

球と円柱の共通部分の体積に現れる積分値について

日本大学大学院 理工学研究科 木村 桂馬, 一瀬 陽雲, 遠藤 司琉, 田村 響紀, 鷺尾 勇介,
日本大学理工学部 佐々木 秀馬, 柴山 将一, 鷺尾 夕紀子, 谷部 貴一,
鈴木 潔光, 利根川 聡, 西川 貴雄, 古津 博俊, 平田 典子¹

1 問題の背景と歴史

Viviani 穹面 (きゅうめん) (Viviani cave) という曲面がある. この**表面積**に関しては, Galileo Galilei (ガリレオ・ガリレイ, 1564-1642) の最晩年の弟子であり, Galileo 失明後に口述筆記係を務めたとされるフィレンチェの幾何学者 Vincenzo Viviani (ヴィンチェンツォ・ヴィヴィアーニ, 1622-1703) による興味深い考察がある [2] [9]. これを参考に, Viviani 穹面の表面積についての授業を考えてみた [3].

本稿においては, この表面積の考察の更なる発展形として, 球と円柱の共通部分に関連する立体図形の**体積**及び, 球と円柱の共通部分の**曲線の形状**を題材として, 大学及び高等専門学校等の教養課程の微分積分学等の授業において, 理解を深めることを目的とした教材を作成し, それを用いた授業実践に関する報告を行う. 授業で用いた図及び本稿にある図は数学ソフトウェア Mathematica を用いて作成した.

Viviani 穹面とは下記の3式で定義される, 3次元空間内の曲面である (y 軸の正の方向を上とみなすとき, 図1, 図2の上半分に相当). r を正実数としたときに, 半径 r の球面を半径 $r/2$ の直円柱2本で穴開けして出来る曲面の半分である [1][9].

$$(\text{Viviani 穹面}) \begin{cases} \text{半球面 } S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad y \geq 0, \\ \text{円柱1の外部} : (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}), \\ \text{円柱2の外部} : (x + \frac{r}{2})^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

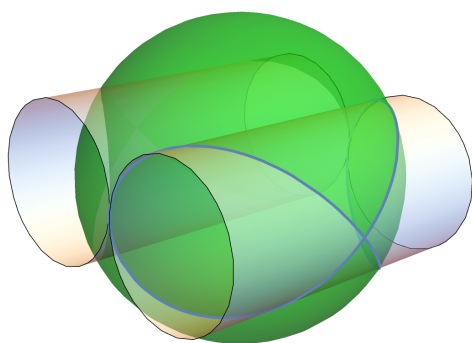


図 1: 青い曲線が Viviani curve

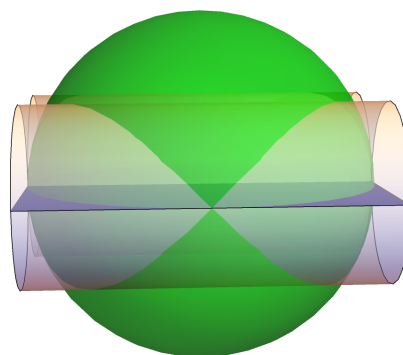


図 2: 円柱側面から見た Viviani 穹面

¹E-mail: hiratakohno.noriko@nihon-u.ac.jp

球面全体と円柱 $1(x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$ との交線を Viviani curve と呼ぶ (図 1 の青い曲線). 昨年は円錐と平面の共通部分として定まる円錐曲線を [7] に於いて考察したが, Viviani curve は円柱と球との共通部分に現れる曲線である. Viviani curve によって球面全体から切り取られる, 4 箇所の曲面 (図 1 の青い曲線 Viviani curve の内側に位置する球面部分) を Viviani window と称する. Viviani 穹面は, 球面全体から 4 箇所の Viviani window を除いた図形の半分であるが, この表面積は球の大円に外接する正方形の面積 $4r^2$ (図 2 の紫色の部分) に等しい. r が有理数全体の集合に属する場合, 円周率 π が登場しない有理数が表面積になる. この事実は Viviani が 1692 年 4 月に提起した問題の解答であった [6].

Viviani 穹面の表面積を求めてみよう. 極座標表示を用いて球面上の点を表示する.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi).$$

この点が Viviani curve 上にあるならば, 円柱 1 の側面上にもあることより,

$$\begin{aligned} (r \cos \theta \cos \varphi - \frac{r}{2})^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 &= \frac{r^2}{4} \text{ となるので} \\ \therefore \cos \theta (\cos \theta - \cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

今 $\cos \theta > 0$ より $\cos \theta = \cos \varphi$ 即ち $\theta = \varphi$ が従う. つまり, 球面上半分にある Viviani window の内側部分 4 箇所の表面積は

$$4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} \cos \theta \, d\varphi d\theta = 4r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2\pi r^2 - 4r^2.$$

この表面積を, 半球の表面積の $2\pi r^2$ から引くと Viviani 穹面の表面積は

$$2\pi r^2 - (2\pi r^2 - 4r^2) = 4r^2 \tag{1}$$

であり, 1 辺が $2r$ の正方形の面積になる. 曲面積の公式を用いても求められる.

2 球体から円柱との共通部分を抜き取った立体図形の体積

次に以下の立体図形の体積を考える. 本稿では Viviani body と呼ぶことにする. 半球体の一部であり, 図 1, 図 2 のうち球体の上半分及び円柱 1 と 2 の外部との共通部分である, 中身の詰まった立体図形である.

$$(\text{Viviani body}) \begin{cases} \text{半球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad y \geq 0, \\ \text{円柱 1 の外部} : (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}), \\ \text{円柱 2 の外部} : (x + \frac{r}{2})^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

これは即ち半径 r の球体の半分から、円柱 1 及び円柱 2 の内側の部分を除いたときの立体図形である。Viviani body の体積 V を求めよう。半球体と円柱 1 の内側との共通部分を D_1 とおき、球と円柱 2 の内側との共通部分を D_2 とする。

$$(D_1) \begin{cases} \text{半球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad y \geq 0, \\ \text{円柱 1 の内部} : (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

$$(D_2) \begin{cases} \text{半球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad y \geq 0, \\ \text{円柱 2 の内部} : (x + \frac{r}{2})^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}, \quad (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

D_1 と D_2 の体積は等しいのでその 1 個分の体積を V' とおく。半球体の体積 $= \frac{2}{3}\pi r^3$ より

$$\text{Viviani body の体積 } V = \frac{2}{3}\pi r^3 - 2V' \quad (2)$$

である。 V' はその対称性から $D_1 \cap \{y > 0, z > 0\}$ の体積の 2 倍であるので、変数変換

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

を施すと、この変換の Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -a \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

である。ここで

$$0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - a^2}, \quad 0 \leq a \leq r \cos \theta$$

に注意すると、 V' は

$$\begin{aligned} V' &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{r \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - a^2}} a \, dz \right) da \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{r \cos \theta} a \sqrt{r^2 - a^2} \, da \right) d\theta \quad (t = \sqrt{r^2 - a^2} \text{ と置換}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r \sin \theta}^r t^2 \, dt \right) d\theta = \frac{r^3}{9} (3\pi - 4) \end{aligned}$$

となることより、(2) と合わせると

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{9}r^3(3\pi - 4) = \frac{8}{9}r^3 \quad (4)$$

が得られる。即ち (1) と同様、体積であっても円周率 π が登場しない量であり、 r が有理数の場合はもちろん、有理数の値をとる。

3 体積を求める課題にむけた考察

3.1 球の半分の半径の円柱 1 本を抜いた場合

Viviani が 1692 年に提起した問題 [6] の答である Viviani 穹面の表面積は, 上記 (1) (4) のように円周率 π なしの r の累乗の有理数倍である. この事実に注目し, 授業実践の際のクイズ設定を目的として, Viviani body に類似の立体図形の体積を調べるために, 様々な場合の観察を試みた.

まず, 軸が球体の中心を通る円柱 1 本を球体に突き刺して, 共通部分を抜き取った立体図形を考える. 球体全体から, 球の半分の半径の円柱 1 本 C_i を抜き取った後に, その半分の体積を考えよう.

$$(\text{円柱 1 本抜き } C_e^{(r/2)}) \begin{cases} \text{球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \\ \text{円柱 1 本の外部} : x^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{4}, (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

この半分の体積を求めるために, まずは

$$(\text{円柱 1 本の内部 } C_i^{(r/2)}) \begin{cases} \text{球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \\ \text{円柱 1 本の内部 } C_i : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}, (z \text{ 任意}) \end{cases}$$

即ち

$$C_i^{(r/2)} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}, |z| \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$$

の体積 $V(C_i^{(r/2)})$ を求める.

$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$ ($0 < \theta < 2\pi, 0 \leq R < r/2$) と極座標変換すると

$$\begin{aligned} V(C_i^{(r/2)}) &= \int \int_{x^2+y^2 \leq r^2/4} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r/2} (\sqrt{r^2 - R^2} \cdot R) dR \right) d\theta \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{3} (r^2 - R^2)^{3/2} \right]_{R=0}^{r/2} = \frac{\pi r^3}{6} (8 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

従って C_e の体積 $V(C_e^{(r/2)})$ は $\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{\pi r^3}{6} (8 - 3\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^3$ であり, $C_e^{(r/2)}$ の半分の体積は

$$\frac{V(C_e^{(r/2)})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi r^3 \quad (5)$$

であることがわかった. r が有理数の場合は, 超越数である円周率 π に代数的数 $\sqrt{3}$ をかけて有理数倍しているので, この値は超越数であり, 有理数になることはあり得ない.

3.2 球から一般半径の円柱1本を抜いた場合

ここでは、半径 a の円柱1本を球から抜いた場合の体積を考察しよう.

$$(\text{円柱1本抜き } C_e^{(a)}) \begin{cases} \text{球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \\ \text{半径 } a \text{ の円柱1本の外部} : x^2 + y^2 \geq a^2, (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

この半分の体積を求めるために、 $0 \leq a < r$ として

$$(\text{円柱1本の内部 } C_i^{(a)}) \begin{cases} \text{球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \\ \text{半径 } a \text{ の円柱1本の内部} : x^2 + y^2 \leq a^2, (z \text{ 任意}) \end{cases}$$

の体積 $V(C_i^{(a)})$ を求める. サブセクション 3.1 と同様に、 $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ ($0 < \theta < 2\pi, 0 \leq R < a$) と極座標変換すると

$$\begin{aligned} V(C_i^{(a)}) &= \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\sqrt{r^2 - R^2} \cdot R \right) dR \right) d\theta \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{3} (r^2 - R^2)^{3/2} \right]_{R=0}^a = \frac{4\pi}{3} \left(r^3 - (r^2 - a^2)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

よって $C_e^{(a)}$ の体積 $V(C_e^{(a)})$ は

$$\begin{aligned} V(C_e^{(a)}) &= \frac{4\pi r^3}{3} - V(C_i^{(a)}) \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi}{3} \left(r^3 - (r^2 - a^2)^{3/2} \right) = \frac{4\pi}{3} (r^2 - a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

となる. これより $C_e^{(a)}$ の半分の体積は

$$\frac{2\pi}{3} (r^2 - a^2)^{3/2} \quad (6)$$

であり、 $a = r/2$ のときに (5) の値に一致する. r も a も有理数の場合は、超越数である円周率 π に代数的数 $(r^2 - a^2)^{3/2}$ をかけて有理数倍しているので、(6) の値は超越数になり、もちろん無理数である. しかし t を有理数として

$$(r^2 - a^2)^{3/2} = \frac{3t}{2\pi} \quad \text{即ち} \quad a^2 = r^2 - \left(\frac{3t}{2\pi} \right)^{2/3} < r^2 \quad (7)$$

を解けば、 $C_e^{(a)}$ の半分の体積 (6) は

$$\frac{2\pi}{3} (r^2 - a^2)^{3/2} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{3t}{2\pi} = t \in \mathbb{Q}$$

となる. a を有理数に限定せず実数の範囲で考えるならば、無限通りの有理数 t に対して (7) を満たす正実数 a の選択は可能である.

3.3 球から一般半径の円柱2本を抜いた場合

半径 r の球体 D の中心で互いに外接する, 半径 rs ($0 \leq s \leq \frac{1}{2}$) の2本の円柱 A 及び, 円柱 B を考える. セクション2の円柱1及び円柱2は, $s = 1/2$ の場合である. 本節では, 球体 D から円柱 A, B との共通部分を取り除いてできる立体の半分 $V_e^{(s)}$ の体積 $V(s)$ を考察しよう. これは半球体から以下の $V_i^{(s)}$ の体積を減じた立体である.

$$(V_i^{(s)}) \begin{cases} \text{半球体 } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad y \geq 0, \\ \text{円柱 } A \text{ の内部} : (x - rs)^2 + y^2 \leq r^2 s^2, \quad (z \text{ 任意}), \\ \text{円柱 } B \text{ の内部} : (x + rs)^2 + y^2 \leq r^2 s^2, \quad (z \text{ 任意}). \end{cases}$$

このとき以下の式を示そう :

$$V(s) = \frac{4}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4s^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta. \quad (8)$$

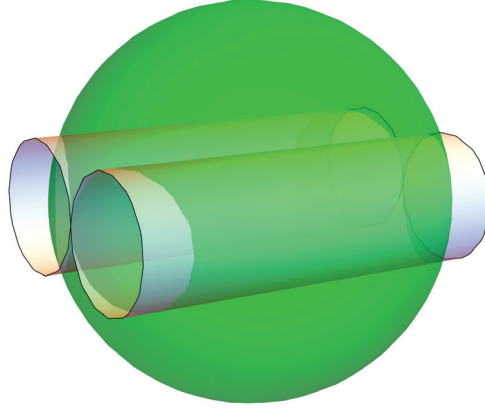


図 3: $V_e^{(s)}$ は半球体及び, 半径 rs の円柱2本の外部との共通部分の立体図形

半球体 D と円柱 A の内部との共通部分を D_A , 半球体 D と円柱 B の内部との共通部分を D_B とおくと, 対称性により D_A, D_B の体積は等しい. D_A の体積を V_A とおくと

$$V(s) = \frac{2}{3} \pi r^3 - 2V_A$$

である. まず V_A を求めよう. V_A が $D_A \cap \{y > 0, z > 0\}$ の部分の体積の2倍であることに注意して (3) と同様の変数変換を考えると, この Jacobian は a であったので

$$0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - a^2}, \quad 0 \leq a \leq 2rs \cos \theta$$

に注意すると

$$\begin{aligned} V_A &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2rs \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - a^2}} a \, dz \right) da \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2rs \cos \theta} a \sqrt{r^2 - a^2} da \right) d\theta \quad (t = \sqrt{r^2 - a^2} \text{ と置換}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r\sqrt{1-4s^2 \cos^2 \theta}}^r t^2 dt \right) d\theta = \frac{2}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4s^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta \right) \end{aligned}$$

となる. これより (8) が得られる. この量は一般に楕円積分になり [5], 初等関数で表せない場合もあるが, 特に $s = \frac{1}{2}$ のときは値が初等的に計算できて, (4) の値に一致する:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{3}r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta \\ &= \frac{4}{3}r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{9}r^3. \end{aligned}$$

上記の図形 $V_e^{(s)}$ は Viviani body の拡張になる. 同一半径の円柱複数個を球体から抜いた立体図形に関する一般的な課題設定も可能であるが, こちらにも楕円積分が現れる [5].

4 Viviani curve が直交することに関する考察

Viviani curve の交差箇所は直交する. この事実に関するクイズの作成も後述のように試みた. まず, 直交性を証明しよう. Viviani curve は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}r(1 + \cos 2\theta) \\ y = \frac{1}{2}r \sin 2\theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とパラメータ表示することができる. そこで $t = 2\theta$ とおき

$$\gamma(t) = \left(\frac{r}{2}(1 + \cos t), \frac{r}{2} \sin t, r \sin \frac{t}{2} \right)$$

とする. 但し $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ である. $\gamma(t)$ の速度ベクトルは

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{r}{2} \sin t, \frac{r}{2} \cos t, \frac{r}{2} \cos \frac{t}{2} \right)$$

であるから, $t = 0, 2\pi$ を代入すると

$$\gamma'(0) = \left(0, \frac{r}{2}, \frac{r}{2} \right), \quad \gamma'(2\pi) = \left(0, \frac{r}{2}, -\frac{r}{2} \right)$$

となる. 両者の速度ベクトルの内積を求めると

$$\gamma'(0) \cdot \gamma'(2\pi) = 0 \cdot 0 + \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{r}{2}\right) = 0$$

であるから, この速度ベクトルは $t = 0$ 及び $t = 2\pi$ のとき直交することが従う.

5 授業デザイン及び Mathematica 効果に対する受講者の反応

今回に実践した授業内容について述べる. 図4のクイズ時の受講者は本学部2年生53名, Viviani curve の形状を問うた図7のクイズ時の受講者は, 本学部3年生71名であった.

問題の背景, 球体と円柱の外部との共通部分の体積に関する問題を説明したのち, セクション 2 の Viviani body, 但し簡単のために半径 1 とした球体全体から, 半径 $\frac{1}{2}$ とした円柱 2 本を減じた立体図形の体積に関する設問を図 4 のように問うた.

図 4 クイズは「半径 1 の球体 D と底面の半径 $\frac{1}{2}$ の円柱の外部との共通部分の立体の体積と同じ体積をもつ立体は次のうちどれか? (立体の高さは 1)」であり, 答えの選択肢は

1. 底面が半径 $\frac{2}{3}$ の円柱
 2. 底面が 1 辺 $\frac{4}{3}$ の正方形の直方体
 3. 底面が 1 辺 2 の正方形の四角錐
 4. 底面が半径 $\frac{3}{2}$ の円錐
- である.

球体と円柱の外部との共通部分の体積に関するクイズ

半径 1 の球体 D と底面の半径 $\frac{1}{2}$ の円柱の外部との共通部分の立体の体積と同じ体積をもつ立体は次のうちどれか? (立体の高さは 1)

1. 底面が半径 $\frac{2}{3}$ の円柱
2. 底面が 1 辺 $\frac{4}{3}$ の正方形の直方体
3. 底面が 1 辺 2 の正方形の四角錐
4. 底面が半径 $\frac{3}{2}$ の円錐

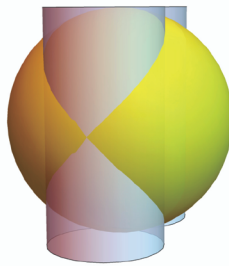


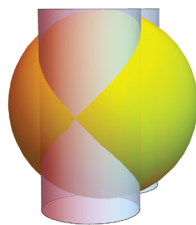
図 4: 受講者に聞いたクイズ内容

図 4 クイズの正解は図 5 の選択肢の丸印にあるように, $r = 1$ のときの値 $\frac{16}{9}$ である.

正解

半径 1 の球体 D と底面の半径 $\frac{1}{2}$ の円柱の外部との共通部分の立体の体積と同じ体積をもつ立体は次のうちどれか? (立体の高さは 1)

1. 底面が半径 $\frac{2}{3}$ の円柱
- ②. 底面が 1 辺 $\frac{4}{3}$ の正方形の直方体
3. 底面が 1 辺 2 の正方形の四角錐
4. 底面が半径 $\frac{3}{2}$ の円錐



黄色い立体の体積 $= \frac{16}{9} =$ 高さが 1 かつ底面が 1 辺 $\frac{4}{3}$ の正方形の直方体の体積

図 5: 図 4 クイズの正解

受講者の回答分布は図 6 のようになった。

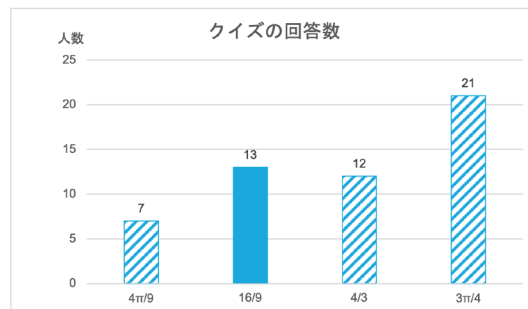


図 6: 図 4 クイズの回答分布 (正解数は濃い青色のグラフ部分)

次に Viviani 曲線の交差箇所の角度についてのクイズを図 7 クイズのように問うた。

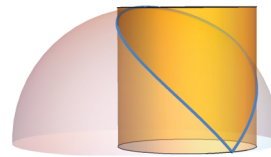
Viviani 曲線の交角について

Viviani 曲線は, 何度で交わっているか?

1. 75° 2. 45° 3. 90° 4. 60°



Viviani 曲線 (線のみ)



Viviani 曲線

図 7: 受講者に聞いたクイズ内容

図 7 クイズの正解は図 8 の選択肢の丸印にあるように, 90° になるのである。セクション 4 にてその理由を証明した。

正解

Viviani 曲線は, 何度で交わっているか?

1. 75° 2. 45° ③. 90° 4. 60°

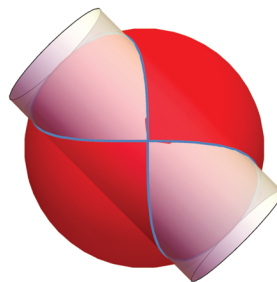


図 8: 図 7 の交角クイズの正解

図9はこの Viviani 曲線の交差箇所の交角に関するクイズの回答分布である。

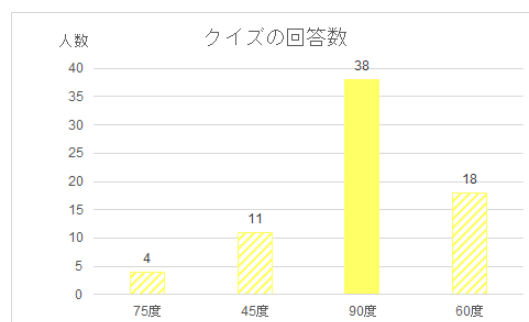


図 9: 図 7 クイズの回答分布（正解数は濃い黄色のグラフ部分）

以下、これらのクイズの回答から得られた考察を述べる。

まず授業環境であるが、受講者一人ひとりの前に端末が1台ずつ備えられたコンピュータ演習室で授業を実施した。ライセンス契約により、全ての端末で受講者が自由に Mathematica 動画を動かすことのできる場所である。クイズの設問を問いかける際、受講者に静画のみのスライドを提供して説明しただけで、受講者に答えてもらった。

しかし正解の解説時には、静画の代わりに受講者自身に実際に自分の手で Mathematica 動画を動かしてもらい、理解を深めてもらう時間をとった。

図4クイズの正解者はクイズ時の受講者53名のうち13名であり、正解率は図6の通り24.5%と決して高くなかった。その理由を考えてみた。

球や円柱に関する体積クイズにおいて、正解が円周率の登場しない有理数であることが受講者にとって意外、もしくは想像しにくいものであったという理由かもしれないと考えている。これはクイズ正解発表時に「ええっ、円周率は関係ないの?!」という驚きの声が受講者から上がっていたという記録から判断したものである。

その一方、図7の交角クイズのほうは受講者71名のうち38名が正解であり、正解率は図9の通り58.5%で予想よりも高かった。

図7のクイズでは、静画であっても Mathematica の図があるだけで、正解が容易に想像できたのかもしれない。球と円柱の共通部分の体積の図4クイズのように、内容が高度で正解が想像しにくい設問の場合には、Mathematica 動画を動かすことで内容の理解が可能になったのかもしれない。

クイズの後に「Mathematica ありの場合は無しの場合と比べ、授業内容をより良く理解できましたか」という以下のアンケートを問うた。

- | | |
|----------------|-------------|
| 1. よく理解できた | 2. 理解できた |
| 3. あまり理解できなかった | 4. 理解できなかった |

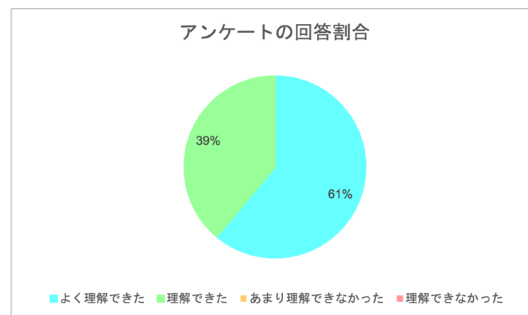


図 10: Mathematica 効果に対するアンケート結果

Mathematica 効果に対するアンケート結果は、図 10 の通り「よく理解できた」「理解できた」の合計が 100% であったが、ここで査察者の先生方から極めて貴重なご意見を頂いた。

まず、実際にどういう動画なのかが QR コード等をクリックしてみられる等、原稿における工夫ができるのではないかというコメントである。このご指摘に関しては、申し訳ないことに、授業デザイン時には受講者以外に対する動画本体の公開を想定していなかった。理由は Mathematica が有料のソフトウェアであり、大学ライセンスのない環境では、公開しても動かせないということであった。将来的には何らかの工夫をしたい。

またクイズアプリ「Kahoot!」というものをご紹介頂いた。このアプリでは個人やグループ毎に、答えの正誤がリアルタイムで分かり、何故そのように答えたかを個々、もしくはグループに聞くこともできる、ということである。このような媒体を用いると、タイムリーな意見共有によって議論を深めることも可能になり、教育的にも有用と思われる。そのため、敢えてご指摘の内容をご紹介させて頂いた。

さらに Mathematica 効果に対するアンケートについては、Mathematica に関する口頭試問や類似問題の正答率といった比較すべきデータが欠落しているため、視覚化によって「理解した」と単に思っているにすぎないことも否定できない、というご指摘、全くその通りである。

反省を踏まえ、予め授業デザインに組み込むべき点として鑑み、このご指摘を活かした授業を今後は実践したいと考えている。

6 まとめ

以上のように、円柱と球体との共通部分に関し、円周率が消えて有理数になる体積の値が正解になる問いを中心に、動画で理解を深める試みを行う授業実践を行った。また関連する曲線の交差箇所の交角も教材として用いた。今後は査察者の先生方のご意見を踏まえ、より良い授業をデザインしたい。

数学の授業では問題背景、正解導出の説明に関し、座学的なものになってしまいがちであり、多いに反省すべきである。数式変形や正解導出過程の解説に動画をどのように活用できるか、質疑応答をできるだけ行い、動画の援用で理解増進を進めながら議論中心に授業を進めるためにはどのようにすれば良いのか、今後も引き続き考えたい。

直円柱と球の共通部分の体積には、一般に楕円積分が登場するので [5], 楕円積分の導入にも今回の求積問題の発展形を応用できればと考える.

謝辞

査察者の先生方には、授業構成や教育的観点、動画に関する記述においても、極めて有用なご指摘を賜りました. ここに深く感謝申し上げる次第です. 厚くお礼申し上げます.

参考文献

- [1] 藤森 祥一, 目で見る曲線と曲面, 数学セミナー 2022 年 12 月号, 52–55, 2022.
- [2] A. Gray, *Viviani's Curve*, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, §8.6, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 201–202, 1997.
- [3] 木村桂馬, 一瀬陽雲, 室井龍二, 鷺尾勇介, 鷺尾夕紀子, 鈴木潔光, 利根川聡, 古津博俊, 平田典子, 3 次元曲面の切断面に関する Mathematica 動画教材と教育効果, 第 6 回数学教育セミナー「オンラインを利用した数学教育の現状とこれから」, 2024 年 3 月 23 日, 城西大学東京紀尾井町キャンパス.
- [4] 木村桂馬, 一瀬陽雲, 鷺尾勇介, 鈴木潔光, 利根川聡, 平田典子, 発問力の醸成を意識した数学クイズと授業実践, 日本工学教育協会, 第 72 回年次大会 工学教育研究講演会予稿集, 2024 年 9 月 6 日.
- [5] F. Lamarche and C. Leroy, *Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals*, Computer Physics Communications, 59, 359–369, 1990.
- [6] D. Lanier, *Leibniz, la nouvelle analyse et la géométrie ou Enquête sur la fenêtre de Viviani*, in Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 8 (Paris), (1987), 203–224.
- [7] 室井龍二, 川口桃花, 鷺尾勇介, 鷺尾夕紀子, 谷部貴一, 鈴木潔光, 利根川聡, 古津博俊, 平田典子, 円錐曲線と反射光線に関する連動型 GeoGebra 教材とその効果, 城西大学数学科数学教育紀要 第 5 巻, 1–12, 2023.
- [8] M. Segre, *Galileo, Viviani and the tower of Pisa*, Stud. Hist. Philos. Sci. 20 (4), (1989), 435–451.
- [9] R. Woodhouse, *VII. Demonstration of a theorem, by which such portions of the solidity of a sphere are assigned as admit an algebraic expression*, Philosophical Transactions, Royal Society of London, 31, 153–158, 1801, doi.org/10.1098/rstl.1801.0009 .

様々な四角形の最短経路を GeoGebra で示す動的教材

日本大学理工学部 古津博俊¹

1 はじめに

Texture を基にした GeoGebra ソフトウェアの長所は、無料であること、汎用性が高いこと、世界中で活用されていること、幾何学的な見やすさがあることなど、様々な点が挙げられる。加えて、iPad など手で自由に動かせるタブレット教材に向いていることが特筆すべきものと思われる。以前よりこれらの長所を活かすためには、形の大きさなどに依存しないような初等幾何学的な問題の考察が適当であると考え、最短経路問題に関する教材を GeoGebra で作成してきた。今回は新たに作成した教材を紹介するとともに、その活用に関する考察を述べることにしたい。

2 導入用の教材

これまで GeoGebra を用いた動的教材を色々作成し、数学教育セミナー「TEX による教材作成」及び日本工学教育研究講演会 [2][3], International Congress on Mathematical Education(2021) 等で発表を行ってきた。ここでは、最短経路問題を題材とした教材を紹介するとともに、実際に授業を行った結果について報告する。

一つ目に紹介する教材は、新たに導入用として作成したものでそのレイアウトは以下のようなになる(図1)。上部には2つのスライダーが配置され、右上の文章に書かれているように、まず左の青いスライダーで四角形のタイプを選択する。現状では5つのタイプが選択可能で、今後も随時追加していく予定である。右の赤いスライダーは最初が一番上にあり、その場合、赤い点(P,Q)や赤い線分は表示されず、四角形 ABCD のみが表示されている。ここで生徒は点 A を動かすことにより、ABCD を決定する。ABCD が決定すれば、それらを結ぶ最短経路の長さも決まるので、右下に表示されている最短経路の長さは A の動きに対応してリアルタイムで変化する。なお、点 A の可動範囲は画面上に薄い青色で表示されており、この範囲の外へは動かせないようになっている。四角形 ABCD が決まったら、右の赤いスライダーで ABCD を結ぶ経路の型を3種類の中から選ぶ。右下には、経路の長さが表示される。赤い分岐点 P,Q はおよそ四角形の内部及び周上を移動させることができ、それに応じて右下の現在の経路の長さも変化する。4点を2つの分岐点で結ぶ経路は実質この3種類しかない。また、P,Q を A,B,C,D に重ねたり、P と Q を重ねることにより、4点を1つの分岐点で結ぶ経路13種類や、4点を分岐点無しで結ぶ経路16種類にも対応している。

生徒にはゲーム感覚で、いかに最短経路の長さに近い経路を見つけるかに挑戦してもらうことにより、グラフ理論の分野の最短経路問題というなじみのない問題を理解し、親しんでもらうことがこの教材の目的である。この教材自身には計算や証明は含まれていないため、特に前提となる知識は必要としない。

¹E-mail: furutsu.hirotoshi@nihon-u.ac.jp

● 平行四辺形
 ● 等脚台形
 ● 扇型
 ● 矢じり型
 ● 正三角形と1点

● 経路 1 : $AP+DP+BQ+CQ+PQ$
 ● 経路 2 : $AP+BP+CQ+DQ+PQ$
 ● 経路 3 : $AP+CP+BQ+DQ+PQ$

まず左の青いスライダーを動かして四角形のタイプを決め
 青い点Aを動かして四角形を決めよう。そうすると右下に
 その四角形の4点をつなぐ最短経路の長さが表示される。
 次に右の赤いスライダーを動かして4点をつなぐ型を3種類
 の中から選ぼう。2点P,Qを動かすと経路の長さ（赤い線分の長さ
 の合計）が変わるのでそれをヒントに最短経路を見つけよう。

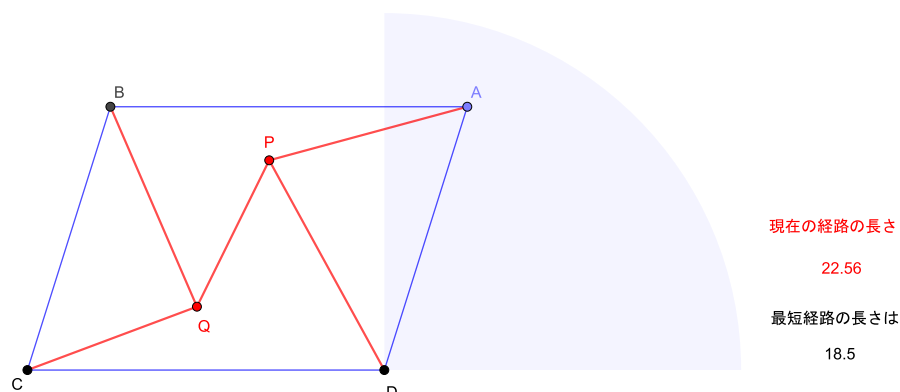


図 1: 導入用の教材

3 個別の教材と対象者

導入の後には、四角形ごとに個別の教材で対応することになる。個別の教材のうち、平行四辺形と等脚台形については以前に紹介している [1]。扇型と正三角形と1点については新たに作成しており、あとで個別に述べる。矢じり型については現在作成中である。これらの教材はおおよそ同じ内容で校正されており、後で扇型の場合を述べるが、かなりボリュームがあるため1回の授業では1つの教材のみに限定する必要がある。したがって、先の導入用の教材においても、「今日は平行四辺形で考えてみましょう」というように、個別の教材と四角形のタイプを揃えることが望ましい。では想定する対象者はということになるが、これは四角形のタイプによって異なる。

まず前提条件として、全ての個別教材は3点の場合の最短経路問題、いわゆるフェルマー点についての定理 [4] を利用している。この定理の証明とその応用には三角形の合同と円周角の知識を必要とする。したがって数学 A の「図形の性質」を学習済みでなければならない。四角形の最短経路の決定はどのタイプでも基本的な方針は同じで、まず最短経路になるための必要条件からそれぞれの型ごとにその存在範囲を求める。これには「図形の性質」を用いる。存在範囲が他の型と重なっていないければ、その型が最短経路になるが、重なっている場合、重なっている部分ではどちらが短いかわかる調べなければならない。

矢じり型については重なりがないため、「図形の性質」の単元の応用例として用いるのが望ましい。平行四辺形の教材では、この比較に三角形の合同と、2辺の長さが等しい三角形における挟角の大小と対辺の大小の関係を用いている。後者については「図形の性質」よりも「余弦定理」を用いた方が分かりやすい。結論として平行四辺形の教材は「図形の性質」の単元の最後、応用例として用いるのが妥当であると考えられる。残りの教材において

は、以下の既存の定理を用いるか、点 A の座標 (x, y) を用いて各経路の長さを x, y で表し、不等式を整理して判定している。いずれにしても、例えば「点 A (x, y) と点 B $(1, 0)$ を 2 つの頂点とする正三角形の残りの頂点の座標を求めよ」といった感じの、正三角形の 2 頂点の座標から残りの頂点の座標を求める作業が必要になる。この求め方は高校数学の範囲でも何通りもあり、そのため個別の教材ではこの作業は省略されている。求め方の例としては、円と直線の交点（数学 II）、ベクトル（数学 C）、複素数平面における回転（数学 C）、回転の行列（大学の線形代数）などが考えられる。もちろん教師が天下りに座標を教えてしまうことも可能である。

各教材の対象者は以上の中のどれを選ぶかと、不等式を整理して出てきた曲線によって規定される。これらは平行四辺形では円、等脚台形では楕円と直線、凧型では軸が x 軸 y 軸と平行な双曲線、矢じり型では直線、正三角形と 1 点では円と直線のそれぞれ一部となっている。したがって、正三角形と 1 点の教材は数学 II の「図形と方程式」の単元の最後の時間に応用例として用いるか、数学 C のどこかの応用例として用いることになる。凧型の双曲線は簡単なものであるがそれでもやはり数学 C での利用が妥当である。等脚台形の楕円は軸が傾いているため、高校数学の範囲外である。ここの部分だけ教師が天下りに教えてしまえばあとは数学 II の範囲に収まる。この楕円の図形的意味を正確に求めさせる問題はむしろ大学の線形代数の教材として有効である。

4 凧型の教材

凧型の教材は以下の（スライダーを利用した）ページで構成されている。（図 2）3 ページまでは、凧型以外の教材と共通である。

- 1 ページは最短経路問題への導入で、3 点をつなぐ最短経路というものを提示している。
- 2 ページは 3 点の最短経路に関する定理とその証明で、最初は証明は表示されておらず、チェックをいれることにより表示される。点 C' は最初は点 C と重なっており、それを点 A の周りに 60° 回転させることにより証明の図が完成する。なお、点 A を動かせるので、色々な形の三角形で考えることが可能である。
- 3 ページは先の定理から導かれる補題で、4 点の最短経路が取り得る形を示している。これもチェックにより下の図が表示されていく。
- 4 ページは凧型の場合に最短経路を探してみるもので、点 A を動かす（と連動して点 C も動く）ことにより、色々な凧型で考えることが可能である。生徒はチェックにより分岐が 1 点か 2 点かを切り替え、右に表示される数字を頼りに最短経路を探すことになる。
- 5 ページは主たる定理で、(A),(B) 二つの場合に、どの経路が最短になるかを示している。
- 6 ページは定理の確認で、点 A を動かすことにより表示されている 2 つの経路の長さが変化し、実際に境界線である双曲線を境に、2 つの経路の大小関係が変化することが確認できる。
- 7-9 ページは定理の証明で、先の補題の最短経路候補のうちで (A)(B) それぞれの場合に存在可能なものを考えることにより最短経路を求め、その長さも計算している。
- 10 ページの定理は、上の証明で最短経路の長さが点 A の x 座標によらないことから示せるもので、応用例として付け加えてある。

5 補助教材

最短経路候補の長さの比較の一部には、次の定理が利用できる。

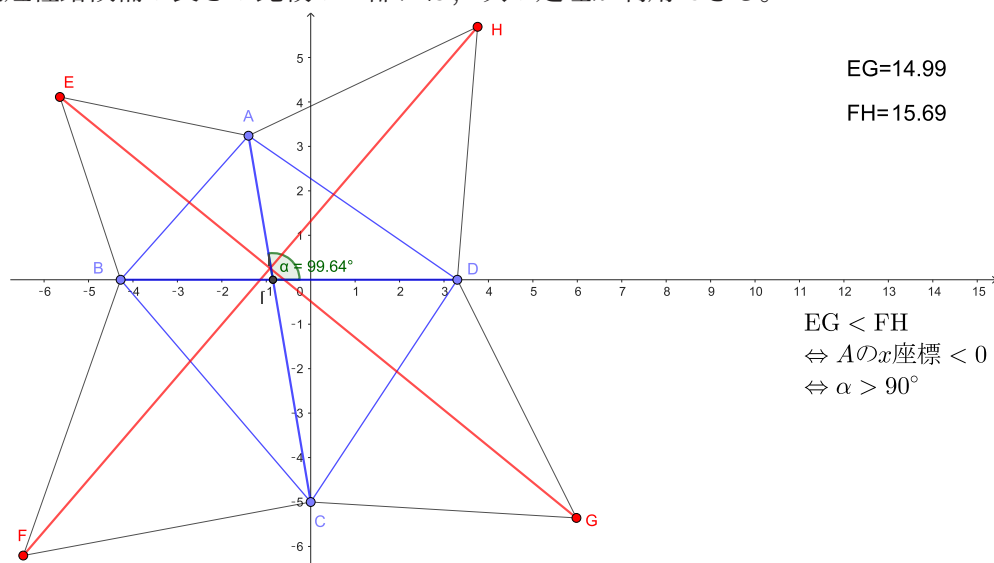


図 3: 補助教材 (定理 1)

定理 1 [4] 四角形 ABCD の外部に、4つの正三角形 ABE, BCF, CDG, DAH を付ける。また、2つのベクトル $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{BD}$ の間の角を $\alpha (0 < \alpha < 180^\circ)$ とするとき以下が成り立つ。

- (1) $FH < EG \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ$ である。
- (2) 点 A を y 軸に平行に動かしても $FH^2 - EG^2$ の値は変化しない。

証明 頂点の座標を $A(x, a), B(b, 0), C(0, c), D(d, 0)$ ($a > 0, c < 0, b < d$) とおくと、

$$EG^2 - FH^2 = 2(d - b)x$$

より示せる。■

EG, FH はそれぞれ分岐点を 2 つもつ最短経路候補の長さに等しいので、この定理によりどちらが短いかが決定できる。

この定理に関する教材として図 3 のものを作成している。この教材においては、点 C は y 軸上の $-5 < y < 0$ の部分、点 B, D はともに x 軸上の $-5 < x < 5$ の部分で動かすことができ、点 A は $-5 < x < 5, 0 < y < 5$ の範囲で動かせる。これにより凹四角形を含めた任意の形の四角形に対応している。生徒は BCD を適当に定めた後、A を動かすことにより、A が第 1 象限にあれば、 $FH < EG$ 、A が第 2 象限にあれば、 $FH > EG$ であることが右側の数字により確認できる。この定理は一部の個別教材では引用されており、平行四辺形の場合でも初等幾何を用いる証明の代わりに使うこともできる。もちろんこの教材は単独で用いることも可能であり、その場合は数学 II 等対応する単元における応用例として使用することになる。

各個別教材では最短経路候補の存在範囲を求めるために次の命題も利用している。図のような分岐点を 2 つもつ最短経路候補が存在するための必要十分条件として (a) 点 P

が弧 BC 上, (b) 点 Q が弧 AD 上, (c) 4 点 FPQH がこの順に並ぶ の 3 つを満たすという
ものがあるが, このうちの (c) に関して以下の命題が存在する。

命題 1 図 4 のように点 P, Q がそれぞれ弧 BC, 弧 AD の上に存在するとき, 4 点 F, P, Q, H
がこの順に並ぶための必要十分条件は

$$\angle BIC < 120^\circ$$

である。

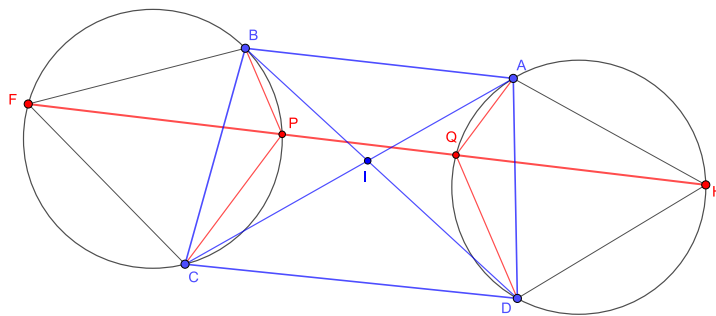


図 4: 命題 1

6 個別の四角形について

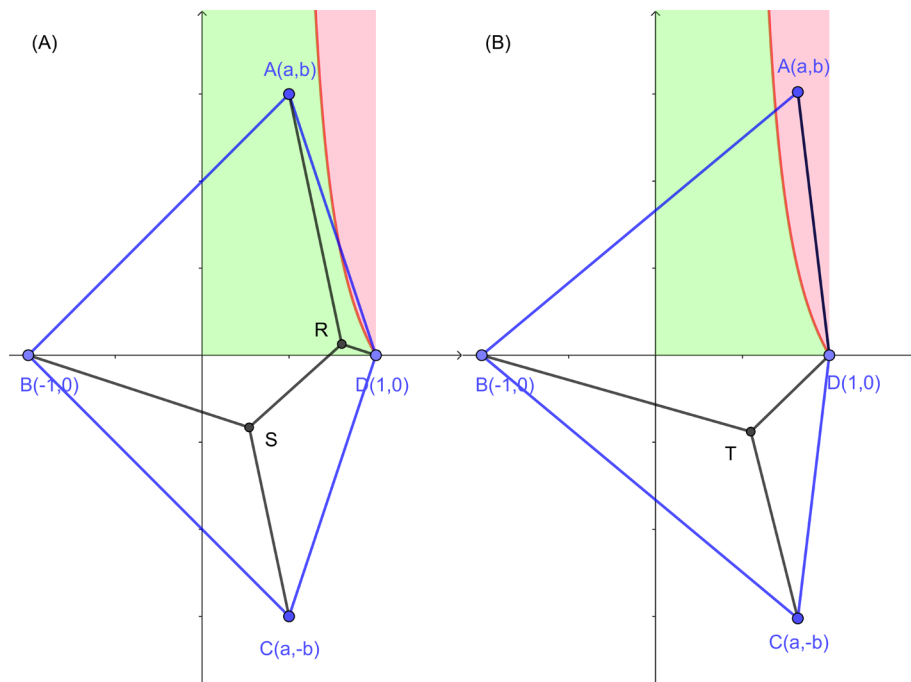


図 5: 定理 2

平行四辺形と等脚台形については以前 [1] に述べたのでここでは扇型と正三角形と 1 点
の場合について述べる。

定理 2 (風型 [2]) 4 点 ABCD を結んだ図形の 2 頂点 A,C が直線 BD に関して対称になるとき, 4 点の座標を, $A(a,b), B(-1,0), C(a,-b), D(1,0)$ ($0 \leq a < 1, 0 < b$) ととれば, 最短経路は a, b の値に応じて以下の 2 通りになる.

(A) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のときと, $\frac{1}{2} < a < 1$ で $b < \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは, 最短経路は図 5(A) のとおりである. R,S はフェルマー点になっている.

(B) $\frac{1}{2} < a < 1$ で $b \geq \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは, 最短経路は図 5(B) のとおりである. T はフェルマー点になっている.

証明の概略 直線 FH が点 D より上を通れば (A) が最短経路候補, 点 D 上かそれより下を通れば (B) が最短経路候補になり, それ以外に最短経路候補は存在しない. FH の方程式に $x = 1$ を代入し $y > 0$ という条件を求めれば, $(2a-1)b < \sqrt{3}(1-a)$ という条件が求まる. ■

定理 3 (正三角形と 1 点 [3]) 3 点 ABC を結んだ図形が正三角形になるとき, 4 点 ABCD を結ぶ最短経路は D の場所により以下の図 6 のようになる.

点 I: $AD+BD+CD$ (D はフェルマー点)

①: $d_1 = BP+CP+DP+AD$ (P はフェルマー点)

②: $d_2 = AP+CP+DP+BD$ (P はフェルマー点)

③: $d_3 = AP+BP+DP+CD$ (P はフェルマー点)

④: $d_4 = AP+DP+BQ+CQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑤: $d_5 = BP+DP+AQ+CQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑥: $d_6 = CP+DP+AQ+BQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑦: $d_7 = AP+BP+CP+AD$ (P はフェルマー点)

⑧: $d_8 = AP+BP+CP+BD$ (P はフェルマー点)

⑨: $d_9 = AP+BP+CP+CD$ (P はフェルマー点)

①②③を A 群とし, ④⑤⑥を B 群とし, ⑦⑧⑨を C 群とすると, A 群と B 群の境界は A 群に属し, B 群と C 群の境界は C 群に属する. 同じ群同士の境界では両方が最短経路になる. なお, 円弧 AB の中心は点 C であり, 他も同様である.

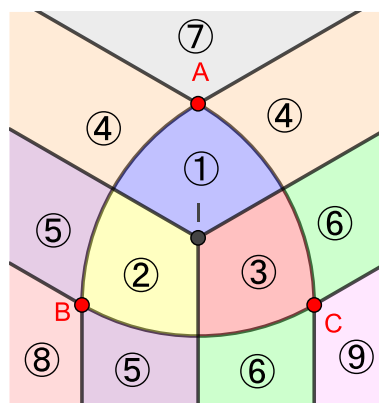


図 6: 定理 3

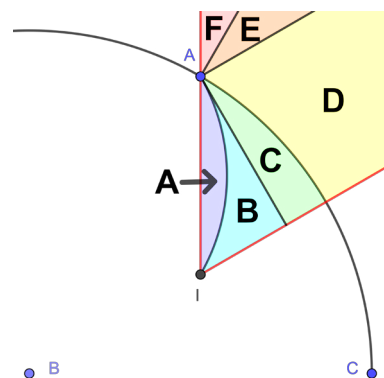


図 7: 定理 3 の証明

証明の概略 対称性より図 7 の 2 本の赤い半直線で挟まれた 60° の範囲で調べればよい. 最短経路候補の存在条件より, 図 7 の A では d_1 しか存在しない. B と C では d_1 と d_3 が存

在するが、Bでは初等幾何により、Cでは不等式の計算により $d_1 < d_3$ が示せる。Dでは d_4 と d_6 が存在するが、定理1より $d_4 < d_6$ が示せる。Eでは d_6 と d_7 が存在するが、Cの部分と同様にして $d_7 < d_6$ が示せる。Fでは d_7 しか存在しない。以上のことより、ABCでは d_1 が、Dでは d_4 が、EFでは d_7 が最短経路となる。 ■

7 まとめと今後の課題

表1 GeoGebra教材を用いたこの授業の感想をお聞かせください			
	2021年	2022年	2023年
(A) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容が極めて良く理解できた	25%	43%	25%
(B) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容が良く理解できた	72%	54%	66%
(C) GeoGebra教材を動かすことをしても、授業内容の理解度は変わらない	2%	3%	8%
(D) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容は理解しにくくなった	1%	0%	1%
(E) 無回答	0%	0%	0%
合計人数	100人	93人	128人

表2 授業で用いたGeoGebra教材についての感想をお聞かせください			
	2021年	2022年	2023年
(A) 図はあったほうが良いし、自分でも動かせた方がよい	59%	68%	72%
(B) 図はあったほうが良いし、先生によって動かせた方がよい	53%	29%	27%
(C) 図はあったほうが良いが、動く必要はない	5%	2%	2%
(D) 図は必要ない	0%	0%	0%
(E) 無回答	1%	1%	0%
合計人数	100人	93人	128人

近年 GeoGebra 個別教材を用いて行った授業のアンケート結果は、表1、表2のようになった（四捨五入のため合計が100%になっていないものもある）。授業は本学部の学生を対象に90分の授業の一部として行われたが、全員がPCやタブレットにアクセスできる環境ではなかった。授業後、GeoGebra教材を公式サイトにアップロードし、そのurlと、アンケートのgoogleformを掲示した。結果として「自分で動かすことのできる教材を用いての授業はよく理解できた」という学生が毎回多数であった。GeoGebraを用いた動的教材は幾何学の分野では有効であると考えることができる。一方、アンケート1及びアンケート2における選択肢(C)(D)の回答者についてであるが、例えばその学生には少し難易度が高かった、なじみのない題材のため理解がしにくかったなどが考えられる。

今年度の授業では事前にPCを持ってくるのが望ましいとアナウンスを行い、教材のurlも事前に掲示した。また、アンケートの設問を増やし、「最短経路の意味を理解できたのか」「今回の教材について、各領域で最短経路の型が違うことを理解できたのか」「各領域で最短経路の型が違うことを面白いと思ったか」「最短経路の形について、図を動かしながら大よその予測が可能だったか」等も設問に付け加えた。この結果についてはいずれ報告したい。今後の研究課題としては、さらに一般の形状をもつ四角形における最短経路問題を題材とするべく、試行錯誤を行なっている。また、特に3頂点が正三角形以外の特定の三角形になるような4点における最短経路問題も考察したいと考えている。

参考文献

- [1] 杉本和希, 大村侑義, 川口桃花, 室井龍二, 鷺尾勇介, 鷺尾夕紀子, 谷部貴一, 利根川聡, 古津博俊, 平田典子, 平面図形の最短経路と GeoGebra の活用事例, 城西大学数学科数学教育紀要 4 (2023), 9–15.
- [2] 黒木天也, 大村侑義, 谷部貴一, 鷺尾夕紀子, 利根川聡, 古津博俊, 扇型の最短経路を iPad で示す動的教材の提案, 2023 年度工学教育研究講演会講演論文集 (2023), 312–313.
- [3] 黒木天也, 石塚 匠, 石渡 大樹, 一瀬 陽雲, 鷺尾夕紀子, 古津博俊, 正三角形と 1 点の最短経路を iPad で示す動的教材の提案, 2024 年度工学教育研究講演会講演論文集 (2024), 468–469.
- [4] 秋山仁, R.L.Graham, 離散数学入門, 朝倉書店, (1996).