Littlewood の conjecture をめぐって

山口　博（城西大学・理・数学）

Abstract:　調和解析（フーリエ解析）の分野に Littlewood の conjecture と呼ばれる問題 がある（あった）. この問題は Dirichlet 核に関連したある種の三角多項式の L^1-ノルムの大きさに関するもので, Hardy-Littlewood の論文 (1948 年) にでたものである. P.J. Cohen が 1960 年に部分的に positive な結果をだしたあと, H. Davenport, E. Hewitt- H.S. Zuckerman, S.K. Pichorides たちの結果を経て最終的に, 1981 年に, 3 人のアメリカの数学者 O.G. McGehee - L. Pigno - B. Smith によって, 解決された. ここでは, この conjecture が解決されるに至った経過を説明したいと思う.
尚, この原稿は, 2023 年 7 月に行った講演内容を加筆修正したものである.

§ 1　Lebesgue conctants と Littlewood の conjecture.

$\mathbb{T} = \{e^{ix} : 0 \leqq x < 2\pi\}$: circle group.

$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ $\left(= \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)$ を Dirichlet 核といい,

$L_n = \|D_n\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\right|dx$ を Lebesgue constants（Lebesgue 定数）という.

Lebesgue constants については、次のことが知られている.

(1. 1)　$L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\log n + \mathrm{O}(1).$

従って、　特に、

(1. 2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{\log n} = \dfrac{4}{\pi^2}.$

○ Littelewood の conjecture
(G.H. Hardy and J.E. Littlewood,　J. London Math. Soc. 23 (1948), 163-168).

「 定数 $C > 0$ が存在し, 整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$ に対し,

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{N} e^{in_kx}\right|dx > C\log N.$$

が成り立つかというものである. ここで, $C > 0$ は N に無関係な定数. 」

§ 2　Cohen, Davenport　の結果.

この問題に対し、P.J. Cohen は弱い形で, 次のような結果を与えた.

○ P.J. Cohen　(P.J. Cohen,　Amer. J. Math. 82 (1960), 191-212).

「 $N \geqq 3$ とする. 定数 $K > 0$ が存在し, 異なる整数 n_j と $c_j \in \mathbb{C}(|c_j| \geqq 1)$ に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{in_j x} \right| dx > K \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{\frac{1}{8}}.$$

ここで, $K > 0$ は N に無関係な定数.　」

注意　Cohen は 上の結果が compact connected Aberian group で成り立つことを示している.

更に, H. Davenport は P.J. Cohen の結果を次のように拡張した.

○ H. Davenport　(H. Davenport,　Mathmatika 7 (1960), 93-97).

「 十分大きな自然数 N と異なる整数 $n_1, \cdots, n_N$ に対し,

$$\int_0^{1} \left| \sum_{j=1}^{N} e^{i2\pi n_j x} \right| dx > \frac{1}{8} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{\frac{1}{4}}.$$」

注意　Hewitt-Zukerman (Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 847-855) は Davenport の結果が compact connected Aberian group 上で成り立つことを示している.

§ 3　Davenport　以後の主な結果.

○ S.K. Pichorides　(S.K. Pichorides,　Mathematika 21 (1974), 155-159).

「 $N \geqq 3$ とする. 定数 $K > 0$ が存在し, 異なる整数 n_j と $c_j \in \mathbb{C}(|c_j| \geqq 1$ に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{in_j x} \right| dx > K \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで, $K > 0$ は N に無関係な定数.　」

○ S.K. Pichorides (S.K. Pichorides, Bull. Soc. Math. Grèce 18 (1977), 8-16).

「 定数 $K > 0$ が存在し, 整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$ に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} e^{in_j x} \right| dx > K (\log N)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで, $K > 0$ は N に無関係な定数.　」

○ S.K. Pichorides (S.K. Pichorides, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 79-89).

「定数 $K>0$ が存在し, 異なる整数 n_j と $c_j \in \mathbb{C}(|c_j| \geqq 1)$ に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{in_j x} \right| dx > K \frac{\log N}{(\log\log N)^2}.$$

ここで, $K>0$ は N に無関係な定数. 」

§ 4 McGehee-Pigno-Smith の結果.

(Littlewood の conjecture の解決)

○ $M(\mathbb{T})$: $\mathbb{T}$ 上の有界正則な complex measure の空間.

$\mu \in M(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t).$$

Theorem (McGehee-Pigno-Smith, Annals of Mathematics, 113 (1981), 613-618)

There is a real number $C>0$ such that given any set $S=\{n_1<n_2<\cdots\} \subset \mathbb{Z}$ and $\mu \in M(\mathbb{T})$, $\mathrm{supp}(\hat{\mu}) \subset S$, then

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\hat{\mu}(n_k)|}{k} \leqq C\|\mu\|.$$

($C=30$ としてとれる)

Corollary $p(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k e^{in_k t}$

但し, $\{n_1<n_2<\cdots<n_N\} \subset \mathbb{Z}$, $|c_k| \geqq 1$ $(k=1,2,\cdots,N)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in_k t} \right| dt = \|p\|_1 \geqq \frac{1}{C}\log N.$$

Remark Theorem と Corollary は compact connected abelian groups においても成り立つ.

Corollary の証明

$p(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k e^{in_k t}$ に対し, Theorem より,

$$C\|\sum_{k=1}^{N} c_k e^{in_k t}\|_1 \geqq \sum_{k=1}^{N} \frac{|c_k|}{k} \geqq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

ところで,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} > \int_{1}^{N+1}\frac{1}{x}dx = \log(N+1).$$

故に,

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{N}c_k e^{in_k t}\|_1 &\geqq \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\\ &> \frac{1}{C}\log(N+1)\\ &> \frac{1}{C}\log N.\end{aligned}$$

§ 5 Kansas にて

1988 年 4 月から 1989 年 3 月までの約 1 年間, 城西大学学外研究員制度を利用し, アメリカの Kansas State University (KSU) に留学した. 当時 KSU には, 調和解析関係では, L. Pigno, S. Saeki (佐伯貞浩), K. Stromberg, B. Burkel, A. Benett などの先生方がおられ, L. Pigno 先生が数学科の Department Head をされていた.
KSU は semester 制で, 5 月中旬で, Spring semester が修了し, Fall semester は 8 月下旬から始まったが, 佐伯先生が Fall semester は Sabbatical で Maryland 大学へ出張されたため, その間佐伯先生の研究室を利用させてもらった。
Fall semester では, A. Bennett 先生の大学院向けの講義があり, Burkel 先生とその講義を受講した. 講義は, A. Torchinsky 著, "Real-variable methods in harmonic analysis, Academic Press, 1986" に沿ったものであった. 1989 年 1 月から, Spring semester が始まったが, 1 月下旬に, Kansas 滞在中に得られた結果を, 佐伯先生と Burkel 先生に聞いてもらう形でセミナーを行った： その結果を簡単に説明する.

Let (G, X) be a transformation group, in which G is a compact abelian group and X is a locally comact Hausdorff space. Let $M(G)$ be the measure algebra on G, and $\hat{G}$ stands for the dual group of G. For $\mu \in M(G)$, we define the Fourier transform of μ by

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)d\mu(x) \quad (\gamma \in \hat{G}).$$

Let $M(X)$ be the Banach space of complex-valued bounded Borel measures on X with the total variation norm. For $\lambda \in M(G), \mu \in M(X)$, we define $\lambda * \mu \in M(X)$ by

$$\lambda * \mu(f) = \int_X \int_G f(g\cdot x)d\lambda(g)d\mu(x) \quad (f \in C_0(X)).$$

Set $J(\mu) = \{f \in L^1(G) : f * \mu = 0\}$, and for $\mu \in M(X)$, we define the spectrum $sp(\mu)$ of μ by

$$sp(\mu) = \bigcap_{f\in J(\mu)} \hat{f}^{-1}(0).$$

For $\mu \in M(G)$ and $\gamma \in \hat{G}$, we note that

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = \|\gamma * \mu\|.$$

結果 (Yamaguchi(1989 年)) (unpublished)
Let (G, X) be a transformation group such that a compact connected abelian group G acts on a locally compact Hausdorff space X. Let $C > 0$ be the positive constant in Theorem. Then, for any countable set $S = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots\} \subset \hat{G}$ and $\mu \in M(G)$ with $sp(\mu) \subset S$, we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\gamma_k * \mu\|}{k} \leqq C\|\mu\|.$$

この結果は改良された形で, 佐伯先生との共著の論文として出版された（[17]）.

§ 6 Littlewood の conjecture の応用

§ 4 で述べたように Littlewood の conjecture は 1981 年に O.G. McGehee, L. Pigno and B. Smith によって解決されたわけであるが, この結果の応用を紹介したいと思う.

$M(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の測度環とする. すると, $M(\mathbb{T})$ は $\mathbb{T}$ 上の単位元における unit mass を単位元, convolution を積として, 単位元を持つ可換 Banach 環になる.
$H^1(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の Hardy 空間とする. すなわち,

$$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \ (\forall n < 0)\}.$$

$H^1(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素 T は, $\mathbb{Z}^+$ 上の関数 ψ が存在し,

$$T(f)\hat{\ }(n) = \psi(n)\hat{f}(n) \ \ (n \in \mathbb{Z}^+)$$

となるとき, $H^1(\mathbb{T})$ 上の multiplier と呼ばれる.

$\mu \in M(\mathbb{T})$ を idempotent measure とする (i.e., $\mu * \mu = \mu$). $H^1(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素 T_μ を

$$T_\mu(f) = f * \mu \quad (f \in H^1(\mathbb{T}))$$

により定義すると, T_μ は $H^1(\mathbb{T})$ 上の idempotent multiplier になる. また, $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ を lacunary set とする. i.e., ある $q > 1$ が存在して, $n_{k+1} \geqq q\, n_k \ \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$. すると, Paley の不等式 (cf. [9]) により, $f \in H^1(\mathbb{T})$ に対し,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(n_k)|^2 \leqq C\,\|f\|_1,$$

となる (ここで, $C > 0$ は q に関係した定数). $E = \{n_k : k = 1, 2, \cdots\}$ とおいたとき,

$$T_E(f)\hat{\ }(n) = \xi_E(n)\,\hat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

により, $H^1(\mathbb{T})$ 上の idempotent multiplier が定まる. これらは, 良く知られた $H^1(\mathbb{T})$ 上の idempotent multiplier であるが, I. Klemes ([8]) は $H^1(\mathbb{T})$ 上の idempotent multipliers を Littlewood の conjecture の結果を用いて, 完全に特徴づけている.

§ 7 おわりに

P.J. Cohen の論文 ([1]) は内容が Part I, Part II と 2 部構成になっている. Part I が本文でふれた Littlewood の conjecture に関することで, Part II は局所コンパクト可換群上の idempotent measures に関するもので, idempotent measures の特徴づけを与えている. ただ, その証明は W. Rudin の本 ([16]) でも取り上げられているが, かなり長いものである. T. Itô and I. Amemiya は, [7] で idemplotent measures の特徴づけの simple proof を与えた. Itô-Amemiya 論文の証明は [3,

Ch. 6] にわかりやすく書かれている.

参考文献

[1] P.J. Cohen, On a conjecture of Littlewood and idempotent measures, Amer. J. Math. 82 (1960), 191-212.

[2] H. Davenport, On a theorem of P. J. Cohen, Mathematika 7 (1960), 93-97.

[3] C.F. Dunkl and D.E. Ramirez, Topics in Harmonic Analysis, Meredith Corpration, New York, 1971.

[4] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, A new proof of a theorem on rearrangements, J. London Math. Soc. 23 (1948), 163-168.

[5] E. Hewitt and H.S. Zuckerman, On a theorem of P.J. Cohen and H. Davenport, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 847-855.

[6] 猪狩惺, フーリエ級数, 岩波書店, 1975.

[7] T. Itô and I. Amemiya, A simple proof of P.J. Cohen, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 774-776.

[8] I. Klemes, Idempotent multipliers of $H^1(T)$, Canad. J. Math. 39 (1987), 1223-1234.

[9] 小島広和, Paley の不等式について, 平成 12 年度城西大学理学研究科修士論文.

[10] G.C. McGehee, L. Pigno and B. Smith, Hardy's inequality and the L^1 norm of exponential sums, Annals of Mathematics 113 (1981), 613-618.

[11] S.K. Pichorides, A lower bound for the L^1 norm of exponential sums, Mathematika 21 (1974), 155-159.

[12] S.K. Pichorides, Bull. Soc. Math. Grèce 18 (1977), 8-16.

[13] S.K. Pichorides, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 79-89.

[14] L. Pigno and B. Smith, On measures of analytic type, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 541-547.

[15] L. Pigno and B. Smith, Quantitative behaviour of the norms of an analytic measure, Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 581-585.

[16] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, New York, 1962.

[17] S. Saeki and H. Yamaguchi, On Hardy's Inequality and Paley's Gap Theorem, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 289-296.