

様々な四角形の最短経路を GeoGebra で示す動的教材

日本大学理工学部 古津博俊¹

1 はじめに

Texture を基にした GeoGebra ソフトウェアの長所は、無料であること、汎用性が高いこと、世界中で活用されていること、幾何学的な見やすさがあることなど、様々な点が挙げられる。加えて、iPad など手で自由に動かせるタブレット教材に向いていることが特筆すべきものと思われる。以前よりこれらの長所を活かすためには、形の大きさなどに依存しないような初等幾何学的な問題の考察が適当であると考え、最短経路問題に関する教材を GeoGebra で作成してきた。今回は新たに作成した教材を紹介するとともに、その活用に関する考察を述べることにしたい。

2 導入用の教材

これまで GeoGebra を用いた動的教材を色々作成し、数学教育セミナー「TEX による教材作成」及び日本工学教育研究講演会 [2][3], International Congress on Mathematical Education(2021) 等で発表を行ってきた。ここでは、最短経路問題を題材とした教材を紹介するとともに、実際に授業を行った結果について報告する。

一つ目に紹介する教材は、新たに導入用として作成したものでそのレイアウトは以下のようなになる(図1)。上部には2つのスライダーが配置され、右上の文章に書かれているように、まず左の青いスライダーで四角形のタイプを選択する。現状では5つのタイプが選択可能で、今後も随時追加していく予定である。右の赤いスライダーは最初が一番上にあり、その場合、赤い点(P,Q)や赤い線分は表示されず、四角形 ABCD のみが表示されている。ここで生徒は点 A を動かすことにより、ABCD を決定する。ABCD が決定すれば、それらを結ぶ最短経路の長さも決まるので、右下に表示されている最短経路の長さは A の動きに対応してリアルタイムで変化する。なお、点 A の可動範囲は画面上に薄い青色で表示されており、この範囲の外へは動かせないようになっている。四角形 ABCD が決まったら、右の赤いスライダーで ABCD を結ぶ経路の型を3種類の中から選ぶ。右下には、経路の長さが表示される。赤い分岐点 P,Q はおよそ四角形の内部及び周上を移動させることができ、それに応じて右下の現在の経路の長さも変化する。4点を2つの分岐点で結ぶ経路は実質この3種類しかない。また、P,Q を A,B,C,D に重ねたり、P と Q を重ねることにより、4点を1つの分岐点で結ぶ経路13種類や、4点を分岐点無しで結ぶ経路16種類にも対応している。

生徒にはゲーム感覚で、いかに最短経路の長さに近い経路を見つけるかに挑戦してもらうことにより、グラフ理論の分野の最短経路問題というなじみのない問題を理解し、親しんでもらうことがこの教材の目的である。この教材自身には計算や証明は含まれていないため、特に前提となる知識は必要としない。

¹E-mail: furutsu.hirotoshi@nihon-u.ac.jp

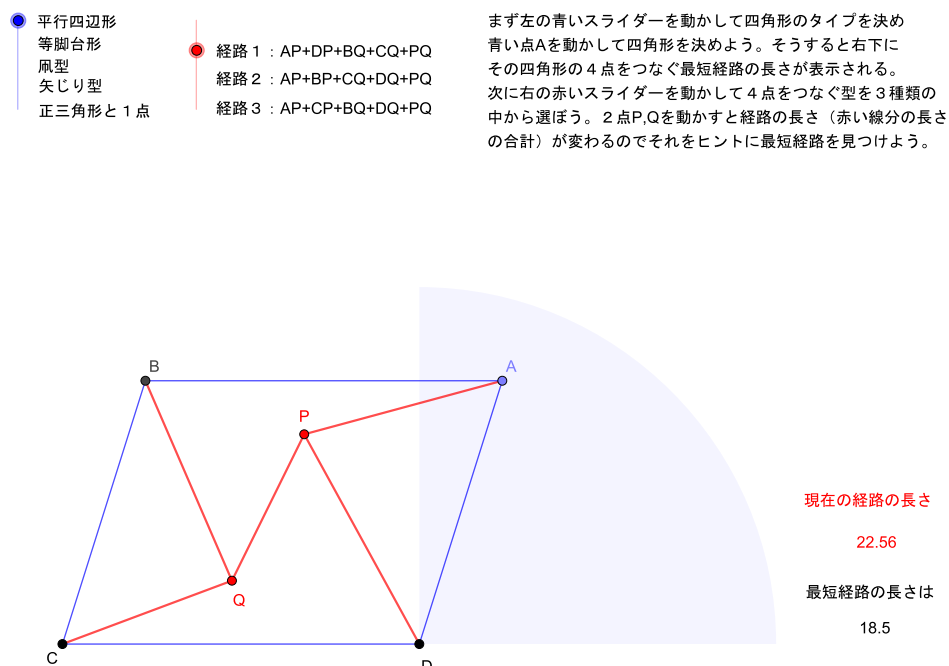


図 1: 導入用の教材

3 個別の教材と対象者

導入の後には、四角形ごとに個別の教材で対応することになる。個別の教材のうち、平行四辺形と等脚台形については以前に紹介している [1]。扇型と正三角形と1点については新たに作成しており、あとで個別に述べる。矢じり型については現在作成中である。これらの教材はおおよそ同じ内容で校正されており、後で扇型の場合を述べるが、かなりボリュームがあるため1回の授業では1つの教材のみに限定する必要がある。したがって、先の導入用の教材においても、「今日は平行四辺形で考えてみましょう」というように、個別の教材と四角形のタイプを揃えることが望ましい。では想定する対象者はということになるが、これは四角形のタイプによって異なる。

まず前提条件として、全ての個別教材は3点の場合の最短経路問題、いわゆるフェルマー点についての定理 [4] を利用している。この定理の証明とその応用には三角形の合同と円周角の知識を必要とする。したがって数学 A の「図形の性質」を学習済みでなければならない。四角形の最短経路の決定はどのタイプでも基本的な方針は同じで、まず最短経路になるための必要条件からそれぞれの型ごとにその存在範囲を求める。これには「図形の性質」を用いる。存在範囲が他の型と重なっていないければ、その型が最短経路になるが、重なっている場合、重なっている部分ではどちらが短いかわかる調べなければならない。

矢じり型については重なりがないため、「図形の性質」の単元の応用例として用いるのが望ましい。平行四辺形の教材では、この比較に三角形の合同と、2辺の長さが等しい三角形における挟角の大小と対辺の大小の関係を用いている。後者については「図形の性質」よりも「余弦定理」を用いた方が分かりやすい。結論として平行四辺形の教材は「図形の性質」の単元の最後、応用例として用いるのが妥当であると考えられる。残りの教材において

は、以下の既存の定理を用いるか、点 A の座標 (x, y) を用いて各経路の長さを x, y で表し、不等式を整理して判定している。いずれにしても、例えば「点 A (x, y) と点 B $(1, 0)$ を 2 つの頂点とする正三角形の残りの頂点の座標を求めよ」といった感じの、正三角形の 2 頂点の座標から残りの頂点の座標を求める作業が必要になる。この求め方は高校数学の範囲でも何通りもあり、そのため個別の教材ではこの作業は省略されている。求め方の例としては、円と直線の交点（数学 II）、ベクトル（数学 C）、複素数平面における回転（数学 C）、回転の行列（大学の線形代数）などが考えられる。もちろん教師が天下りに座標を教えてしまうことも可能である。

各教材の対象者は以上の中のどれを選ぶかと、不等式を整理して出てきた曲線によって規定される。これらは平行四辺形では円、等脚台形では楕円と直線、凧型では軸が x 軸 y 軸と平行な双曲線、矢じり型では直線、正三角形と 1 点では円と直線のそれぞれ一部となっている。したがって、正三角形と 1 点の教材は数学 II の「図形と方程式」の単元の最後の時間に応用例として用いるか、数学 C のどこかの応用例として用いることになる。凧型の双曲線は簡単なものであるがそれでもやはり数学 C での利用が妥当である。等脚台形の楕円は軸が傾いているため、高校数学の範囲外である。ここの部分だけ教師が天下りに教えてしまえばあとは数学 II の範囲に収まる。この楕円の図形的意味を正確に求めさせる問題はむしろ大学の線形代数の教材として有効である。

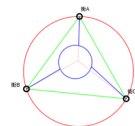
4 凧型の教材

凧型の教材は以下の（スライダーを利用した）ページで構成されている。（図 2）3 ページまでは、凧型以外の教材と共通である。

- 1 ページは最短経路問題への導入で、3 点をつなぐ最短経路というものを提示している。
- 2 ページは 3 点の最短経路に関する定理とその証明で、最初は証明は表示されておらず、チェックをいれることにより表示される。点 C' は最初は点 C と重なっており、それを点 A の周りに 60° 回転させることにより証明の図が完成する。なお、点 A を動かせるので、色々な形の三角形で考えることが可能である。
- 3 ページは先の定理から導かれる補題で、4 点の最短経路が取り得る形を示している。これもチェックにより下の図が表示されていく。
- 4 ページは凧型の場合に最短経路を探してみるもので、点 A を動かす（と連動して点 C も動く）ことにより、色々な凧型で考えることが可能である。生徒はチェックにより分岐が 1 点か 2 点かを切り替え、右に表示される数字を頼りに最短経路を探すことになる。
- 5 ページは主たる定理で、(A),(B) 二つの場合に、どの経路が最短になるかを示している。
- 6 ページは定理の確認で、点 A を動かすことにより表示されている 2 つの経路の長さが変化し、実際に境界線である双曲線を境に、2 つの経路の大小関係が変化することが確認できる。
- 7-9 ページは定理の証明で、先の補題の最短経路候補のうちで (A)(B) それぞれの場合に存在可能なものを考えることにより最短経路を求め、その長さも計算している。
- 10 ページの定理は、上の証明で最短経路の長さが点 A の x 座標によらないことから示せるもので、応用例として付け加えてある。

ある地域に3つの街がありました。
新たに道を作って3つの街をつなぐ
ことになりました。道は途中で枝分
かれています。どのようにつなぐ
ことができるでしょうか？

このようにいくつかの点をつなぐとき、その長さの合計が、最も短くなる経路（最短経路）を考えます。



$n = 1$

(A) すべての内角が 120° 未満のとき、
三角形の内部に、 AP, BP, CP のなす角が
すべて 120° になる点が存在する。
この点で $AP+BP+CP$ は最短になる。
この点を三角形のフェルマー点という。

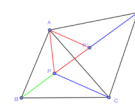
(B) いずれかの角が 120° 以上のとき、
その角をはさむ辺が最短経路になる。
このとき、その角の頂点をフェルマー点
ということもある。

証明

三角形ACPをAを中心に 60° 回転した三角形をAC'P'とする。

三角形APP' (と三角形ACC') は正三角形になるので
 $AP+BP+CP = BP+P'P+P'C'$
したがって(A)の場合、最短になるのは4点B,P,P',C'が一直
線するとき、最短経路の長さはBC'と等しくなる。

(B)の場合、このようなPは三角形の内部には存在しない
ので、図より、P=Aのとき最短となる。



n=2

一般に、4頂点 A, B, C, D を結ぶ最短経路では、各分岐点 $(P, Q$ 等)から3本の線分が出ている。それは

- (1) $AB + BC + BD$ (各部分のなす角すべて 120°)
- (2) $AB + BC + CD$ (各部分のなす角はすべて 120° 以上)
- (3) $AP + BP + CP + CQ + CD$ (AP, BP, CP のなす角はすべて 120° , CP と CD のなす角は 120° 以上)
- (4) $AP + BP + CQ + DQ + PQ$ (各部分のなす角はすべて 120°)

のいずれかの形になる。

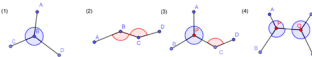
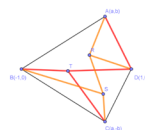


Figure 10 shows a point A(0, 20) connected to points B, C, D, and R. The diagram illustrates the calculation of the sum of distances from A to the vertices of a quadrilateral BCDR. The sum of distances is calculated as $BT + CT + DT + AD = 4.21$ and $AR + DR + BS + CS + RS = 4.37$.

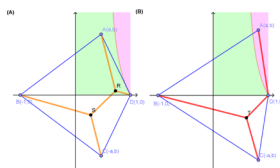


$n = 4$

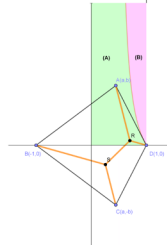
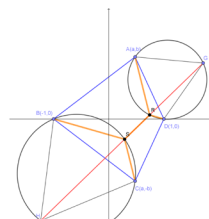
4. $ABCD$ を楕円形断面の直管、点 A が直管 BD に對して対称となると、点 A の座標を $A(a, b, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $D(1, 0)$ ($0 \leq a < 1, 0 < b < 1$) とし、最短経路は a, b の値に応じて以下の二通りになる。

(A) $0 \leq \frac{1}{2} < \frac{a}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは、最短経路は図(A)のとおりである。R, S はフェルマート点になっている。

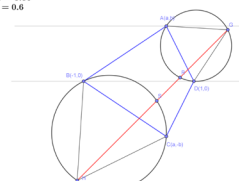
(B) $\frac{1}{2} < \frac{a}{2} < 1 \leq \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは、最短経路は図(B)のとおりである。T はフェルマート点になっている。

 $n = 5$

(A) $AR+DR+BS+CS+RS=4.02$
 (B) $BT+CT+DT+AD=4.06$

 $n = 6$ [illegible]

2 頂点 A と C が対角線 BD に關して
 正対称な四角形 $ABCD$ の外側に 2 つの
 正三角形 $ADG \triangleq BCH$ を付け加える。
 三角形 ADG の外接円と直線 GH の
 交点のうち G でない方を R とし、
 三角形 BCH の外接円と直線 GH の
 交点のうち G でない方を S とする。
 点 $A \in BD$: 平行に動くとき、
 GH の長さは一定であり、
 RS の長さも一定である。



16

5 補助教材

最短経路候補の長さの比較の一部には、次の定理が利用できる。

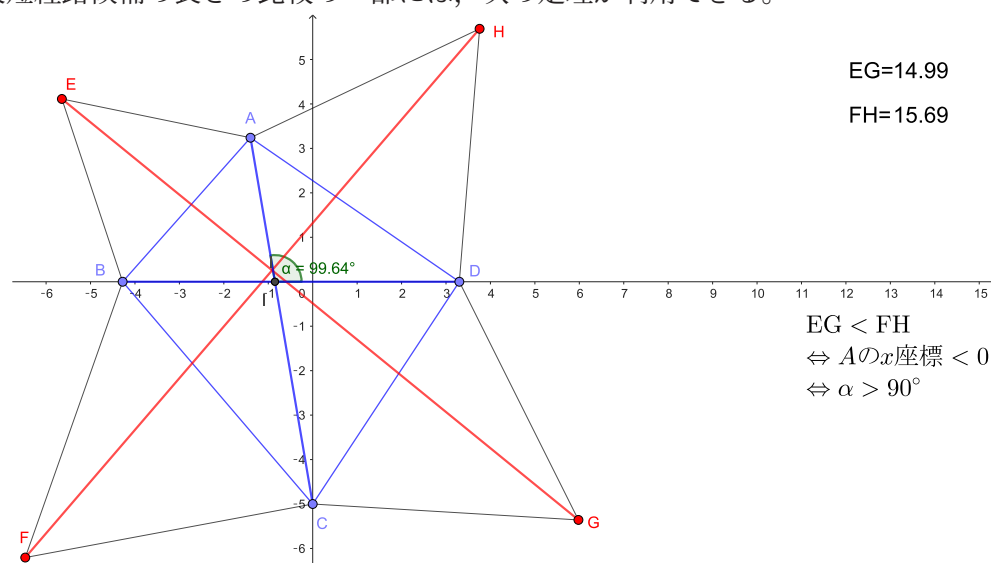


図 3: 補助教材 (定理 1)

定理 1 [4] 四角形 ABCD の外部に、4つの正三角形 ABE, BCF, CDG, DAH を付ける。また、2つのベクトル $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{BD}$ の間の角を $\alpha (0 < \alpha < 180^\circ)$ とするとき以下が成り立つ。

- (1) $FH < EG \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ$ である。
- (2) 点 A を y 軸に平行に動かしても $FH^2 - EG^2$ の値は変化しない。

証明 頂点の座標を $A(x, a), B(b, 0), C(0, c), D(d, 0)$ ($a > 0, c < 0, b < d$) とおくと、

$$EG^2 - FH^2 = 2(d - b)x$$

より示せる。■

EG, FH はそれぞれ分岐点を 2 つもつ最短経路候補の長さに等しいので、この定理によりどちらが短いかが決定できる。

この定理に関する教材として図 3 のものを作成している。この教材においては、点 C は y 軸上の $-5 < y < 0$ の部分、点 B, D はともに x 軸上の $-5 < x < 5$ の部分で動かすことができ、点 A は $-5 < x < 5, 0 < y < 5$ の範囲で動かせる。これにより凹四角形を含めた任意の形の四角形に対応している。生徒は BCD を適当に定めた後、A を動かすことにより、A が第 1 象限にあれば、 $FH < EG$ 、A が第 2 象限にあれば、 $FH > EG$ であることが右側の数字により確認できる。この定理は一部の個別教材では引用されており、平行四辺形の場合でも初等幾何を用いる証明の代わりに使うこともできる。もちろんこの教材は単独で用いることも可能であり、その場合は数学 II 等対応する単元における応用例として使用することになる。

各個別教材では最短経路候補の存在範囲を求めるために次の命題も利用している。図のような分岐点を 2 つもつ最短経路候補が存在するための必要十分条件として (a) 点 P

が弧 BC 上, (b) 点 Q が弧 AD 上, (c) 4 点 FPQH がこの順に並ぶ の 3 つを満たすという
ものがあるが, このうちの (c) に関して以下の命題が存在する。

命題 1 図 4 のように点 P, Q がそれぞれ弧 BC, 弧 AD の上に存在するとき, 4 点 F, P, Q, H
がこの順に並ぶための必要十分条件は

$$\angle BIC < 120^\circ$$

である。

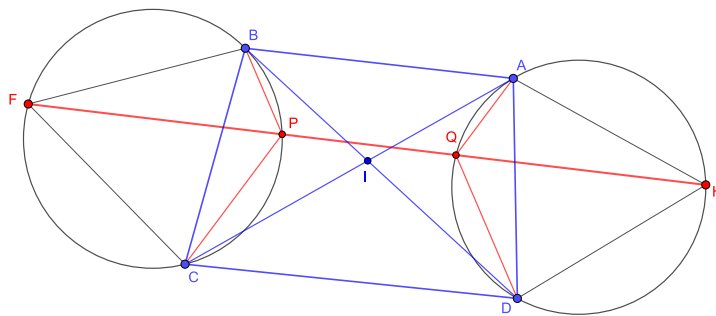


図 4: 命題 1

6 個別の四角形について

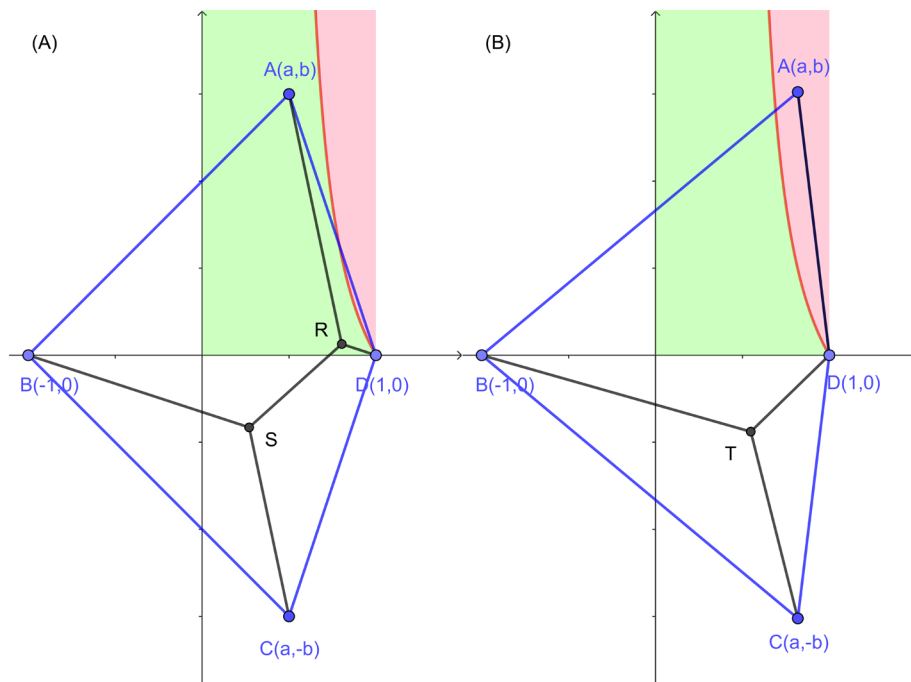


図 5: 定理 2

平行四辺形と等脚台形については以前 [1] に述べたのでここでは扇型と正三角形と 1 点
の場合について述べる。

定理 2 (風型 [2]) 4 点 ABCD を結んだ図形の 2 頂点 A,C が直線 BD に関して対称になるとき, 4 点の座標を, $A(a,b), B(-1,0), C(a,-b), D(1,0)$ ($0 \leq a < 1, 0 < b$) ととれば, 最短経路は a, b の値に応じて以下の 2 通りになる.

(A) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のときと, $\frac{1}{2} < a < 1$ で $b < \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは, 最短経路は図 5(A) のとおりである. R,S はフェルマー点になっている.

(B) $\frac{1}{2} < a < 1$ で $b \geq \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2a-1}$ のときは, 最短経路は図 5(B) のとおりである. T はフェルマー点になっている.

証明の概略 直線 FH が点 D より上を通れば (A) が最短経路候補, 点 D 上かそれより下を通れば (B) が最短経路候補になり, それ以外に最短経路候補は存在しない. FH の方程式に $x = 1$ を代入し $y > 0$ という条件を求めれば, $(2a-1)b < \sqrt{3}(1-a)$ という条件が求まる. ■

定理 3 (正三角形と 1 点 [3]) 3 点 ABC を結んだ図形が正三角形になるとき, 4 点 ABCD を結ぶ最短経路は D の場所により以下の図 6 のようになる.

点 I: $AD+BD+CD$ (D はフェルマー点)

①: $d_1 = BP+CP+DP+AD$ (P はフェルマー点)

②: $d_2 = AP+CP+DP+BD$ (P はフェルマー点)

③: $d_3 = AP+BP+DP+CD$ (P はフェルマー点)

④: $d_4 = AP+DP+BQ+CQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑤: $d_5 = BP+DP+AQ+CQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑥: $d_6 = CP+DP+AQ+BQ+PQ$ (P,Q はフェルマー点)

⑦: $d_7 = AP+BP+CP+AD$ (P はフェルマー点)

⑧: $d_8 = AP+BP+CP+BD$ (P はフェルマー点)

⑨: $d_9 = AP+BP+CP+CD$ (P はフェルマー点)

①②③を A 群とし, ④⑤⑥を B 群とし, ⑦⑧⑨を C 群とすると, A 群と B 群の境界は A 群に属し, B 群と C 群の境界は C 群に属する. 同じ群同士の境界では両方が最短経路になる. なお, 円弧 AB の中心は点 C であり, 他も同様である.

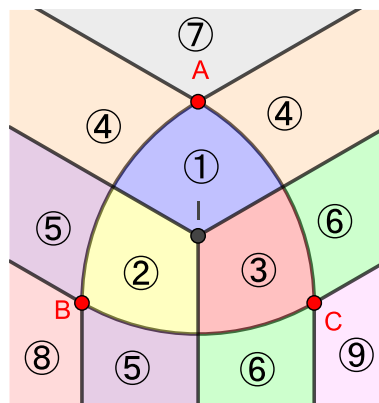


図 6: 定理 3

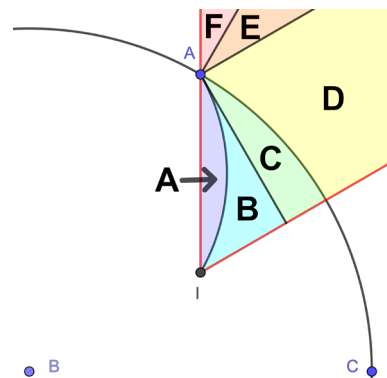


図 7: 定理 3 の証明

証明の概略 対称性より図 7 の 2 本の赤い半直線で挟まれた 60° の範囲で調べればよい. 最短経路候補の存在条件より, 図 7 の A では d_1 しか存在しない. B と C では d_1 と d_3 が存

在するが、Bでは初等幾何により、Cでは不等式の計算により $d_1 < d_3$ が示せる。Dでは d_4 と d_6 が存在するが、定理1より $d_4 < d_6$ が示せる。Eでは d_6 と d_7 が存在するが、Cの部分と同様にして $d_7 < d_6$ が示せる。Fでは d_7 しか存在しない。以上のことより、ABCでは d_1 が、Dでは d_4 が、EFでは d_7 が最短経路となる。 ■

7 まとめと今後の課題

表1 GeoGebra教材を用いたこの授業の感想をお聞かせください			
	2021年	2022年	2023年
(A) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容が極めて良く理解できた	25%	43%	25%
(B) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容が良く理解できた	72%	54%	66%
(C) GeoGebra教材を動かすことをしても、授業内容の理解度は変わらない	2%	3%	8%
(D) GeoGebra教材を動かすことによって、授業内容は理解しにくくなった	1%	0%	1%
(E) 無回答	0%	0%	0%
合計人数	100人	93人	128人

表2 授業で用いたGeoGebra教材についての感想をお聞かせください			
	2021年	2022年	2023年
(A) 図はあったほうが良いし、自分でも動かせた方がよい	59%	68%	72%
(B) 図はあったほうが良いし、先生によって動かせた方がよい	53%	29%	27%
(C) 図はあったほうが良いが、動く必要はない	5%	2%	2%
(D) 図は必要ない	0%	0%	0%
(E) 無回答	1%	1%	0%
合計人数	100人	93人	128人

近年 GeoGebra 個別教材を用いて行った授業のアンケート結果は、表1、表2のようになった（四捨五入のため合計が100%になっていないものもある）。授業は本学部の学生を対象に90分の授業の一部として行われたが、全員がPCやタブレットにアクセスできる環境ではなかった。授業後、GeoGebra教材を公式サイトにアップロードし、そのurlと、アンケートのgoogleformを掲示した。結果として「自分で動かすことのできる教材を用いての授業はよく理解できた」という学生が毎回多数であった。GeoGebraを用いた動的教材は幾何学の分野では有効であると考えることができる。一方、アンケート1及びアンケート2における選択肢(C)(D)の回答者についてであるが、例えばその学生には少し難易度が高かった、なじみのない題材のため理解がしにくかったなどが考えられる。

今年度の授業では事前にPCを持ってくるのが望ましいとアナウンスを行い、教材のurlも事前に掲示した。また、アンケートの設問を増やし、「最短経路の意味を理解できたのか」「今回の教材について、各領域で最短経路の型が違うことを理解できたのか」「各領域で最短経路の型が違うことを面白いと思ったか」「最短経路の形について、図を動かしながら大よその予測が可能だったか」等も設問に付け加えた。この結果についてはいずれ報告したい。今後の研究課題としては、さらに一般の形状をもつ四角形における最短経路問題を題材とするべく、試行錯誤を行なっている。また、特に3頂点が正三角形以外の特定の三角形になるような4点における最短経路問題も考察したいと考えている。

参考文献

- [1] 杉本和希, 大村侑義, 川口桃花, 室井龍二, 鷺尾勇介, 鷺尾夕紀子, 谷部貴一, 利根川聡, 古津博俊, 平田典子, 平面図形の最短経路と GeoGebra の活用事例, 城西大学数学科数学教育紀要 4 (2023), 9–15.
- [2] 黒木天也, 大村侑義, 谷部貴一, 鷺尾夕紀子, 利根川聡, 古津博俊, 扇型の最短経路を iPad で示す動的教材の提案, 2023 年度工学教育研究講演会講演論文集 (2023), 312–313.
- [3] 黒木天也, 石塚 匠, 石渡 大樹, 一瀬 陽雲, 鷺尾夕紀子, 古津博俊, 正三角形と 1 点の最短経路を iPad で示す動的教材の提案, 2024 年度工学教育研究講演会講演論文集 (2024), 468–469.
- [4] 秋山仁, R.L.Graham, 離散数学入門, 朝倉書店, (1996).