるため, 双方が互いに刺激しあい個性ある大学院院生を指導する. その達成のために次のことを考えている. 坂戸キャンパスでは海外留学生の要求にかなう実践的な数学教育（教員養成）コースの提供. また自然に恵まれた坂戸市の環境の中でシニア世代へ生涯教育の一環として, きめ細やかな大学院教育の提供. さらに「教育専門職・教職関係」の就職率向上を見据えて, 大学早期卒業・大学院飛び入学制度の導入を検討し, 優秀な学生を早い段階で獲得すること考えている. また, 紀尾井町キャンパスはビジネス街の中心という土地の利を生かして, 企業との連携を視野にいれ, 実践に役立つ課題解決型の人材育成を目指す. 将来はビジネスマンが即戦力を担った豊かなキャリアパスを持つために基礎力と応用力をシナジーさせた研究テーマを提供できる社会人入学制度も考えている.

1.3 海外の大学との交流協定

院生・教員のキャリアを積む（国内留学・海外留学）, 他大学との研究協力（各種基金に応募し, 若手教職員の活性化等を含む) を推進することが教員の研究の一環として課されました. 理学部は当初は何も海外協定が無かったので, 積極的に探した結果, こちらに来て, 2015 年すぐ水田宗子理事長のときに, 南イタリア Potenza 市の Basilicata 大学理学部と数学科との研究学術協定を結ぶことにした. その時の確固たるエヴィデンスとして 2016 年〜2021 年 南イタリアの Basilicata 大学と理学部数学科との研究協定の抜粋（コピー）を残しておく. (∗) Co-operation Framework

AGREEMENT BETWEEN

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA BASILICATA, ITALY
AND
JOSAI UNIVERSITY EDUCATIONAL CORPORATION, JAPAN

The University of Basilicata- Italy, represented by the Rector, Prof. Aurelia SOLE and Josai University Educational Corporation - Japan, represented by the Chancellor, Prof. Noriko MIZUTA - having regard to the fact that co-operation between countries in the field of higher education accrues benefits and advantage to both Institutions; - whereas that all universities and other academic institutions must increase their initiatives in the field of education and training, by mutually reinforcing their teaching, training and research abilities, by sharing resources and by undertaking joint activities, based on equal participation; - with confidence of the fact that increased academic co-operation can fiercely contribute to establish respect, trust and friendship among different countries people,

it is agreed as follows:

Art. 1

The University of Basilicata and Josai University Educational Corporation agree upon the importance and the utility of establishing cultural, scientific and didactic relationships.

Art. 2

The present agreement defines the beginning of co-operation between the two Institutions in all fields and disciplines of common interest. It will consist of special executive protocols, in order to establish didactic-scientific co-operation's scopes, in the development rules and the liability and the expected results. Each Institution shall appoint a project manager who shall report to the competent (academic) authorities.

Art. 3

The co-operation between the two Institutions provides for the joint performance of research and teaching programs. It will be performed as follows: - by exchanging teachers, researchers, technical-administrative staff and students; - by performing joint research projects of common interest; - by exchanging information, scientific works and other scientific and didactic materials of the Institutions' mutual interest. - by joint initiatives, such as seminars, lectures etc. - by giving the possibility to use the research equipment and by giving free access to the facilities of both institutions.

Art. 4

Within the limits of regulations in force in each country, the parties agree to find the necessary financial means to reach the above mentioned objectives. The expenses will be jointly identified and will be charged to the department/laboratory directly involved in the present agreement, unless specific funds from private or public institutions are available. The parties agree to grant logistic support to the visitors.

Art. 5

All people concerned with these activities provided in the present agreement shall submit an insurance scheme at the original Institution's charge. Medical assistance will be granted to the academics, researchers and students acting under this protocol, within the limits of the agreements concerning the mutual guarantees and assistance existing between the countries.

Art. 6

Unless otherwise agreed, the parties will jointly own the technological and scientific results obtained within the present co-operation programme. They undertake to protect and exploit them, according to the industrial laws and regulations in force in both Institutions. In order to allow an easier negotiability of the results, each party undertakes to prevent any claim of rights by its personnel or by persons in contact with the Institution.

Art. 7

This agreement shall be in force for five (5) years, from the date of the signature by the Legal Representative of the contracting Institutions and after the approval of the competent academic authorities. Any amendement shall be made in writing by the parties.

Art. 8

The present agreement includes equivalent texts, in Italian and English, consisting of four original copies of the same value.

Signed in Sasado __________________ Signed in Potenza__________________

Date _______________ Date _______________

Josai University Educational Corporation
The Chancellor

Prof./Dott. Noriko MIZUTA

Università degli Studi della Basilicata
The Rector
Prof. Aurelia SOLE

その後の経過　最初は自分も研究訪問するなどして順調に研究交流が得られた．次の 5 年の継続について先方から聞かれたものの, 効果が一部にしか存在しないことと, 現情勢では積極的に国際交流をサポートする体制が得られないことに失望し, 継続はこちらから諦めた．学生が海外の大学等で生活し, 学びたいことがあるならば, 積極的にサポートするべきであるが, あまり学生には積極さがないように感じられた．

1.4　城西大学の教員として見てきたこの大学の約 10 年

１．日本の高等教育及び日本の私立大学のおかれている状況とその課題について述べる．

私立大学が若年層の減少に呼応して, 生き残りをかけてしのぎを削っているとき, 他大学との差別化を図る大学独自の個性を前面に出すことは喫緊の課題である．世界的に見て日本の教育体系は連続 16 年間行われ, 一般的な大学卒業時における習得レベルは非常に高いと思われる．しかしその知識も一旦社会に出ると, あまり役立っていない現実がある．例えば顕著な例でいうと英語を 7 年間習ったとしても, 会話をこなせるという観点では一様に大学教育の貢献度は乏しい．最近, 国際化というキーワードで外人講師（ネイティブ）の雇用, 実践英語を学ばせる学校がふえてきた．個性を出すのに各大学が一斉にこれを行っては逆に差はつかない．海外で活躍できる人材育成の一環とはいうものの, そのテーマに魅力を持たせないと, 学生本人は平和な日本が心地よく外国で活動する気がなければ何の意味もない．　私は私立大学がその建立精神に基づき個性を生かす教育をどう提供し, 学生にどう意識改革を促すか当たり前の使命を教員の課題として考える．教員は原点に立って, 学生に考える習慣, 理解力を身に付けさせるべく魅力ある授業を工夫する．教育と研究は車の両輪のようなもので, 片方だけうまく発揮できるものでない．教員は研究に裏打ちされた豊富な知識をもとに学生に学問の魅力を伝えることができる．また教職員は学生が日本人であるという垣根を取り外し, 臨機応変に様々な人種の学生と対峙することのできる対話力 (コミュニケーション能力) を有しなければいけない．日本の大学は本来の研究・教育のみならずこれからは, 自らの大学に特化した伝統文化, 高度に専門化された先端技術の成果を世界に発信する情報機関としての使命を担い, その資質が問われる時代に来ている．それゆえ文科省が唱える国際化を安易に人集めと考えず, 大学の意図に沿って, そのブランドを失することの無いように, 慎重に将来の方向を見定めた（世界に生き残れる）国際力をもつ大学へと発展させ, 深化すべきと考える．

２．城西大学の現在の課題と将来の展望について

城西大学は社会の要請にいち早く対応して, 様々な取り組みをしている．　国際化 (留学生受け入れ, 留学生派遣), 高齢化に伴うシニアカレッジの創設, 学生の要望に対する色々なサークル活動への助成, また自然な環境に恵まれた郊外のキャンパスと利便性を生かした都心のキャンパスのシナジーなどは他大学に率先して十分評価されるべき点であると確信する．１で述べたように城西大学は日本における一大学であることに満足せず, 外国人学生の間で自然に留学・進学の選択肢に含まれるような世界の中の一大学として位置すべきである．海外に門戸を広げることは城西大学

の将来の方向性の一つになりうると思う．城西大学はいくつかの興味あるテーマ（ジェンダー等）を扱っているため, 極めて個性的で教員のより一層の質的向上とともにがその大学像が将来期待される．私は教員の立場から城西大学の学部構成について課題と取り組みについて述べたい．理学部は２学科からなるが, 意図的に特化されて構成されたものでは無いようで, 大学院重点化の立場から考える時, 専攻数を増やし一般的理工系の学科構成要素を充実していく方向に将来を見据えるべきと思う．次に大学院を見てみると現状は修士課程が各学科にあるものの, 博士 [後期] 課程は少なく, 充足には到底至らない．大学院の充実は今後全体的な教員構成・事務組織の在り方とともに慎重に検討されるべきものと認識する．当面の課題として, 修士課程の入学者の充足率があげられる．これはどこの大学も現状は厳しく, 入学しても学費など経済的制約, 研究継続への不安, 将来の就職への不安・期待など学生が抱える悩みは大きく, 中小規模の大学は獲得に苦戦を強いられている．(特に数学では一部の国立大学は形式的試験と面接を主として, 入学者をかき集め, 大学院大学を維持し予算を獲得しているところもある.)　一般に充足数は理学部全学科の入学者数であるから, 特に実験系の多い理学部はたとえば数学科の入学者数が少なくても, 総和でプラスであれば問題ない．城西大学理学部の場合, 2 学科しかなく安定した充足率の維持という点では微妙であると思う．　一つの方策として, 日本を希望する向学心のある諸外国の大卒の留学生を修士課程に確保することが考えられる (10 月入学)．城西大学は海外の大学と多く提携を結んでおり, もし留学体制 （奨学金制度, 寮, 国際センター） を整備するならば, 十分留学生・研修生を取りこむ可能性を秘めていると思う．実際, 個人的には私が教えた留学生が大学教員としているインドネシアの大学を訪問した際, 日本の大学との学際交流は学部レベルで切望している雰囲気は強く感じた．学部には国費留学制度がないので, 経済的支援を探すことはまた次の問題になる．

３．城西大学の教員として, 学部及び大学に何か貢献をしたか

入試募集活動について若年層が減少している中で, 入試により城西大学に入学する学生を定常的にキープすることは城西大学に限らず, 私立大学の抱える大問題であると思う．具体的に城西大学の独自性を強調する募集対策を次のように考える．

●坂戸キャンパスは東京中心からは少し離れている, しかし静かな環境で勉学をいそしむことは本来の学生の在り方でもあるので, ロケーションを強調することはよいと思われる．一方で最近の学生の傾向として都心回帰があるため, 紀尾井町キャンパス（城西国際大学キャンパス）を開設したことは学生の選択肢に良い影響を与えると思う．(2 校制のため無理ではあるが, できれば教養 2 年間は紀尾井町において授業が受けられるようにし, その後坂戸で各学部の専門授業が選択できる（あるいはその逆の）制度があればよりよいのだが．城西大学は全体としてそれが可能なキャンパス数を保有していると思う.)

●オープンキャンパス (大学説明会) は今や大学宣伝の必須条件であり, 3 年生を主にした受験希望者および保護者の参加に対して城西大学の特徴・特色を直接示す絶好の機会である．入試課, 在学生グループを中心に, 教職員が一丸となって対応しなければならない．パンフレットには可能な範囲で受験生に城西大学に入学したら得ることのできるインパクトのあるキャッチフレーズを誇張することなく正直に記述することである．

●アジア, 東欧ヨーロッパなど比較的勉学意欲と日本への憧れをもつ学生で日本の大学で教育を受けたい層をターゲットに留学を募る．（先にも述べたように単に人数を確保するということでなく, 城西大学が提供できるものを示して学生を選ばなければいけない．　節操なく集めると英国のある大学のように, 中国人留学生が本国学生数を上回ってしまうケースもあり, 単に増やすには危

険性がある.）

学生指導について

●今の大学生は競争力に欠ける. 入学してしまえば, あとは 4 年間うまくやり過ごして卒業, それなりの就職という皆一様に安全レールに乗る. 1 で述べた英会話力の話も自分で積極的にチャレンジしない限り, 与えられたものを漫然と受け止めているだけでは身にならない典型例である. 4 年間かけて結局達成感が無いから, 卒業式だけでも最大に着飾る風習は自分に対する自信の無さの表れではないだろうか. 学生に行動力と主体性を持たせることは教育者として使命であるが, それをどう示したらよいか本当に難しい. 一つの試みとして毎回授業最後に小テストを行い普段から成績評価を高める「学生への競争原理」の導入を考えた.

●私が専門とする数学は学生教育にどう役立っているのか自問することがある. オープンキャンパスでの質問で数学は世の中にどう役立っているのか,「自分はそれがなくても十分うまくやっていける」というのがある. 多分複雑な数式と計算が世の中になぜ必要性なのかをさして, 言っているようである. 数学は自然科学の一分野であるから, 真理という普遍性を追求し, 統一原理を発見する学問である. その心理を説明する伝達方法として数式を使うことはあり, その数式の表す意味が目的であり, それ自体を問題とすることではないので, この質問はピントが外れているのではあるが, もちろんサイン, コサインの等式などが世の中のどういうメカニズムのなかで利用されているのかをその人たちに丁寧に説明し, 数学科の存在意義を強調する. 私はこのような誤解にもとづく偏見を作らないよう, 数学を通して学生の意識改革つまり理路整然たる思考方法を体得し, 社会の変化に迅速に対処できる人格形成を促すよう心掛けようと思った.

実際の学生指導について

●私はこれまで都立大では他学部各専攻に線形代数, 微分積分, 集合, 位相, 数学の歴史, 数理科学コースには多様体論, ホモロジー論, 幾何序論を教えてきた. これらの経験を踏まえ, つぎの三つに絞り, 城西大での教育の方針を述べたい. 今後現状に鑑み修正しながら進めていただければありがたい.

(1) 数学科以外の専攻に教えること

たいていの学生は定理などよりそれが誘導する公式がいかに活用できるかを知りたがる. 定理の証明に愛着を持つのは数学の好きな学生で, 他専攻にはほぼいないと経験的に思われる. たとえ物理の学生でも, 論理的な証明に時間をかけるより, より多くの例がその定理の意味することをサポートするとき, その定理は価値があると判断する. 私は他コースの学生への線形代数, 微分積分の担当が任された場合, いかに有益な応用例が数学（の定理）から見出せるか技術, 方法論に力を入れて教えたい. 証明なしには数学人には許し難いものはあるものの一般論は必要としなくても第一段階では個々の肯定的サポート例を覚えることは効果的であると思う.

(2) 数学専攻の学生に教えること

標準的かもしれないが, 私は一年生に実数論 (特に Dedekind の切断) を教えたい. 基礎理論がどんどん縮小される中, 専門性を問わず純粋に素人的に無理数の存在, 単調増加数列の収束, 中間値の定理などを時間をかけて教えたい. また位相を, ユークリッド距離をいったいどう拡張すれば物の近さが測れるのか素朴な疑問を抱かせ, 自然に理解させたい. これらは学生が最も苦手とするところで, 今のところ最善の方法はない. たぶん数理でもこのような授業に現在はほとんど時間をとらなくなったのではないだろうか. 私はオプションでよいので, 数学を希望する学生に質問に即座に答えられる豊富な (反) 例をもって討論形式で教えたいと思っている. 実際, Zorn の補題も Jordan

の標準形も印象に残る授業をすれば, 4 年生になってセミナーでもう一度そのときのノートを見て, 証明ができるはずである. 初学年の学生に数学をどう魅力を持たせるか難しいがまた試行錯誤を重ねたい.

(３) 大学院授業について
今の大学院授業の内容は決して満足のいくものではない. 専門的なことは修士学生には無理なので 4 年の授業の拡大として次のものを教えるということになる. たとえば大学が一律に多様体論を 4 年まででやっていれば院生がホモロジー論, 被覆空間, バンドル理論などからスタートすることは可能であるが, そうではない現状ではできるだけ基礎のいらない授業科目を優先する. しかし, 院生はある程度勉強時間はあるから, 修論のための即戦力となる理論また具体的に問題を与えて, その取り組み方を初等的に授業で教えたい. 私の授業は最先端からはるかに遠い基礎分野であるがリー群, ファイバー理論などを院生に教えることは将来, 道具として役に立つと思っている.

1.5 約 10 年の研究活動

これは主として科学研究費の成果に基づき記録した.

局所共形ケーラー多様体 2015∼2017. 複素多様体の幾何学は伝統的にケーラー幾何学を主流に研究がなされてきたが, 近年 非ケーラー幾何学にも幾何構造, リー変換群論の立場から取り組まれることで, これまでの散発的な結果が統一的に解釈される気運が高まったと感じられる. そこで対称性の高い非ケーラー局所等質 lcK 多様体のトポロジーを調べていくことは非ケーラー幾何のさらなる深化という観点から十分興味ある問題である. 先に lcK 多様体の定義を述べると複素多様体 M 上に与えられた 2-form Ω で**等式** $d\Omega = \theta \wedge \Omega$ を満たすもので, ここで θ は closed 1-form である. (M, Ω) を lcK 多様体といい, θ は Lee form と呼ばれる. θ がもし exact なら, M 上の関数 f が存在して $\theta = df$ となるから, $(*)$ $\Theta = e^{-f} \cdot \Omega$ とおけば等式から Θ はケーラー form となる. したがって M は共形的にケーラー多様体である. 非ケーラー lcK 多様体とは, θ が exact でないことをいう. もちろん, M の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ を考えるなら Lee form のリフト $\tilde{\theta}$ は常に exact からこの方法で $\tilde{M}$ はケーラー多様体となる, 被覆 $\tilde{M} \to M$ は局所 isometry だから $(*)$ は言葉通り M が局所共形ケーラー (lcK) を意味する.
【背景】(I) 複素多様体上の等質幾何学はエルミート等質幾何学と呼ばれる. ガウス, リーマンにより複素 1 次元エルミート幾何は複素平面, 双曲面あるいは球面のいずれかの幾何学に共形同値となる. この美しい古典的結果は当然複素 2 次元においても期待されるが, 2 次元エルミート等質幾何には 14 個の同型類が存在し, そのうち 9 個がケーラー幾何そして残り **5** 個は lcK 幾何が入ることが幾何構造の立場から 80 年代に示されている ([11],[12]). しかし複素 6 次元以上のエルミート等質幾何は非ケーラー幾何の立場からはまだ何も分類は決まっておらず, 我々の等長リー変換群論によるトポロジー的手法 －モデル lcK 等質幾何の存在と一意化－ は高次元のエルミート幾何の存在・分類に一石を投じるものである. 同時に単連結 lcK 多様体はトポロジーにおける (非コンパクト) シンプレクティック多様体の例を与えるものであり, 非常に興味のある幾何学的対象である.
(II) 対称性 (連続変換群) の立場から見る時, ケーラー多様体の (コンパクト) Lie 群作用はシンプレクティック幾何の観点からその様相が長年にわたり, かなりわかっている. 一般的に非ケーラーエルミート多様体上に固有 Lie 群作用があるときのトポロジーの様相はほとんどわかっていないと

思われる．一方トーラス作用に関して比較して見ると，コンパクトケーラー多様体 M 上に非自明正則トーラス $T^k_{\mathbb{C}}$-作用が存在するならば軌道写像 $\mathrm{ev}: T^k_{\mathbb{C}} \to M$, $\mathrm{ev}(t) = tx$ から誘導される準同型 $\mathrm{ev}_*: \mathbb{Z}^{2k} \to H_1(M;\mathbb{Z})$ は**ホモロジー的単射**であることが知られているが (rank $2k$-正則作用)，一方ケーラーではないコンパクト lcK 多様体上の非自明正則トーラス $T^1_{\mathbb{C}}$-作用は決してホモロジー単射とはならないことが示されている (常に rank 1-正則作用) [8]．このように対称性の存在 (コンパクト Lie 群の作用）は顕著にケーラーと非ケーラ多様体のトポロジーを特徴づけている．したがって一般に非ケーラーコンパクト lcK 多様体上の固有 Lie 群の作用を調べることはトポロジー的性質を捉える上で価値があると思われる．

【モデル lcK 多様体】幾何構造の立場からいうと lcK 多様体のモデル空間はどういうもので，いつどのような条件のもとで lcK 多様体はモデル空間に一意化 (uniformize) されるかが最もこの研究で調べてみたいことである．Vaisman は 1980 年代初期に先の Lee form θ に対し，Ω の非退化性から $\Omega(\xi, X) = \theta(X)$ ($^\forall X \in TM$) となるベクトル場 ξ (Lee field と言われる) を考え，これが $g(X,Y) = \Omega(JX,Y)$ で与えられるエルミート計量 g に関して正則 Killing (言いかえると ξ がつくる 1-径数群が正則等長変換群をなす) となるときの lcK 多様体を特徴づけた．現在それは (lcK) **Vaisman 多様体**と呼ばれている．Hopf 多様体 $S^1 \times S^{2n+1}$ は典型的なその例である．もっと一般に佐々木多様体 (Y,ω) と S^1 の積 $S^1 \times Y$ は Vaisman lcK 構造をもつ．($S^1 \times Y$ 上の概複素構造はコンタクト form ω の Reeb field が Killing であるときに積分可能となることに注意する.) Vaisman 多様体 (M,g) が常にこの形になるかは言えないが，しかし lcK 計量 g の共形類の中で lcK 計量をとり換えることで M は積多様体 $S^1 \times Y$ に微分同相となることは証明されている.)

【局所等質 lcK 多様体の一意化】局所等質 lcK 多様体とは普遍被覆空間が高い対称性を持つ等質多様体 G/H であり，離散固有不連続群 $\Gamma\ (\leq G)$ によるその商空間のことである．この研究での我々の一連の問題は次のように要約できる．

(1) 局所等質 lcK 多様体 $\Gamma\backslash G/H$ がどのような Lie 群 G のとき，あるいは G がどのような性質を持つとき，Vaisman 多様体に一意化できるか決定することであり，そのとき

(2) 基本群 Γ は何か (amenability, semisimple)．また (3) におけるその群拡大を特徴づける．さらに

(3) $\Gamma\backslash G/H$ のトポロジーの観点から orbibundle 構造，幾何の観点からは正則 Seifert 束構造 (holomorphic Seifert fibering) を求める．

2013 年に我々は次のことを示し，非ケーラー幾何への一つの方向性を与えた．

定理 1.([5]) **コンパクト lcK 等質多様体 M は *Vaisman* lcK 多様体である．さらに M は円 S^1 と佐々木等質多様体 S の直積に正則同型であり，同時にケーラー等質多様体 N を底空間に持つ非自明な複素トーラス正則バンドル $T^1_{\mathbf{C}} \to M \longrightarrow N$ である．**

背景でも述べたように，一言でいうと，もし自明バンドルならば M はケーラー多様体になってしまうため，この定理は lcK 特有の非常にデリケートな結果である．

【局所等質 lcK 非球形多様体の剛性】(4) $\Gamma\backslash G/H$ は非球形多様体であるとする．対称性（large symmetry) のもとでコンパクト Lie 群（トーラス) の正則作用があるときは，Seifert 剛性またコンパクト Lie 群の作用が無い時は Mostow-Margulis 剛性を調べたい．これは可微分 Borel 予想を肯定的に導くものである．

我々の共同研究のプロジェクトにより今後 局所等質局所共形ケーラー多様体の全体像が解明されると同時に, 非ケーラー多様体の幾何的・トポロジー的性質がケーラー多様体の現象からは得ることのできない独特の不変量として発見されることを期待している.

等長リー変換群作用とコンパクト局所等質リーマン多様体上の幾何構造 2018〜2020. 等質空間 G/H 上のリーマン (エルミート) 構造はよく研究されている. 伝統的にはケーラー構造であるが, 非ケーラー構造としては局所共形ケーラー構造 (以降 lcK 構造と呼ぶ), また佐々木リーマン構造が最近再び脚光を浴びるようになった. 我々はここ数年等質 lcK 構造を研究し一定の結果を得た. 上記の三つの幾何構造は lcK 構造を通して, 次のようにリンクしている ; 単連結等質 lcK 多様体 X が Vaisman 構造を持つならば直積リーマン多様体 $\mathbb{R}\times M$ となり, M は等質佐々木多様体, さらに M は等質ケーラー多様体 Y 上の非自明 T-束となる. (ここで T は $\mathbb{R}$ か S^1.) 原理的には等質ケーラー多様体, 等質佐々木多様体と順に分類することで 等質 lcK 多様体の分類に帰着する.

一方 G の uniform lattice (余コンパクト離散群) Γ をとり, コンパクト局所等質 (非球形) 多様体 $\Gamma\backslash G/H$ 上のリーマン構造を調べることは研究の深化として自然である. しかし明らかな問題設定でありながらあまり局所等質空間に関する上記のような結果は得られていない (むしろ知られていない). つまり $\Gamma\backslash G/H$ を考えるとき, 等質構造のときのパラレルな議論で局所等質ケーラー多様体, 局所等質佐々木多様体が直ちに誘導されるわけでないという事実に直面する. この困難さを克服するには新たな理論 − 余コンパクト離散群 Γ をもつリー群 G が可縮な多様体 X 上に連続等長変換群として作用するときのコンパクト非球形多様体の**位相的性質** (ファイバー束から**軌道束**への一般化, 有限群から無限群 Γ への **Smith 定理**の一般化) − の構築の必要性が生じる. したがってこれに鑑みこの研究課題におけるオリジナリティは**高い対称性を有する等長リー群の可縮空間への作用**, **離散群の固有作用**と**局所等質非球形多様体のトポロジー**との融合をめざす相互理解である. テーマは古典的であるが, リー環論とは一線を画く変換群論的手法を用いる.

【背景】 D.Alekseevsky, V. Cortés, 長谷川敬三氏と lcK 構造を研究してきた. 複素多様体 (M,J) 上のエルミート計量 g から誘導される基本 2-形式 Ω に対し閉 1-form θ が存在して $d\Omega=\theta\wedge\Omega$ を満たすとき Ω は lcK-形式とよばれ, (M,Ω) を lcK 多様体という. ここで 1-form θ は Lee form と呼ばれる. 明らかにケーラー多様体は $\theta=0$ として, lcK であるが, Hopf 多様体 $S^1\times S^{2n-1}$ のように非ケーラー lck 多様体が存在する. θ が決めるベクトル場 ξ を Lee field とよぶ, このとき Reeb field と呼ばれる M 上の不変ベクトル場 $J\xi$ が得られる. 70 年代 I. Vaisman はこの ξ, $J\xi$ がともに g に関して Killing field となる場合を考え, 非ケーラー多様体の中での一つのクラスを定義した. 現在それは Vaisman lcK 多様体と呼ばれている. 我々は次の構造定理を証明した.

(i) コンパクト等質 lcK 多様体は Vaisman lcK 多様体である [5].

(ii) 非コンパクト等質 lcK 多様体が Vaisman 構造をもつための十分条件を与えた. さらに非コンパクト等質多様体 $\mathbb{R}\times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ に Vaisman 構造の入らない lcK 構造があることが示された [1].

(iii) Unimodular リー群による等質 Vaisman 多様体を分類した, さらに Unimodular Vaisman lcK 群を決定した [2].

さてこれらの仕事から上記で簡単に述べたように (単連結)Vaisman 等質 lcK 多様体 G/H はリーマン多様体の直積 $\mathbb{R}\times M$ となる. さらに構造定理は M が regular 佐々木多様体となることを示し, 等質佐々木 fibering $T{\rightarrow}M{\longrightarrow}Y$ をあたえる. さらにコンタクト形式 により底空間 Y は等質ケーラー多様体になる.

【当該研究の目標】 当然継続プロジェクトとして Alekseevsky, Cortés, 長谷川氏たちと一緒にさらに一般的な等質 lcK 多様体の構造を決定していく. しかしながら本研究では O. Baues 氏と共同でこの延長線上として局所等質非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ を考え, 上記で得られた結果を展開して局所等質ケーラー非球形多様体と局所等質佐々木非球形多様体を決定することを試みる.
【問題点】ところが lcK の際に我々が使った Dorfmeister-中島の等質ケーラー多様体の基本予想はあくまでも Grauert-岡の原理による正則積の形で決定され, いわゆる de Rham 分解とその等長群の積の形としての主張にはほぼ遠いことがわかる (つまり正則自明束であっても, ケーラー計量としての直積かどうかわからないこと). さらに佐々木非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ が S^1-束を導くとしたら, その底空間は局所等質ケーラー非球形多様体 (orbifold) になっているのかという問題はもはや等質空間の域を超えている.
【パラダイムシフト】我々はこの時点で局所等質非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ から一旦離れて, 等質性を活かした議論: (**I**) G/H の代わりに可縮リーマン多様体 X をとり, その**等長群** $\mathrm{Isom}(X)$ に離散部分群 Γ が存在してハウスドルフ商空間 X/Γ はコンパクトとする. (このような Γ があるとき, X をしばしば *divisible* という.) $G = \mathrm{Isom}(X)^0$ を連結閉部分群とすると, Γ は (有限指数を除いて) G に含まれている. さらに (**II**) G は**可解ラディカル** (極大連結正規可解部分群) R を持つとする. このように等質作用を一般化して (G, Γ, X) を調べることにより結果を局所等質多様体に反映する. 一般に G は半単純リー部分群 S が存在して Levi 分解 $\mathsf{R}\cdot\mathsf{S}$ をもつ. (ここで $\mathsf{R}\cap\mathsf{S}$ は完全不連結群.) 我々は (G, X) が主バンドル構造をもつことを最初に示そうとした. そのため 2010 年頃 Ragunathan の本の中の結果の誤りを次のように修正し, 証明した.

命題 1. *Γ をリー群 G の lattice とする. K を S の極大コンパクト因子とするとき, 共通部分 $\mathsf{RK}\cap\Gamma$ は RK の lattice である (修正部分). $S_0 = G/\mathsf{RK}$ とおけば有限中心をもたない半単純リー群で, 自然な完全系列 $1\to \mathsf{RK}\to G \xrightarrow{\nu} S_0\to 1$ は Γ を S_0 の lattice に移す.*

次に Γ に対するコホモロジー群 $H^*(\Gamma, \Gamma\mathbb{Z})$ を考え, Smith の定理を可縮な多様体 X に対して一般化した. その結果, 次の「中心化コンパクト群消滅定理」を得た.

命題 2. *Divisible な可縮な多様体 X 上に忠実に作用するコンパクト群 K は Γ に中心化されるならば $K = \{1\}$ (自明) である.*

R は特性単連結可解群 R_0 とトーラスとの半直積 R_0T でかける. リー群作用 (G, X) において命題 2 を用いて, 商 $Y = X/\mathsf{R}$ は**可縮なリーマン多様体**にできることを示した [3]. 従って, 自然なリーマン沈めこみ (submersion) $\mathsf{q}: \mathsf{R}_0\to X \longrightarrow Y$ とそれに随伴した準同型 $\phi: \mathrm{Isom}(X)\to \mathrm{Isom}(Y)$ が存在することまでわかった. $\Delta = \ker\phi\cap\Gamma$, $Q = \phi(\Gamma) \leq \mathrm{Isom}(Y)$ とおけば群拡大 $1\to\Delta\to\Gamma\longrightarrow Q\to 1$ が誘導され, Q は余コンパクト離散群となり Y は dividible である. 典型ファイバー $\mathsf{q}^{-1}(y) = \mathsf{R}_0$ には Δ が固有不連続に作用し, Baues 氏の仕事から R_0/Δ は **infra-可解多様体**になる. 一つの系として, $Y = X_1$ は *divisible* であることから, $\mathrm{Isom}(X_1)^0$ が可解ラディカルを持つならば, この同変 immersion の構成が再び可能で, $\mathrm{Isom}(X_k)^0$ のラディカルが自明になるまで繰り返される. 結果として軌道束 (orbi-bundle) の繰り返し: $X/\Gamma\longrightarrow X_1/\Gamma_1\longrightarrow \ldots \longrightarrow X_k/\Gamma_k$ が得られる. この新しい概念は S^1-Bott タワーにちなみ, *infra-*可解 *tower* と呼んでいる. これ自身可微分剛性に応用がある.
【研究方法】これらの結果を踏まえて, 我々は研究方法の大枠のスキームを作成した. 具体的に局所等質ケーラー非球形多様体と局所等質佐々木非球形多様体の分類に対する方法・計画を述べる. まず局所等質佐々木非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ をとる.

(a) G/H 上の Lee field が作る 1-係数群 T は等長群 $\mathrm{Isom}(G/H)$ において閉部分群であることを示す．従って G/H は可縮から $T=\mathbb{R}$ である．$\mathbb{R}$ を中心にもつように G を中心拡大した群を $\bar{G}$ とすれば等質空間としては再び $\bar{G}/\bar{H}=G/H$ とできるから,
(b) 最初から G は中心部分群 $\mathbb{R}$ を持っているとする．$PG=G/\mathbb{R}$ とおいて群の完全系列:
(1) $1\to\mathbb{R}\to G\xrightarrow{P}PG\to 1$ を考える．これは自然に次の fibering を誘導することをみる．
(2) $\mathbb{R}\to G/H\xrightarrow{P}PG/PH$．このとき我々の結論から PG/PH は等質ケーラー多様体である．
(c) 典型的な regular 佐々木多様体として Heisenberg 冪零 Lie 群 $\mathcal{N}$ をとるならば, 佐々木束 : $\mathbb{R}\to\mathcal{N}\to\mathbb{C}^k$ が得られ Δ を $\mathcal{N}$ の離散余コンパクト群とするとき $\mathbb{R}$ が中心であることから, $\Delta\cap\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の無限巡回群となり, $\mathbb{R}/(\Delta\cap\mathbb{R})=S^1$ である．もっと一般に unimodular 可解群の性質に注目して G/H についても $\Gamma\cap\mathbb{R}$ は非自明で $\mathbb{R}/(\Gamma\cap\mathbb{R})=S^1$ が言える. 従って (2) は次の軌道束を導く:
(3) $S^1\to\Gamma\backslash G/H\longrightarrow Q\backslash(PG/PH)$．($Q\leq PG$.) ゆえに局所等質佐々木非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ の分類は局所等質ケーラー非球形多様体 $Q\backslash(PG/PH)$ の分類に帰着する．
(d) このとき等質ケーラー空間の基本予想をラディカルを持つ等長リー群作用 [3] に適用して $Q\backslash(PG/PH)$ は典型ファイバーが複素トーラス, 局所等質対称多様体を底空間にもつ**正則 Seifert fibering**

$$T^k_{\mathbb{C}}\to Q\backslash(PG/PH)\longrightarrow\Phi\backslash(S_0/H_0)$$

となることを証明する．これを佐々木非球形多様体 $\Gamma\backslash G/H$ に引き戻すと典型ファイバーが冪零多様体であるような **Seifert fibering** : $\Delta\backslash\mathcal{N}\to\Gamma\backslash G/H\longrightarrow\Phi\backslash(S_0/H_0)$ が得られる．
(e) ここから我々のオリジナルな研究方法は上記の (I),(II) をもとに可縮多様体上の離散余コンパクト群 Q の**位相的性質** (中心化コンパクト群消滅定理 (命題 2)) を使って PG は半直積, さらに中心は自明を示し, ケーラー多様体 PG/PH の等長リー群 $\mathrm{Isom}(PG/PH)$ が**直積** $\big(\mathbb{C}^k\rtimes\mathrm{U}(k)\big)\times S_0$ となることを証明し, ケーラー分解 $PG/PH=\mathbb{C}^k\times S_0/H_0$ を得る. 結果として $Q\backslash(PG/PH)$ は $Q\leq\big(\mathbb{C}^k\rtimes\mathrm{U}(k)\big)\times S_0$ による商 $Q\backslash(\mathbb{C}^k\times S_0/H_0)$ として記述できる．これより代数群 S_0 の剛性と群コホモロジー $H^1(Q,T^k)$ を計算して $Q\backslash(\mathbb{C}^k\times S_0/PH_0)$ のケーラー等長同型 (Kähler isometry) を代数的に分類できることが期待でき, すべて位相的に直積であっても, ケーラー等長的に非自明なものが判定できる．
当該研究の意義は変換群とトポロジーの観点から局所等質多様体の**幾何**を研究することが統合幾何学 (Synthetic geometry) への自然な融和であり, 微分位相変換群手法は幾何多様体の新展開に寄与するものと信じている．平成 31 年以降の一つのプロジェクトは幾何構造を忘れて一般的に局所等質非球形多様体の可微分剛性について研究する．

幾何多様体の変換群に関する共形不変量の構成と消滅による等長群の出現と簡約 2021 ～ 2023.
概要に述べた様にリーマン多様体 X の等長リー群 $\mathrm{Iso}(X)$ は固有変換群であるが, 逆に固有変換群 G が与えられたとき, 適当なリーマン計量を構成して, G はその等長リー群に含まれることが知られている (Koszul). 幾何構造を保つ変換群が与えられ, それが固有作用であっても構成されたリーマン計量はその幾何構造を反映するわけではない．むしろ関係性を持たせるために幾何構造から自然に出てくるリーマン計量を探るべきである．連続群が多様体 X に作用しているとき, どのようなときに固有作用として振る舞うのかあるいはそうでないときにも大きい対称性をもつリー群の作用があるならば X は何か, これらはクライン・ポアンカレの幾何から派生した幾何・トポロジーの変換群に関する昔からの問題である．

【本研究の背景】漠然とした幾何構造の対象を具体的に分かりやすくするため, 多様体上の共形構造とそれを保つ共形変換群, また コーシイ・リーマン (Cauchy-Riemann)-構造と CR-変換群をとる. 1970 年初頭出発点となる Lichnerowicz, 小畠–Ferrand の剛性定理を簡潔に言うと『コンパクト多様体が非コンパクトな共形変換群を持つならば, 標準球面に共形同値』というものである. コンパクト空間に非コンパクト群が作用するなら, 閉軌道をもたない点が出てくるから必然的に固有でなくなる. 共形変換群の場合は, そのような空間は球面しかないということを意味する. さらに乗法群 $\mathbb{R}^+$ は $\mathbb{R}^n$ に共形 (相似) に作用するが固有でない明らかな例である. Schoen により, 空間のコンパクト性を外し, また離散群の非固有作用の場合も考慮して, 1995 年までに, この結果は『リーマン多様体 X が標準球面 S^n あるいは標準ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に共形同値でなければ, 共形変換群は X に固有に作用する』という形に一般化された. この結果は最終的に次の形の幾何構造に拡張された. これを述べるために, 若干の一般論を準備する. ここで標準球面 S^n の共形変換群は非コンパクト実双曲群 $\mathrm{PO}(n,1)$ であり, $\mathbb{R}^n$ の共形変換群は $\mathbb{R}^n = S^n - \{\infty\}$ と共形的に思うときの無限点 $\{\infty\}$ における parabolic 部分群, つまり相似群 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes (\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^+)$ と同型である. これらの共形群は固有に作用しないことが理解できる. G を双曲等長群のパラボリック部分群とし, G-構造が主 G 束 $G \to P \to X$ として与えられたとき, この束の Cartan 接続は X に $\mathfrak{g}$-値曲率形式 Ω を誘導し, $\Omega = 0$ のとき, X 上の G-構造は平坦といった. (いくつかの条件の付加のもとに) 積分可能な平坦 G-構造として, 基礎体 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ にしたがって上記の共形構造, コーシイ・リーマン (CR)-構造, 四元数コンタクト-構造が現れる. このとき上記の共形構造の結果のように, Lee [9], 最終的に Schoen [13] は『奇数次元 CR-多様体 X は標準球面 S^{2n+1} あるいは $2n+1$ 次元 Heisenberg ベキ零 Lie 群 $\mathcal{N}$ に CR-同値でなければ, CR-変換群は X に固有に作用する』ことを証明した. さらに平坦な CR-多様体として S^{2n+1} の CR-変換群は非コンパクト複素双曲群 $\mathrm{PU}(n,1)$ であり, $\mathcal{N}$ の CR-変換群は同様に無限点 $\{\infty\}$ における parabolic 相似部分群 $\mathrm{Sim}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \rtimes (\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^+)$ と同型である. さらに 2000 年頃の Biquard の四元数 Carnot-Carathéodory 構造の研究を受けて, 2014 年までには Frances [4], Ivanov-Vassilev [7] 等により四元数コンタクト (qc)-構造に対して, 『X が S^{4n+3} あるいは $4n+3$ 次元 四元数 Heisenberg Lie 群 $\mathcal{M}$ に qc-共形同値でなければ, qc-変換群は X に固有に作用する』ことが示された.

【背景から生じる明確な問題】この段階で出てきた結果をまとめると, G をそれぞれ共形変換群 $\mathrm{Conf}(X)$, CR-変換群 $\mathrm{Aut}_{CR}(X)$, qc-変換群 $\mathrm{Aut}_{qc}(X)$ とするとき, それぞれの共形構造をもつ多様体 X が標準共形構造を有する標準空間 $\{S^n, \mathbb{R}^n\}$,$\{S^{2n+1}, \mathcal{N}\}$,$\{S^{4n+3}, \mathcal{M}\}$ に共形同値でなければ, G は X に固有に作用することが得られた. 我々の素朴な問いはこの固有作用をもつ G は X にどのような新たな (あるいは既存の) 幾何構造を誘導するのか, またそのリー群は何かというものである. これをどの様に調べていくか, その過程で出てくる副産物とか予想だにしなかった例があれば, 多様体の幾何構造の研究に貢献すると期待している. これに基づき

【本研究の目的】は G の微分コホモロジー群の消滅 $H^*_d(G, C^\infty(X,V)) = 0$ の**可微分**的証明を与えること, そのときのリー変換群 G がもつ幾何的性質の**変容**の解釈である. 下記にこれを説明する.

離散群が可縮な多様体 W に固有 (不連続) に作用する条件として, 以前から Conner-Raymond の結果 [10] を研究してきた. その中で本質的な役割を果たした代数的結果:「離散群 Q に対するコホモロジー群 $H^i(Q; C(W, \mathbb{R}^k))$ は 0 である $(i \geq 1)$」について,

(i) 離散群 Q の W 上の固有不連続作用と連続写像がつくる写像空間 $C(W, \mathbb{R}^k)$ を多様体 X 上の C^∞-固有作用を持つ群 G と C^∞ 級 (擬完備, 凸性などの位相条件をもつ) G-加群 V の C^∞-写像空間の**層**

$C^\infty(X,V)$ におき代えることで, 可微分位相加群としての微分コホモロジー群 $H^*_d(G, C^\infty(X,V))$ が定義できる.

(ii) X 上の幾何構造を保つ変換群の中で, 固有作用を持つリー群 G を特徴づける枠組みの中に $H^*_d(G, C^\infty(X,V)) = 0$ を取り入れてみてはどうなるか思い付いた. このパラダイムシフトにより上記の共形変換群 $\mathrm{Conf}(X)$, CR-変換群 $\mathrm{Aut}_{CR}(X)$, qc-変換群 $\mathrm{Aut}_{qc}(X)$ それぞれに対する幾何学の変容をリー群を通して効果的に反映できると考えた.

【学術的独自性と創造性】 θ を X 上の k 次共変微分形式 $(k \geq 1)$ とする. $h \in \mathrm{Diff}\,(X)$ による引き戻し $h^*\theta$ が θ の関数倍となるとき, h は共形変換である. 具体的には θ をリーマン計量 g にとれば共形変換群 $\mathrm{Conf}(X,g) = \{h \in \mathrm{Diff}\,(X) \mid h^*g = u\cdot g,\ u \in C^\infty(X,\mathbb{R}^+)\}$, θ をコンタクト形式とすれば, コンタクト束 $\mathsf{D}\,(= \ker\theta)$ とその上の複素構造 J に対し, CR-変換群 $\mathrm{Aut}_{CR}(X) = \{h \in \mathrm{Diff}\,(X) \mid h^*\theta = u\cdot\theta,\, h_*\circ J = J\circ h_*|_D\}$ が得られる. 今 G をこのいずれかの群とするとき, G は幾何構造を保ちつつ X に可微分かつ固有に作用するリー変換群である. 簡潔にアイディアを示すために $V = \mathbb{R}^+$ とし, $C^\infty(X,\mathbb{R}^+)$ を可微分 G-加群とする. (ここで加群は $\alpha \in G$ と $x \in X$ に対し, $\alpha\circ u(x) = u(\alpha^{-1}x)$ で導入する.) まず今回の目的達成に関しては, 1 次微分コホモロジー $H^1_d(G, C^\infty(X,\mathbb{R}^+))$ を考えることになる. この中の元 $\lambda \in Z^1_d(G, C^\infty(X,\mathbb{R}^+))$ は **crossed homomorphism** とよばれ, $\lambda(\alpha\beta) = \alpha\circ\lambda(\beta)\cdot\lambda(\alpha)$ を満たすものである. $G \ni \alpha$ に対し, G の定義より可微分関数 $u_\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ が存在して, $\alpha^*\theta = u_\alpha\cdot\theta$ と記述できる. 最初の試みは固有 G-作用を幾何的に反映させる crossed homomorphism λ を探すことである. そこで, 写像 $\lambda : G \longrightarrow C^\infty(X,\mathbb{R}^+)$ を $\lambda(\alpha) = \alpha\circ u_\alpha$ とおく. 微分の合成 $(\alpha\beta)^*\theta = \beta^*\alpha^*\theta$ に注意して, $\lambda(\alpha\beta) = \alpha\circ\lambda(\beta)\cdot\lambda(\alpha)$ が成り立つことがチェックできる. これより, 1-コサイクル $[\lambda] \in H^1_d(G, C^\infty(X,\mathbb{R}^+))$ が得られる.

次の段階 – **(ii)** の消滅性 $H^1_d(G, C^\infty(X,\mathbb{R}^+)) = 0$ が示されていると仮定する. このとき λ はコバウンダリー, つまり可微分関数 $v \in C^\infty(X,\mathbb{R}^+)$ が存在して $\delta^0 v = \lambda$ が言える. 共形性の観点から, このとき k 次共変微分形式を $\eta = v\cdot\theta$ とおくと, 各 $\alpha \in G$ に対して, $\alpha^*\eta = \eta$ が導かれる. 上の消滅性が満たされるなら $G = \mathrm{Conf}(X,g)$ のとき, $\tilde{g}$ を $v\cdot g$ とおけば g と共形なリーマン計量であり, G は $\tilde{g}$ の等長群 $\mathrm{Isom}\,(X,\tilde{g})$ に一致する. G が CR-変換群 $\mathrm{Aut}_{CR}(X,(\mathsf{D},J))$ のときは D を表す θ に対して, コンタクト形式を $\eta = v\cdot\theta$ とおいて (Webster, Chern-Moser 等により与えられた) 強擬凸-擬エルミート変換群を $\mathrm{Psh}\,(X,(\eta,J)) = \{h \in \mathrm{Diff}\,(X) \mid h^*\eta = \eta, h_*\circ J = J\circ h_*|_{\mathsf{D}}\}$ とかくとき, $G = \mathrm{Psh}\,(X,(\eta,J))$ と求まる. リーマン計量でみるならば η の Reeb 場が $\mathrm{Aut}_{CR}(X,(\mathsf{D},J))$ の部分群を生成するとき, $g_\eta = \eta\cdot\eta + d\eta\circ J$ は X 上の佐々木 (リーマン) 計量であり, $\mathrm{Psh}\,(X,(\eta,J))$ は佐々木多様体 (X,g_η) の等長群 $\mathrm{Isom}\,(X,g_\eta)$ の一つの (連結) 成分を与えることがわかる. 従来のリーマン幾何 (曲率等) の手法とは全く違った形でこのような幾何的結果を統一的に出せることにはオリジナリティがあると思う.

参考文献

[1] D. Alekseevsky, V. Corts, K. Hasegawa and Y. Kamishima, *Homogeneous locally conformally Kähler and Sasaki manifolds*, International J Math. **26** (2015).

[2] D. Alekseevsky, K. Hasegawa and Y. Kamishima, *Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups*, Nagoya Math. J. **243**, 83-96 (2021).

[3] O. Baues and Y. Kamishima, *Isometry groups with radical, and Aspherical Riemannian manifolds with large symmetry I*, *Geometry & Topology* **27**, 1-50 (2023).

[4] C. Frances, *Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4) **40** (5), 741-764 (2007).

[5] K. Hasegawa and Y. Kamishima, *Compact homogeneous locally conformally Kähler manifolds*, *Osaka J. Math.* **53**, 683-703 (2016).

[6] K.B. Lee and F. Raymond, *Seifert fiberings*, Math. Surveys and Monographs, **166** (2010).

[7] S. Ivanov and D. Vassilev, *Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem*, *J. Math. Pures Appl.* **93** (3), 277-307 (2010).

[8] Y. Kamishima, *Holomorphic torus actions on compact locally conformal Kähler manifolds*, Compositio Math. **124** (2000).

[9] J. Lee, *CR manifolds with noncompact connected automorphism groups*, *Journal of Geometric Analysis* **6** (1), 79-90 (1996).

[10] K. B. Lee and F. Raymond, *Seifert fiberings*, *Mathematical Surveys and Monographs*, **166** 2010.

[11] I. Vaisman, *Non-Kähler metrics on geometric complex surfaces*, Rend. Sem. Torino **45** (1987).

[12] C. T. C. Wall, *Geometric structures on compact complex analytic surfaces*, Topology **25** (1986).

[13] R. Schoen, *On the conformal and CR automorphism groups*, *Geometric and Functional Analysis* **5** (2), 464-481 (1995).